



ABHANDLUNGEN

FÜNFUNDDREISSIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



FÜNFUNDDREISSIGSTER BAND.

MIT 17 TAFELN UND 26 ABBILDUNGEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1895.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



EINUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT 17 TAFELN UND 26 ABBILDUNGEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1895.

INHALT.

DIE

WEGE DES BLUTSTROMES

DURCH

DEN VORHOF UND DIE BOGENGÄNGE DES MENSCHEN

NACH UNTERSUCHUNGEN

VON

DR. OSWALD EICHLER

MITGETHEILT

VON

C. LUDWIG

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Aus dem Titel, welchen Dr. Eichler seiner Abhandlung im 18. Band dieser Schriften gab, erhellt seine Absicht, die Arbeit fortzusetzen. Dass sich dies Versprechen nicht erfüllte, war nicht seine Schuld; mitten aus rastloser Thätigkeit hat ihn nach kurzer Krankheit der Tod fortgenommen. Von seinem Vorhaben, zu ermitteln wie die Blutgefässe im Labyrinth verlaufen, von wo die Nerven stammen, die in der Gefässwand enden und wie sie dort wirken, gelang ihm nur eins, und auch dieses nur annähernd zu erzielen. Er vermochte zu zeigen, woher die Gefässe im Vorhof und den Bogengängen kommen, wie sie sich verästeln und in Capillaren auflösen; aber den Zusammenhang der letzteren mit den Nervenenden genauer darzulegen, dazu ist er nicht gekommen. — Wenn er uns auch nicht über alles Wissenswerthe aufklärte, so bringt er doch Neues und Werthvolles. Wie sich die Wege des Blutes in den Hauptstücken der innern Gehörwerkzeuge aneinanderschliessen wird zum ersten Mal vollständig dargelegt und damit die Möglichkeit eröffnet, zu erkennen, wie sich die Stromstärken in der Schnecke, dem Vorhof und den Bogengängen zu einander stellen. Auf den Grad und die Ausdauer der Reizbarkeit werden wir aus der Menge des Blutes schliessen können, die den Nervenenden zufliesst, und die Aenderungen des Blutdrucks werden wir den Reizen auf die Nerven des Vorhofs und der Bogengänge zurechnen dürfen.

Dr. Eichler erkrankte inmitten seiner Untersuchungen; so erklärt es sich, dass er wenig an Manuscript, statt dessen eine Anzahl von Abbildungen hinterliess. Als sie entstanden fand ich fortlaufend Gelegenheit, die Bilder mit den Präparaten zu vergleichen und mich davon zu überzeugen, dass sie naturgetreu, durchaus nichts anderes

gehen als was das Präparat sehen liess. Darum dürfte ich berechtigt sein, sie mit Worten zu erläutern.

Eine ausführliche geschichtliche Einleitung lässt sich durch die Schilderung ersetzen, welche RÜDINGER[1]) in einer vorzüglichen Abhandlung vom Verlauf der Blutgefässe im Vorhof und den Bogengängen geliefert hat. Nahezu Alles, was hierüber vor den Untersuchungen EICHLER's bekannt war, fasst sie kurz zusammen.

»Die Gefässe, welche zu den Säckchen, den häutigen Bogengängen und dem Periost des Labyrinths gelangen, sind verschieden in ihrer Anordnung. Während an den Eintrittsstellen der Nerven in die Säckchen und Ampullen ein dichtes reiches Gefässnetz vorhanden ist, werden die häutigen Bogengänge von einem groben Netz aus weit gezogenen Schlingen umgeben. Mit den Zweigen des Vestibularnerven treten die ansehnlichsten Arterien zur Wand des runden und langen Säckchens und bilden entsprechend der Macula und Crista acustica zunächst starke grobe Netze in dem lockern, ansehnlichen Bindegewebslager zwischen den Knochen und der Säckchenwand, welche die Macula acustica trägt. An der Säckchenwand selbst werden die Capillaren feiner und bilden gegen die Peripherie der Macula zahlreiche Schlingen, ohne jedoch in die Tunica propria einzutreten. Beim Menschen gelangen feine Capillaren über die Grenzen der Maculae acusticae hinaus und verbreiten sich in der äussern Faserlage der nervenfreien Säckchenwand.

»Vom Vorhofe aus begeben sich grössere arterielle Zweige in die knöchernen Bogengänge und nehmen mehr oder weniger in ihrem Centrum einen der Krümmung des Bogenganges entsprechenden Verlauf. Die Gefässe sind sämmtlich umgeben und fixirt durch eine verhältnissmässig dicke kernhaltige Bindegewebsumhüllung, welche als Ueberrest des foetalen Gallertgewebes zurückbleibt. Von den grösseren im Centrum des Kanals gelagerten Gefässen begeben sich die feinern ziemlich dickwandigen Zweige sowohl nach dem Periost als auch nach der freien Wand des hautigen Kanals und den Ligumenta labyrinthi canaliculorum, von wo aus sie in eignen Bindewegsfaden eingeschlossen als Venen zurückkehren. In den knöchernen Kanälen liegen Arterien und Venen nebeneinander und sind oft schwer

1) STRICKER, Handbuch der Gewebelehre, II. Bd., S. 897 ff.

von einander und von den dickwandigen Capillaren zu unterscheiden. — Gegen den Vorhof hin treten die beiden Gefässe einander näher, ob aber von hier aus die Venen dem Verlaufe des aus der Arteria auditiva interna abstammenden Zweige folgen, bleibt fraglich. Am querdurchschnittenen Aquaeductus vestibuli laufen starke Gefässe, nach HYRTL Venen.«

RÜDINGER's Beschreibung ergänzt HENLE[1]) dahin, dass jeder Bogengang zwei Arterien empfängt, welche von beiden Seiten einander entgegenstrebend schliesslich in einander münden. — HYRTL hatte das Gefässgebiet des Labyrinths für ein vollkommen in sich abgeschlossenes erklärt, weil nach doppeltfarbiger Ausspritzung der Art. meningea media und Art. auditiva das Labyrinth stets die Farbe der letzteren, das übrige Felsenbein aber die der ersteren trägt. — Im Widerspruch hiermit hat POLITZER[2]) einen Zusammenhang der Capillaren zwischen Mittelohr und Labyrinth an gesunden Gehörwerkzeugen nachgewiesen. In pathologischen Fällen fand LUCAE[3]), dass die Capillaren der Dura mater in die der knöchernen Bogengänge münden. Siehe hierüber auch WAGENHÄUSER[4]). — Da EICHLER entweder von der A. basilaris oder vom A. vertebralis aus injicirte, so sind seine Präparate zu einem Urtheil über den Abschluss der Gefässgebiete nicht geeignet.

Nach der in der früheren Abhandlung erwähnten Methode sind auch die nachstehend beschriebenen Präparate hergestellt, und der Zeichnung möglichst grosse Stücke des Labyrinths zu Grunde gelegt worden. Unter dem Vortheil, sich hierdurch von dem Zusammenhange der Gefässe zu vergewissern, litt allerdings die Durchsichtigkeit und damit die Einsicht in die Feinheiten der Vertheilung. Dem Mangel war abgeholfen, wenn das Celloidin herausgelöst und der Rest mit Xylol und Balsam aufgehellt war.

Ueber den Verlauf der Gefässe geben die Präparate den folgenden Aufschluss.

Kurz nach ihrem Eintritt in den Meatus auditorius internus

---

1) Handbuch der Anatomie III, 123.

2) Archiv für Ohrenheilkunde XI u. Lehrbuch der Ohrenheilkunde 3. Aufl. S. 30 und S. 508.

3) VIRCHOW's Archiv 88. Bd.

4) Archiv für Ohrenheilkunde 19. Bd.

spaltet sich die Art. auditiva in eine auf- und die absteigende. Letztere (Fig. 1 *a*) die hier allein in Betracht kommt, legt sich an die concave Seite des abgewickelten Theils der untern Schneckenwand an. Ausser dem, was sie zu dem Vorhof und den Bögen sendet, bezweigt sie ausschliesslich die Schneckenwindung bis zum Vestibulum hin, zuletzt durch das in Fig. 1 mit *e* bezeichneten Reis.

Kurz bevor die Cochlearis descendens in den Zweig *e* ausläuft, sendet sie zwei andre ab (Fig. 1 *c* und *d*), welche das Vestibulum und grössere Antheile der Bögen speisen.

Der erste derselben (Fig. 1 *d*) umgreift zunächst die vordere Seite des Sacculus durch einen Ausläufer *d'*; mit seinem grösseren Antheil strebt er dagegen zum Utriculus hin.

Der zweite (Fig. 1 *c*) wendet sich anfangs um den Sacculus nach hinten und beschickt ihn mit zahlreichern, den Utriculus mit spärlichern Reisern. Jenseits des Sacculus schlägt sich die Fortsetzung des Astes *c* unter dem runden Fenster her gegen die Fusspunkte der Bogengänge und umzieht von da aus die beiden Schenkel des hintern und je einen des vordern und horizontalen Bogengangs.

Den noch verbleibenden Rest des Labyrinths umspült eine Arterie, die sich dem vordern Strang des N. vestibularis eng anschliesst. (Fig. 1 *b*.) Ob sie unmittelbar aus der A. auditiva oder ebenfalls aus der Cochlearis descendens hervorgeht, ist noch nicht festgestellt. Aus ihm beziehen die ampullaren Schenkel des vordern und horizontalen Bogengangs ihr Blut, und die an das ovale Fenster grenzende Wand des Vestibulums.

Im Einzelnen gilt vom Gefässbau noch Folgendes:

In dem Innern der Bogengänge, jenseits der Ampullen, vertheilen sich die Gefässe auf überall gleiche Weise (Fig. 4 und 5). Jeder Bogengang empfängt von zwei Seiten her je einen Zufluss; jeder von diesen beginnt von dem Ort aus, an welchem ein Schenkel sich selbständig abhebt, legt sich an dessen concave Seite und steigt vorwärts bis zur höchsten Ausweichung, wo sich die letzten feinen Ausläufer der sich entgegenstrebenden Arterien verbinden. — Auf diesem Wege senden sie in kurzen Abständen durch die Perilymphe hindurch Aestchen zu dem engen häutigen Bogengang, angelehnt an die von RÜDINGER beschriebenen Bindegewebsstreifen. Innerhalb der Perilymphe verbinden sich benachbarte Aestchen durch Zweige, unter

Bildung weiter Maschen. Am häutigen Bogengang selbst zersplittern die Zweige in feine Reiser, die mit den Nachbarn zusammenfliessend den häutigen Bogengang umspinnen. Auch diese Maschen sind weit, doch beträchtlich enger als die innerhalb der Perilymphe (Fig. 2 u. 5).

Zu den Ampullen (Fig. 3) fliesst, ausserdem was ihr von der concaven Seite zukommt, auch noch von der Convexität des Bogens her Blut durch ein besonderes Aestchen zu. Von beiden Seiten gespeist wird die Ampulla durchweg reichlich, doch nicht überall gleich eng umnetzt. Um den Eintritt des Nerven und in der Nähe der Crista lagern sich die Gefässe besonders dicht aneinander. — Genauere Auskunft darüber, wie die Arterienreiser in die Crista eintreten, wie weit die Capillaren gegen das Epithel vordringen, sich dort wieder zu Venen sammeln, wäre noch erwünscht.

Auch auf dem Sacculus und Utriculus (Fig. 1) umgarnt ein feinstes Netz die Verbreitung der Nerven, an welche sich nach allen Seiten hin weitmaschige Geflechte anschliessen.

Aus dem Labyrinth fliesst das Blut nach zwei Richtungen hin ab. Die Venen aller Bogengänge begleiten die gleichnamigen Arterien bis zum Utriculus, von dort wenden sie sich zum (Fig. 1 ′ ″) Aqd. vestibuli, sammeln sich auf ihm zu 2 Venen und treten mit ihm nach aussen. — Von dem Sacculus und Utriculus her strömt dagegen das Blut mit der Vena cochlearis durch den Aqd. cochleae ab.

Der geschilderte Bau der Gefässe legt einige Bemerkungen nahe.

1. Weil ihre Hüllen gefässreicher sind, wird es wahrscheinlich, das der Umschlag und der Austausch an Stoffen in der Endolymphe grösser als in der Perilymphe sei. In den saftigen Zellen, welche die Innenlymphe umspült, wird der Umsatz lebhafter sein, als in den platten, welche die Aussenlymphe umgeben. Der Zusammenhang aller mit Innenlymphe gefüllten Röhren und ihr gemeinschaftlicher von der Aussenlymphe getrennter Abflussweg lässt auf durchweg gleiche stoffliche Bedürfnisse schliessen.

2. Aus der starken Berieselung der nervenhaltigen Bezirke mit Blut lässt sich auf ein grösseres chemisches Bedürfniss der Orte schliessen. Welche Ursachen und welche Folgen hätte der geforderte und der befriedigte Umsatz? Doch kaum die Schwingungen der Härchen und die Verschiebung der Steinchen zu begünstigen. — Würde die fortgesetzte Untersuchung ergeben, dass im Labyrinth, im Gegensatz zu

der Schnecke, die Enden der Nerven vom Blutstrom besonders innig berührt wurden, so würde man auch an verschiedene Leistungen beider denken müssen.

3. Der Vorstellung, wonach die Ampullarnerven in der Regel durch einen Wechsel des Drucks gereizt werden, ist es günstig, dass in den Bogengängen die Arterien von dem entgegengesetzten Schenkel her zur Kuppel emporsteigen. — Hiermit ist, soweit er vom Blutstrom abhängt, am leichtesten ein stets gleicher Druck in der Lymphe herzustellen. — Lässt sich für die ausgesprochene Unterstellung auch zum Vortheil der Verlauf der Aeste von der concaven zur convexen Bogenseite deuten? Wird der häutige Bogengang vor Zerrungen bewahrt, wenn die Gefässe flottirend durch die Perilymphe ziehen, während sie sich unter dem veränderlichen Stromdruck dehnen und verkürzen?

a – untere Schneckenarterie,
$\dot{c}, d, e$ – deren Zweige.
b – Arteria vestibularis?
V_1, V_2 – Venae vestib.

Fig. 1.

d_1'

b

d

U

S

a

c

S – Sacculus, vord. Fläche.
U – Utriculus, vordere Wand entfernt, Ansicht der unteren u. hinteren Fläche.

V_1 V_2

Fig. 3.

Fig. 2.

häutiger Bogeng.

Querschnitt des Bogengangs

Seitenansicht der Ampulle

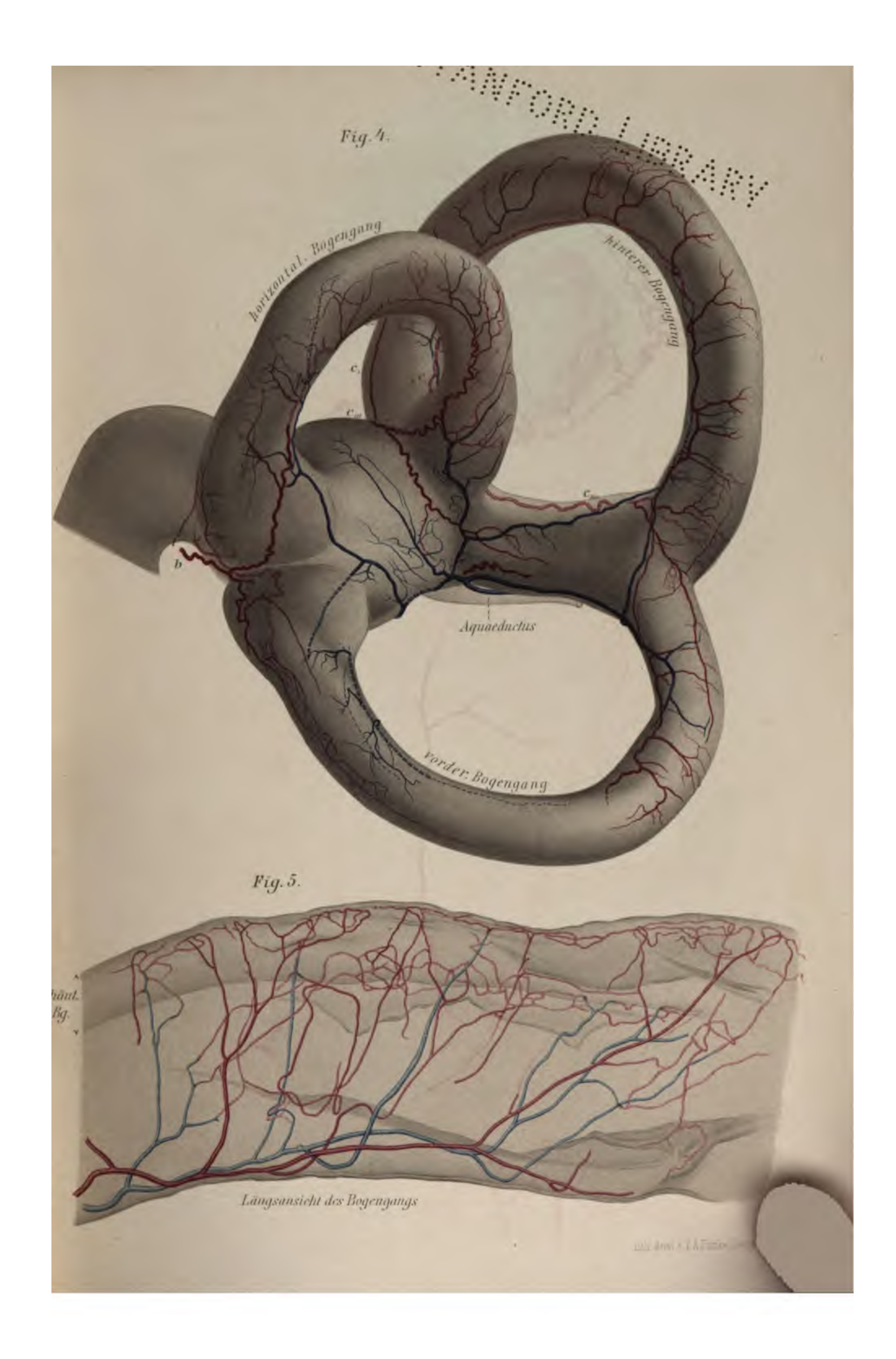


Fig. 4.
horizontal. Bogengang
hinterer Bogengang
Aquaeductus
vorder. Bogengang
Fig. 5.
häut. Bg.
Längsansicht des Bogengangs

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

ZWANZIGSTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMO- UND PIËZOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DER KRYSTALLE DES BROM- UND ÜBERJODSAUREN NATRONS, DES ASPARAGINS, DES CHLOR- UND BROMBARYUMS, SOWIE DES UNTERSCHWEFELSAUREN BARYTS UND STRONTIANS.

VON

W. G. HANKEL,
ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

IN VERBINDUNG MIT

H. LINDENBERG.

MIT ZWEI TAFELN.

Bromsaures Natron.

Die Krystalle des bromsauren Natrons gehören zum tesseralen Systeme und zeigen ähnliche Gestalten, wie die des entsprechenden chlorsauren Salzes. Als Krystallflächen treten gewöhnlich die Flächen, zweier Tetraeder in verschiedener Ausdehnung auf, die anscheinend an Glanz und Glätte gleich sind; indess finden sich auch Krystalle, an welchen die beiden Tetraederflächen nahezu gleiche Grösse haben, wodurch diese Krystalle ein oktaedrisches Aussehen erhalten. Ausser den Tetraederflächen treten noch Flächen des Rhombendodekaeders und des Würfels, bisweilen auch des Deltoiddodekaeders und des Pentagondodekaeders auf. Das Zusammenvorkommen tetraedrischer Gestalten mit dem Pentagondodekaeder weist, ebenso wie beim chlorsauren Natron[1]), auf eine hemiëdrische Bildung nach den abwechselnden Flächen des Achtundvierzigflächners und auf einen Hemimorphismus nach den trigonalen Zwischenaxen hin. Die Krystalle drehen die Polarisationsebene des Lichtes und zwar kommen sowohl rechts- als linksdrehende Krystalle vor,

1. Thermoelektricität.

Die Krystalle wurden bis auf die zu untersuchende Fläche oder Ecke in Kupferfeilicht eingehüllt auf 95° erhitzt. Bei den meisten Krystallen, an welchen die Tetraederflächen verschiedene Grösse besitzen, erscheinen die grossen Tetraederflächen beim Erkalten positiv, die kleinen dagegen negativ. Indess kommen auch Krystalle vor, bei denen die Polaritäten die entgegengesetzte Anordn
In diesem Falle sind also die grösseren Tetraederfläch

1) S. diese Abhandlungen Bd. XXXI, S. 3

die weniger grossen positiv. Den Übergang von der einen Art zur anderen bilden die oktaedrischen Krystalle, bei denen beide Tetraeder, wie schon erwähnt, nahezu gleiche Ausdehnung haben. An diesen Krystallen sind dann 4 Flächen (dem einen Tetraeder angehörig) positiv, die 4 Gegenflächen (dem anderen Tetraeder angehörig) negativ. Sämmtliche 8 Flächen zeigen, wie schon oben bemerkt, gleichen Glanz und Glätte, so dass sich die positiven und negativen Flächen durch ihr äusseres Ansehen nicht von einander unterscheiden lassen. Es bedarf zu ihrer Bestimmung der elektrischen Untersuchung.

2. Piëzoelektricität.

Beim Druck zeigen sämmtliche Flächen dieselbe Polarität, welche sie bei der Abkühlung entwickeln. Die Krystalle des bromsauren Natrons verhalten sich demnach in dieser Beziehung anders, als die Krystalle des chlorsauren Natrons, bei welchen Druck und Abkühlung entgegengesetzte Polarität geben.

Überjodsaures Natron.

Die Krystalle des überjodsauren Natrons gehören dem hexagonalen Systeme an. Sie sind ausgezeichnet hemimorph nach der Hauptaxe, indem die Endfläche $0R$ nach GROTH[1]) und RAMMELSBERG[2]) nur an dem einen Ende der Hauptaxe in grosser Ausdehnung auftritt; doch kommt die Fläche $0R$, wie die von uns untersuchten Krystalle zeigen, auch am anderen Ende, aber nur in geringerer Grösse vor.

GROTH unterscheidet zweierlei Hauptformen.

Bei der ersten Hauptform ist an dem Ende, wo die Fläche $0R$ fehlt, das Hauptrhomboeder R mit Polkantenwinkeln von $94^0\ 28'$ vorherrschend; untergeordnet treten neben ihm die Flächen des nächst stumpferen Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ und des nächst spitzeren Rhomboeders $-2R$ hinzu. Am anderen Ende der Hauptaxe bildet vorzugsweise die Endfläche $0R$ die Begrenzung.

Bei der zweiten Hauptform walten an dem Ende, wo die Endfläche $0R$ fehlt, oder wie bei den von uns untersuchten Krystallen,

1) GROTH, Physik. Krystallographie § 101.

2) RAMMELSBERG, Handbuch d. krystallogr.-physik. Chemie. S. 341.

nur in geringer Ausdehnung vorhanden ist, die Flächen des nächst spitzeren Rhomboeders $-2R$ mit Polkantenwinkeln von 72° 44′ vor. Die Flächen des Hauptrhomboeders R erscheinen als Abstumpfungen der Polkanten des Rhomboeders $-2R$, während die Flächen des nächst stumpferen Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ beim Fehlen der Endfläche $0R$ eine dreiflächige Zuspitzung des Axenendes erzeugen; beim Vorhandensein einer kleinen Endfläche $0R$ erscheinen die Flächen dieses stumpferen Rhomboeders dagegen als Abstumpfungen der von $0R$ und $-2R$ gebildeten Kanten.

Ausser dem oben beschriebenen Hemimorphismus nach der Hauptaxe, welcher dem des Turmalins analog ist, finden sich nun aber bei den Krystallen des überjodsauren Natrons noch hemimorphe Bildungen nach seitlichen Richtungen. Dieselben treten, wie wir später sehen werden, in elektrischer Beziehung sehr deutlich hervor, sind aber auch krystallographisch angedeutet durch das Auftreten von trigonalen Pyramiden und trigonalen Trapezoedern, welche letztere als hemimorphe Gestalten der hexagonalen Trapezoeder aufzufassen sind[1]).

Die von uns auf ihr thermo- und piëzoelektrisches Verhalten untersuchten Krystalle gehörten der zweiten zuvor beschriebenen Hauptform an. Die Figuren 1 *A* und 1 *B* auf Tafel I stellen die Projektionen der an den beiden Enden der Hauptaxe vorhandenen Flächen auf die Basis dar. An dem einen Ende der Hauptaxe (Fig. 1 *A*) findet sich eine kleine Fläche $0R$, um welche die drei grossen Flächen des Rhomboeders $-2R$ liegen. Die Polkanten von $-2R$ werden durch das Grundrhomboeder R und die Kanten von $-2R$ und $0R$ durch Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ abgestumpft. Oberhalb R nach $-\frac{1}{2}R$ hin liegt die Fläche einer trigonalen Pyramide $\frac{\frac{2}{3}P2}{4}$. Am anderen Ende der Hauptaxe (Fig. 1 *B*) findet sich eine grosse Fläche $0R$, an deren Ecken kleine Flächen des Rhomboeders $-2R$ auftreten, wobei die Kanten von $-2R$ und $0R$ wieder durch die Flächen $-\frac{1}{2}R$ abgestumpft werden. Die Flächen R erscheinen als schmale Abstumpfungen der Randkanten der grossen Endfläche.

---

1) Vgl. Hankel, Elektr. Unters. 15. Abh. Über die aktino- und piëzoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalls. Bd. XX.

Von vertikalen Flächen sind die Flächen des zweiten Prismas $\infty P2$ vorhanden. Flächen von trigonalen Trapezoedern waren an unsern Krystallen nicht zu finden.

1. Thermoelektricität.

Die Krystalle wurden bis auf die zu prüfende Stelle in Kupferfeilicht eingesetzt und bis 60° C. erhitzt. Bei einer derartigen Erhitzung erlitten die Krystalle keinerlei Veränderung.

Beim Abkühlen zeigte die obere kleine Endfläche $0R$ (Fig. 1 A) negative Spannung. In den Mitten der drei Flächen $-2R$ lagen positive Pole. Die grosse untere Endfläche $0R$ (Fig. 1 B) war positiv elektrisch, während auf den drei an den Ecken befindlichen Resten der unteren Flächen $-2R$ wieder negative Elektricität beobachtet wurde. Die beobachteten Spannungen waren nicht unbeträchtlich.

2. Piëzoelektricität.

Beim Druck in der Richtung der Hauptaxe zeigte die obere kleine Fläche $0R$ negative, die untere grosse Fläche dagegen positive Elektricität. Wurde der Krystall in der Richtung senkrecht gegen die Flächen $-2R$ gedrückt, so entstand auf der oberen grossen Fläche $-2R$ positive und auf der unteren kleinen Fläche $-2R$ negative Polarität. Auch der beim Druck beobachtete Ausschlag des Elektrometers war gross.

Beim Druck trat also, wie aus Vorstehendem hervorgeht, dieselbe Polarität auf, wie bei der Abkühlung. Stellen wir den Krystall mit der kleinen Endfläche nach oben, so liegt am oberen Ende bei der Abkühlung und beim Druck ein negativer Pol. In einer durch die Mitten der drei oberen grossen Rhomboederflächen $-2R$ gelegten Ebene erscheinen dann in der Mitte dieser grossen Rhomboederflächen positive Pole. In einer weiter abwärts durch die Mitten der drei kleinen Rhomboederflächen $-2R$ gelegten Ebene finden sich drei negative Pole, während das untere Ende (die Mitte der unteren Fläche $0R$) wieder einen positiven Pol enthält.

Wir haben hier also eine ähnliche Vertheilung, wie beim Boracit. Stellen wir den Boracit mit einer trigonalen Zwischenaxe vertikal, so dass die oberste Würfelecke nicht durch das Tetraeder abgestumpft ist, so zeigt die obere nicht abgestumpfte Ecke bei der Abkühlung

einen negativen Pol; in der durch die darunter befindlichen drei abgestumpften Ecken gelegten Ebene liegen drei positive Pole, in der noch weiter abwärts liegenden durch die drei nicht abgestumpften Ecken gelegten Ebene erscheinen drei negative Pole, und die untere abgestumpfte Ecke ist wieder positiv.

Wir haben demnach beim überjodsauren Natron vier polarelektrische Axen, von denen die eine vertikal steht, während die drei anderen unter gleichen Winkeln gegen die Vertikale geneigt sind.

Projiciren wir die drei geneigten Axen auf eine durch die Mitte der Krystalle senkrecht gegen die Hauptaxe gelegte Ebene, so bilden diese Projektionen drei sich unter einem Winkel von 60° schneidende elektrische Axen, von welchen eine jede an ihren Endpunkten entgegengesetzte Polarität besitzt. Diese Vertheilung gleicht also der, welche beim Bergkrystall beobachtet ist, bei welchem die Seitenkanten des Prismas abwechselnd positive und negative Polarität zeigen.

Beim Bergkrystall sind die drei Nebenaxen in Folge des Auftretens der trigonalen Trapezoeder hemimorph gebildet, indem das trigonale Trapezoeder, wie schon oben erwähnt, als die hemimorphe Bildung eines hexagonalen Trapezoeders aufzufassen ist. Eben solche trigonale Trapezoeder finden sich nach GROTH auch beim überjodsauren Natron, und durch sie wird also auch hier die hemimorphe Bildung der seitlichen Axen entstanden sein. Vom Bergkrystall weichen die Krystalle des überjodsauren Natrons dadurch ab, dass auch nach ihrer Hauptaxe eine hemimorphe Bildung auftritt, während eine solche beim vollkommen ausgebildeten Bergkrystall in dieser Richtung nicht zu beobachten ist.

Asparagin.

Das Asparagin findet sich in den Spargelkeimen und in vielen anderen Pflanzentheilen, die sich im Dunkeln entwickelt haben. Es wird gewöhnlich aus Wickenkeimen gewonnen, indem der durch Auspressen der Keime erhaltene Saft zur Entfernung des Eiweisses gekocht und die filtrirte Lösung sodann bis zur Zähflüssigkeit eingedampft wird. Aus dieser concentrirten Lösung scheiden sich die Krystalle des Asparagins beim Erkalten ab.

Die Krystalle gehören zum rhombischen System. Das Verhältniss der Brachydiagonale zur Makrodiagonale und zur vertikalen Axe ist

0,4737 : 1 : 0,8327. Die Krystalle bilden gewöhnlich vertikale Prismen ∞P mit den Endflächen $0P$. Ausser diesen Flächen treten auf zwei Brachydomen $\breve{P}\infty$ und $2\breve{P}\infty$ und das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$. Die rhombische Pyramide P erscheint nur als Tetraeder, und zwar finden sich die Flächen desselben, wenn die Brachydiagonale auf den Beschauer zugewendet ist, oben links vom brachydiagonalen Hauptschnitte (s. die Figur auf Tafel I). Die Krystalle sind also hemimorph, und zwar haben die hemimorphen Axen die Richtung von der Mitte einer Tetraederfläche zur gegenüberliegenden Spitze des Tetraeders, oder von der Mitte einer Prismenkante zu der Mitte der diametral gegenüberliegenden.

Thermoelektricität.

Die Krystalle wurden, wie gewöhnlich, bis auf die zu untersuchende Stelle in Kupferfeilicht eingehüllt, und bis gegen 60° im kupfernen Ofen erwärmt. Eine höhere Temperatur durfte nicht angewendet werden, weil sonst die Krystalle weisslich wurden und keine Elektricität mehr zeigten. Die meisten der von uns untersuchten Krystalle waren Bruchstücke, an denen gewöhnlich nur zwei benachbarte Prismenflächen nebst den ihnen angehörigen Tetraederflächen und die obere und untere Endfläche in grösserer oder geringerer Ausdehnung vorhanden waren, während die übrige Begrenzung von unregelmässigem Bruch gebildet wurde.

Um auch auf den nicht als Krystallflächen vorhandenen Stellen die ihnen entsprechende Elektricität genauer beobachten zu können, wurden an einigen Krystallen parallel mit den beiden vorhandenen Prismenflächen künstliche Flächen durch Anschneiden und nachheriges Schleifen hergestellt.

Durch Umkrystallisiren des käuflichen Asparagins hatten wir kleine stark glänzende Krystalle erhalten, von denen einige ringsum ziemlich gut ausgebildet waren und trotz ihrer Kleinheit bei der Prüfung hinreichend starke elektrische Spannungen zeigten. Beim Erkalten erschienen diejenigen von den Prismenflächen und den Endflächen gebildeten Kanten, auf denen Tetraederflächen $\frac{P}{2}$ lagen oder bei vollständiger Ausbildung liegen würden, positiv elektrisch, dagegen die vier anderen Kanten, welchen keine Tetraederflächen entsprachen, negativ. Dabei war die Stärke der positiven Spannungen

gewöhnlich grösser, als die der negativen, was möglicherweise eine Folge der Ausdehnung der Tetraederflächen ist.

Bei der Untersuchung der Prismenflächen waren an den unvollkommen ausgebildeten und zugeschnittenen Krystallen die von den nicht abgestumpften Kanten ausgehenden negativen Spannungen gewöhnlich weiter ausgedehnt, als die positiven, welche von den Tetraederflächen ausgingen. Auf den Endflächen wurde öfter schwache positive Spannung beobachtet, es muss aber dahingestellt bleiben, ob an den Enden der Hauptaxe in der That positive Elektricität auftritt, oder ob die daselbst beobachtete Spannung nur durch die stark positiven Spannungen der anliegenden Tetraederflächen hervorgerufen war.

Piëzoelektricität.

Beim Druck in der Richtung von den mit Tetraederflächen versehenen Kanten nach den diametral gegenüberliegenden, nicht abgestumpften, zeigt die Tetraederfläche positive, dagegen die gegenüberliegende, nicht mit Tetraederfläche versehene Kante negative Spannung. In der Richtung der vertikalen Axe, der Brachydiagonale und Makrodiagonale, sowie senkrecht gegen die Prismenflächen zeigten sich keine elektrischen Pole.

Chlorbaryum.

Die Krystalle des Chlorbaryums gehören zum rhombischen Systeme. Als Grundgestalt kann man die rhombische Pyramide betrachten, deren Kantenwinkel 132° 40′, 97° 9′ und 101° 25′ sind.

Die Krystalle sind meist tafelförmig. Nimmt man die grossen Flächen dieser Tafeln als parallel mit der Basis, so werden die Winkel von 132° 40′ die Winkel an den Randkanten, während die Winkel von 101° 25′ die Kantenwinkel im brachydiagonalen Hauptschnitte und die Winkel von 97° 9′ die Kantenwinkel im makrodiagonalen Hauptschnitte darstellen[1]). Die Verhältnisse der Brachydiagonale zur Makrodiagonale und zur verticalen Axe sind dann 0,9568 : 1 : 1,578.

Ausser der Grundpyramide P und den grossen Flächen $0P$ finden sich meistens noch Flächen einer zw [illegible] de $\frac{1}{2}P$, eines vertikalen

1) RAMMELSBERG wählt [illegible] ohisch-physikalischen Chemie« die obe [illegible] vertikalen Axe und die als vertikale [illegible]

Prismas ∞P und zwei makrodiagonale Prismen $\bar{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und zwei brachydiagonale Prismen $\breve{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$.

Die Krystalle des Chlorbaryums enthalten 2 Aequivalente Wasser; sie durften deshalb ohne Beschädigungen zu erleiden nur bis 54° C. erhitzt werden. Auch diese nicht grosse Temperaturerhöhung reichte schon hin, um im Elektrometer bei der grossen Empfindlichkeit desselben Ausschläge bis zu 9 Skalentheilen zu erzeugen.

Die bei der Abkühlung beobachtete elektrische Vertheilung ist sehr einfach. Die Mitten der grossen Flächen $0P$ zeigen starke positive Spannung (s. die Figur auf Tafel I); dieselbe nimmt von hier aus ab und bleibt in der Richtung der Makrodiagonale stets positiv, in der Richtung der Brachydiagonale geht sie aber in der Nähe der Enden derselben bereits in die negative über. An den Enden der Makrodiagonale erscheint ebenfalls starke positive Spannung, welche nach der Brachydiagonale hin gewöhnlich rasch abnimmt. An den Enden der Brachydiagonale liegen negative Pole, und diese negative Spannung nimmt nach der Makrodiagonale hin ebenfalls rasch ab.

Brombaryum.

Die Krystalle des Brombaryums ($BaBr_2 + 2H_2O$) gehören zum rhombischen Systeme. Rammelsberg wählt in seinem Handbuche der krystallographisch-physikalischen Chemie das Verhältniss der Brachydiagonale zur Makrodiagonale und zur vertikalen Axe = 0,3578 : 1 : 0,4348, und führt als beobachtete Gestalten an: P (o), $3\breve{P}3$ (o'), $\breve{P}\infty$ (q), $3\breve{P}\infty$ (q'), $\bar{P}\infty$ (r), $\infty\breve{P}2$ (p) und $\infty\breve{P}\infty$ (b)[1]. Ausserdem wurden von uns auch noch einige Male Flächen von $\infty\bar{P}\infty$ wahrgenommen.

Die Krystalle des Brombaryums werden für isomorph mit denen des entsprechend zusammengesetzten Chlorbaryums gehalten. Ein derartiger Isomorphismus scheint jedoch nicht zu bestehen; denn erstens ist der Unterschied in den Axenverhältnissen beider Salze bedeutend, und sodann weichen dieselben, wie sich zeigen wird, in ihrer ganzen Bildungsweise sehr von einander ab.

Eigenthümlich ist beim Brombaryum das Vorkommen von Kry-

1) Durch die in Klammern eingeschlossenen Buchstaben sind in den auf der Tafel I gezeichneten Figuren die betreffenden Flächen bezeichnet.

stallen, welche an den Enden der vertikalen Axe eine verschiedene Bildung zeigen. Nach RAMMELSBERG treten an dem einen Ende der genannten Axe die Flächen P und $3\breve{P}\infty$, an dem anderen dagegen die Flächen $3\breve{P}3$, $\breve{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ auf (s. Fig. 1 Taf. I). Fig. 2^a stellt die Projektion des oberen, Fig. 2^b die des unteren Endes dar.

Anderseits finden sich aber auch Krystalle, an welchen die beiden Enden der vertikalen Axe zwar gleichgestaltet sind, aber dabei eine andere Eigenthümlichkeit zeigen.

Es treten nämlich an jedem Ende dieselben Flächen auf, jedoch nicht vollzählig, wie es bei den Krystallen des rhombischen Systems sein müsste, sondern nur halbflächig, wie im monoklinen Systeme, und zwar erscheint der makrodiagonale Hauptschnitt der Krystalle als ein klinodiagonaler. Die Gestalten $P (o)$ und $3\breve{P}3 (o')$ treten (s. Fig. 3) also nur je mit vier zu einer Zone gehörigen Flächen auf, und entsprechend erscheint von den horizontalen Prismen $\breve{P}\infty (q)$ und $3\breve{P}\infty (q')$ nur eine Fläche, wie im monoklinen Systeme die schiefen Endflächen; und zwar liegt die Fläche $\breve{P}\infty$ auf der Seite, wo die Flächen $3\breve{P}3$ auftreten, während die Flächen $3\breve{P}\infty$ sich auf der Seite der Flächen P finden. Fig. 4 stellt die Projektion eines solchen Endes dar.

Übrigens sind durch die im Vorstehenden beschriebenen äusserlich sichtbaren Gestaltungen noch nicht sämmtliche Eigenthümlichkeiten der Bildungen der Krystalle des Brombaryums erschöpft. Aus den weiterhin von uns mitzutheilenden Ergebnissen der thermo- und piëzoelektrischen Untersuchung ergiebt sich unzweifelhaft, dass in den Krystallen der vorliegenden Substanz noch eine tetraedrische Bildung vorhanden ist, die sich in einer Hemimorphie nach den Richtungen, welche die Mitten von zwei parallelen Pyramidenflächen P verbinden, ausspricht. Die Krystalle des Brombaryums gleichen also darin denen des weinsauren Kali-Natrons (Seignettesalzes) und des Asparagins, bei welchen diese Bildung auch äusserlich durch das Auftreten von Abstumpfungen der abwechselnden Prismenkanten sich kundgiebt. Beim Brombaryum war jedoch äusserlich von einer solchen tetraedrischen Bildung nichts wahrzunehmen. Wie oben beschrieben, kommen entweder sämmtliche vier Flächen von P oder $3\breve{P}3$ an demselben Ende vor, oder es findet sich von jeder dieser Gestalten an jedem Ende ein Paar benachbarter Flächen.

Auch in der Grösse und dem Glanze der abwechselnden Pyramidenflächen trat kein Unterschied hervor. Beim weinsauren Kali-Natron kommen zuweilen gleichzeitig zwei Tetraeder (linkes) $\frac{P}{2}$ und (rechtes) $\frac{2\bar{P}2}{2}$ vor; dementsprechend hätte beim Brombaryum die Hemimorphie auch durch das Auftreten der beiden Tetraeder $\frac{P}{2}$ und $\frac{3\breve{P}3}{2}$ in verschiedener Stellung zur Erscheinung gelangen können; jedoch war von einem solchen Auftreten abwechselnder Flächen von P und $3\breve{P}3$ nichts zu entdecken.

Das Material für die elektrische Untersuchung stammte aus der chemischen Fabrik von Merck in Darmstadt. Sämmtliche Krystalle waren mehr oder weniger lange Prismen von geringer Dicke, welche bei ihrer Bildung mit dem einen Ende der vertikalen Axe (es möge kurz das untere Ende heissen) aufgesessen hatten. Das andere frei ausgebildete (obere) Ende zeigte die sämmtlichen oben (S. 19) aufgeführten Gestaltungen (Fig. 2[a], Fig. 2[b] und Fig. 4), wobei die Flächen der horizontalen Prismen $\breve{P}\infty$ und $3\breve{P}\infty$ stark an Grösse variirten. Die Mehrzahl der Krystalle zeigte an dem frei ausgebildeten Ende die Gestalt Fig. 4, etwas weniger zahlreich waren die Individuen, welche an dem freien Ende wie Fig. 2[b] gebildet waren, und nur einige Krystalle hatten am freien Ende die Gestaltung von Fig. 2[a]. In den allermeisten Fällen hatte die Anwachsungsstelle den ganzen Querschnitt des Krystalles eingenommen, sodass nach dem Abbrechen das untere Ende überall durch einen unregelmässigen Bruch begrenzt war.

Nur vier Krystalle fanden sich, bei welchen die Anwachsungsstelle eine so geringe Ausdehnung besass, dass sich neben ihr noch Reste von Pyramidenflächen hatten ausbilden können, welche auch nach dem Abbrechen noch am unteren Ende sichtbar blieben.

Diese aus der Fabrik von Merck stammenden Krystalle waren im Allgemeinen durchscheinend und nur an manchen Stellen durchsichtig.

Um Krystalle zu erhalten, welche an beiden Enden der vertikalen Axe vollkommen ausgebildet waren, wurde eine grössere Menge der in Vorstehendem beschriebenen Krystalle in Wasser aufgelöst und in einer Glasschale bei einer Temperatur von 20° C. zum Krystallisiren hingestellt. Die aus dieser Auflösung sich bildenden Krystalle

lagen mit einer prismatischen Seitenfläche $\infty\breve{P}2$ oder $\infty\breve{P}\infty$ auf dem Boden der Schale auf, waren vollständig klar und durchsichtig und an beiden Enden der vertikalen Axe mit Flächen von Pyramiden und horizontalen Prismen versehen.

Die Krystalle gehörten theils der oben S. 19 beschriebenen, in der Richtung der vertikalen Axe hemimorphen Form (Fig. 1, 2^a und 2^b), theils der monoklin-hemiëdrischen Form (Fig. 3 und 4) an.

I. Thermoelektricität.

Die Krystalle durften nur bis zu einer Temperatur von 54° C. erhitzt werden.

A. Krystalle, welche bei ihrem Wachsthum auf einer Seitenfläche aufgelegen hatten und an beiden Enden vollständig ausgebildet waren.

a. Krystalle von monoklin-hemiëdrischer Form.

Diese Krystalle besassen an beiden Enden der vertikalen Axe dieselbe Bildung und zwar trugen sie an jedem Ende (Fig. 3 und 4) zwei Flächen P und zwei Flächen $3\breve{P}3$ nebst je einer Fläche von $\breve{P}\infty$ und $3\breve{P}\infty$.

Prismenflächen. Zuerst wurden die Flächen des Prismas $\infty\breve{P}2$ auf ihr elektrisches Verhalten untersucht. Die Krystalle wurden dabei so weit in Kupferfeilicht eingehüllt, dass nur die zu prüfende Prismenfläche frei blieb. Die oberen Theile der Prismenflächen zeigen abwechselnd positive und negative, die unteren abwechselnd negative und positive Spannungen, so dass jede Prismenfläche oben und unten entgegengesetzte Polarität besitzt (s. Fig. 5, Taf. I). Derselbe Gegensatz findet auch zwischen je zwei diametral gegenüberliegenden von den Prismen- und Pyramidenflächen gebildeten Kanten statt. Stellen wir den Krystall so, dass die Brachydiagonale auf uns zu und die Makrodiagonale von links nach rechts gerichtet ist, so sind auf der uns zugewandten Seite die oberen Theile der von der Brachydiagonale links liegenden Fläche negativ, die unteren positiv, während auf der rechts liegenden Fläche die oberen Theile positive, die unteren negative Spannungen zeigen. Diese Spannungen nehmen von den Rändern der Prismenflächen nach der Mitte hin ab.

Die im Vorstehenden beschriebene Vertheilung der elektrischen

Polaritäten stimmt vollständig mit der auf den Krystallen des Seignettesalzes und des Asparagins beobachteten überein. Es ergiebt sich daraus eine analoge Anordnung der Atome dieser drei Substanzen

Nun treten aber bei den Krystallen des Seignettesalzes und Asparagins Abstumpfungen an den abwechselnden Endkanten des Prismas auf, welche einem Tetraeder entsprechen und auf eine hemimorphe Bildung in der Richtung der Verbindungslinie der Mittelpunkte je zweier paralleler Pyramidenflächen hinweisen. Eine ebensolche tetraedrische Bildung muss also auch im Innern der Krystalle des Brombaryums vorhanden sein, obgleich dieselbe, wie bereits erwähnt, bisher äusserlich nicht wahrgenommen worden ist. Das Fehlen der Tetraederflächen in der äusseren Begrenzung ist auch beim Seignettesalz der gewöhnliche Fall.

Übrigens ist die Hemimorphie der Krystalle des Brombaryums durch andere Ursachen hervorgerufen, als bei dem Seignettesalze und dem Asparagin. Bei dem ersteren beruht sie auf der Konstitution der Weinsäure und bei dem letzteren auf der hemimorphen Bildung seiner Moleküle; sie besteht daher auch nach der Zerstörung der Krystalle durch Auflösen in Wasser fort, wie dies aus der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes folgt. Beim Brombaryum entsteht die Hemimorphie aber erst bei der Bildung der Krystalle und verschwindet mit Auflösung derselben in Wasser.

Während die elektrischen Pole an den Kanten des Prismas kräftig auftraten, zeigte sich an den Enden der Makrodiagonale (auf den Flächen $\infty\breve{P}\infty$) und auf den an den Enden der Brachydiagonale liegenden vertikalen Kanten keine merkliche elektrische Spannung, sodass also in der Richtung dieser beiden Diagonalen keine elektrischen Axen liegen.

Pyramidenflächen. Wurden die Krystalle so weit in das Kupferfeilicht eingehüllt, dass nur eine Fläche der Pyramide P oder $3\breve{P}3$ frei blieb, so erschien in der Nähe der Prismenkante eine Polarität, welche mit der auf dem anliegenden Theile der Prismenfläche auftretenden gleichnamig war; dieselbe nahm nach dem Ende der vertikalen Axe bis zu Null ab.

Die Flächen der horizontalen Prismen $\breve{P}\infty$ und $3\breve{P}\infty$ zeigten in ihrer im makrodiagonalen Hauptschnitte liegenden Mittellinie keine elektrischen Spannungen; an ihren Rändern traten aber die den an-

liegenden Pyramidenflächen angehörigen Polaritäten in sehr geringer Stärke auf.

Wurde bei der Untersuchung gleichzeitig mit den Pyramidenflächen noch die anliegende Hälfte der zu ihnen gehörigen Prismenfläche von Kupferfeilicht unbedeckt gelassen, so fand sich das Maximum der elektrischen Spannung auf der von den Prismen- und Pyramidenflächen gebildeten Kante; von da an nahm die Stärke der Elektricität sowohl nach der Mitte der Prismenfläche, als auch nach dem Ende der vertikalen Axe hin ab.

Enden der vertikalen Axe. Da bei den jetzt in Betracht gezogenen Krystallen nach der Richtung der vertikalen Axe keine hemimorphe Bildung vorhanden ist, so war es wahrscheinlich, dass ebenso, wie an den Enden der Makro- und Brachydiagonale auch an den Enden der vertikalen Axe keine polare elektrische Axe sich finden würde; es hätte höchstens eine an beiden Enden gleichnamig elektrische Axe auftreten können. Die Prüfung ergab, dass die Enden der vertikalen Axe unelektrisch waren. Auf diesen nicht elektrischen Zustand wies auch schon die starke Abnahme der elektrischen Spannung auf allen Pyramidenflächen vom Rande der Prismenflächen nach den Enden der vertikalen Axe hin.

b. Nach der vertikalen Axe hemimorph gebildete Krystalle.

Diese zweite Gruppe besteht aus Krystallen, welche an ihren Enden die in Fig. 2^a und 2^b abgebildeten Formen besitzen; sie weichen also von den vorhergehenden wesentlich dadurch ab, dass nach der Richtung der vertikalen Axe eine hemimorphe Ausbildung stattgefunden hat.

Prismenflächen. Die Flächen des Prismas $\infty \breve{P} 2$ zeigten bei dieser Gruppe genau dasselbe Verhalten, wie bei der vorhergehenden. Es sind also auch in diesen nach der vertikalen Axe hemimorph gebildeten Krystallen die vier auf einer tetraedrischen Hemimorphie beruhenden polaren Axen auf den Kanten des Prismas vorhanden.

Pyramidenflächen. Die Pyramidenflächen verhielten sich etwas anders als bei den Krystallen der vorigen Gruppe. Die elektrische Spannung war zwar auf ihnen, ebenso wie bei den früheren, in der Nähe der Prismenkante am stärkste [illegible] it den in

Fig. 2^a dargestellten Flächen versehenen oberen Ende nahm dann auf den negativen Pyramidenflächen die Elektricität nach der Spitze hin bis zu Null ab (s. Taf. I, Fig. 6) oder ging auch schon in die positive über, während auf den positiven Pyramidenflächen die positive Spannung, wenn auch in etwas abnehmender Stärke, bestehen blieb.

Umgekehrt war das Verhalten der Pyramidenflächen an dem mit der Bildung Fig. 2^b versehenen (unteren) Ende. Auf ihnen blieb auf den negativen Flächen diese Polarität erhalten, während auf den zwischen ihnen liegenden die positive Spannung nach der Spitze hin bis zu Null abnahm, oder auch bereits in die negative überging.

Enden der vertikalen Axe. Die eben berichteten Resultate der auf den Pyramidenflächen ausgeführten Beobachtungen weisen schon auf ein anderes Verhalten der Enden der vertikalen Axe hin, als wie ein solches bei den Krystallen der vorhergehenden Gruppe beschrieben wurde. Das obere Ende der vertikalen Axe (Fig. 2^a) besitzt nämlich während des Erkaltens einen positiven, das untere (Fig. 2^b) dagegen einen negativen Pol. Eine solche polare Axe war ja auch bei der hemimorphen Ausbildung der beiden Enden der vertikalen Axe vorherzusehen.

Ist bei der Prüfung des oberen Endes noch ein kleiner Theil der in der Spitze zusammenstossenden Pyramidenkanten unbedeckt geblieben, so zeigen auch diese gleich der Spitze positive Spannung, wenn auch in geringerer Stärke. Bleiben bei der Untersuchung des unteren Endes die Flächen des horizontalen Prismas $\breve{P}\infty$, welche sich in einer mit der Brachydiagonale parallelen Kante schneiden, vom Kupferfeilicht frei, so besitzen auch die dieser Kante benachbarten Theile noch negative Spannung, jedoch in minderem Grade als die Kante selbst.

Bei dieser zweiten Gruppe von Krystallen tritt also zu den vier polarelektrischen Axen, welche die Mitten je zweier diametral gegenüberliegenden Prismenkanten verbinden, noch eine fünfte polarelektrische Axe in der Richtung der vertikalen Krystallaxe hinzu[1]).

---

1) Es ist eine eigenthümliche Erscheinung, dass an Krystallen des rhombischen Systems eine monoklin-hemiëdrische Bildung auftritt. Dieselbe kann in dem vorliegenden Falle ihre Erklärung finden.

Die Krystalle des Brombaryums sind rhombisch und hemimorph nach der vertikalen Axe. Am oberen Ende finden sich, wie zuvor beschrieben, vier Flächen

B. Krystalle, welche bei ihrem Wachsthum mit dem einen Ende der vertikalen Axe aufgesessen hatten.

Die aus der Fabrik von Merck in Darmstadt stammenden Krystalle zeigten sämmtlich die eben angegebene Art des Wachsthums. Ihrer Form nach gehörten sie, wie schon oben S. 19 erwähnt, theils der monoklin-hemiëdrischen, theils der nach der vertikalen Axe hemimorphen Bildung an. Sie glichen in ihrer elektrischen Vertheilung den vorher unter *A*, a. und *A*, b. beschriebenen. Die vier einer tetraedrischen Bildung entsprechenden polaren Axen, welche zwei diametral gegenüberliegende Prismenkanten verbinden, traten sehr stark hervor. Die monoklin-hemiëdrischen Krystalle besassen an den Enden der vertikalen Axe keine Polarität; bei den hemimorph gebildeten dagegen zeigte das der Fig. 2^a entsprechende Ende beim Erkalten positive, das der Fig. 2^b entsprechende negative Spannung.

Es wäre eine besondere Hervorhebung der Beobachtungen an diesen Krystallen nicht nothwendig gewesen, wenn sich nicht bei der piëzoelektrischen Prüfung, wie wir später darlegen werden, an den hemimorph gebildeten Krystallen zwischen ihnen und der Gruppe *A*, b. wesentliche Unterschiede herausgestellt hätten.

---

der Pyramide *P* und zwei Flächen des Brachydomas $3\breve{P}\infty$. Am unteren Ende liegen vier Flächen der Pyramide $3\breve{P}3$ und zwei Flächen des Brachydomas $\breve{P}\infty$

Schneiden wir nun einen solchen hemimorphen Krystall in dem brachydiagonalen Hauptschnitte durch und drehen die eine Hälfte um die Makrodiagonale als Axe um 180°, so entsteht ein monoklin-hemiëdrischer Krystall, wie solcher beim Brombaryum vorkommt. Sowohl am oberen als auch am unteren Ende der vertikalen Axe liegen jetzt zwei Flächen *P* und zwei Flächen $3\breve{P}3$ nebst einer Fläche $3\breve{P}\infty$ und $\breve{P}\infty$, und zwar gerade in der Weise, wie es die monokline Hemiëdrie verlangt. Durch eine solche Zwillingsbildung verschwindet dann die Hemimorphie nach der vertikalen Axe und damit auch die an den Enden dieser Gruppe auftretende Polarität. Dagegen wird durch dieselbe die aus der tetraedrischen Bildung herrührende Hemimorphie nicht geändert; die Enden der vier tetraedrischen Axen bleiben fortwährend entgegengesetzt elektrisch.

Denken wir uns nun die Moleküle des Brombaryums in den monoklin-hemiëdrischen Krystallen aus solchen Zwillingen bestehend, so ist damit die Krystallform und das elektrische Verhalten derselben vollständig erklärt.

II. Piëzoelektricität.

Die Feststellung der piëzoelektrischen Vorgänge an den Krystallen des Brombaryums war mit besonderen Schwierigkeiten verbunden; die säulenförmigen Krystalle isolirten nämlich bei gewöhnlicher Temperatur nicht hinlänglich und mussten deshalb in erwärmtem Zustande zu den Versuchen verwendet werden.

Diese Krystalle wurden daher vor ihrer Untersuchung längere Zeit in einem kleinen Ofen bis 54° erwärmt, und dann auf den oberen Boden eines kupfernen Cylinders, der mit Wasser von der eben angegebenen Temperatur gefüllt war und in der Druckvorrichtung als Untersatz diente, mit dem einen Ende gestellt. Auf das nach aufwärts gerichtete Ende des Krystalles legte sich die an dem Hebelarm isolirt befestigte und mit dem Goldblättchen des Elektrometers leitend verbundene Zinnplatte auf. Der Druck variirte je nach der Beschaffenheit der Krystalle von 200 bis 400 Gramm. Um auch selbst bei schwachem Drucke hinreichend grosse Ausschläge im Elektrometer zu erhalten, wurde dem letzteren die auch für die Thermoelektricität nothwendige hohe Empfindlichkeit gelassen.

Die thermoelektrischen Versuche haben ergeben, dass in der Richtung der Verbindungslinie zweier diametral gegenüberliegenden Prismenkanten eine Hemimorphie vorhanden ist, welche auf eine tetraedrische Bildung hinweist. Es stand daher zu erwarten, dass bei dem Drucke nach dieser Richtung auch eine piëzoelektrische Erregung stattfinden würde. Da die dieser Hemimorphie entsprechenden thermoelektrischen Pole bei allen Krystallen des Brombaryums, welches auch sonst ihre Bildung sein mochte, in vollkommen bestimmter Weise hervortraten, so war vorauszusehen, dass auch bei sämmtlichen Krystallen beim Druck in den angegebenen Richtungen eine piëzoelektrische Erregung stattfinden würde. In der That entsprachen die Versuche der Voraussicht, und zwar stimmte die durch den Druck erzeugte Elektricität in ihrer Polarität mit der bei der Abkühlung auftretenden stets überein.

Da die längeren säulenförmigen Krystalle für solchen Druck ungeeignet waren, so wurde mittelst Anschleifens zweier ebenen gegen die vertikale Axe senkrechten Flächen ein Prisma von solcher Länge hergestellt, dass zwei diametral gegenüberliegende

Prismenkanten sich bequem als Stütz- und Druckpunkte einstellen liessen.

Während bei sämmtlichen Krystallen die piëzoelektrischen Erregungen durch Druck in den eben genannten Richtungen übereinstimmten, zeigten sich beim Druck in der Richtung der vertikalen Axe Unterschiede, welche es erfordern, die oben behandelten Gruppen besonders zu besprechen.

a. Krystalle von monoklin-hemiëdrischer Bildung.

(S. Fig. 3 und 4.)

Alle diese Krystalle zeigten an den Enden der vertikalen Axe bei Temperaturänderungen keine Polarität; ebensowenig trat aber auch beim Druck in der Richtung der vertikalen Axe eine elektrische Spannung auf; es genügte jedoch eine geringe Schiefstellung der Axe, um eine Polarität hervorzurufen, und zwar entsprach dieselbe stets derjenigen, welche den Prismenkanten, denen die Druckrichtung genähert war, zukam.

b. Krystalle mit hemimorpher Bildung in der Richtung der Hauptaxe.

α. Krystalle, welche bei ihrer Bildung mit einer Seitenfläche aufgelegen hatten. Bei diesen Krystallen zeigte bei der Abkühlung das mit der Bildung 2a versehene Ende positive, das mit der Bildung 2b versehene negative Spannung. Ebenso erzeugte der Druck nach der Richtung der vertikalen Axe an dem mit der Bildung 2a versehenen Ende positive, an dem mit der Bildung 2b versehenen negative Polarität. Es stimmten also auch hier, ebenso wie bei den vorher angegebenen vier hemimorphen Axen die beim Erkalten und beim Druck erzeugten Elektricitäten überein.

β. Krystalle, welche bei ihrer Bildung an dem einen Ende der vertikalen Axe aufgesessen hatten. Anders verhielten sich aber die ebengenannten Krystalle. Bei ihnen gab stets, sie mochten mit dem Fig. 2^a oder Fig. 2^b entsprechendem Ende angewachsen sein, beim Druck das frei ausgebildete Ende positive, das angewachsen gewesene dagegen negative Spannung. Während also bei den vorhergehenden Krystallen die Polaritäten beim Erkalten und beim Druck dieselben waren, trat bei diesen Krystallen

ein Gegensatz hervor. Die beim Erkalten positiven Enden zeigten beim Druck negative Elektricität und die beim Erkalten negativen Enden beim Druck positive Spannung, wenn die Krystalle mit dem Ende Fig. 2a angewachsen gewesen waren; dagegen stimmten bei den mit dem Ende 2b angewachsenen die Polaritäten beim Erkalten mit denen beim Druck wieder überein.

Die Elektricität beim Druck scheint also bei diesen Krystallen in anderer Weise hervorgerufen zu werden, als bei den zuvor unter b, α. beschriebenen. Die Ursache dieses Unterschiedes dürfte allein in der Richtung des Wachsthums zu suchen sein.

Unterschwefelsaurer Baryt.

Der unterschwefelsaure Baryt krystallisirt mit 2 und 4 Aequivalenten Wasser. Die Krystalle der letzteren Verbindung, welche sich bei einer Temperatur von 5° C. bilden, sind nicht luftbeständig und eignen sich in Folge dessen nicht zu einer thermoelektrischen Untersuchung. Die Krystalle mit nur 2 Aequivalenten Wasser dagegen halten sich an der Luft sehr gut. Sie sind aber sehr empfindlich gegen plötzliche geringe Temperaturveränderungen, so dass schon ein vorsichtig zwischen die Finger genommener Krystall mitunter mit einer Art von Explosion zersprang. Bei der Untersuchung auf das thermoelektrische Verhalten durften deshalb die Krystalle nur langsam höchstens bis 40° C. erwärmt werden. Diese geringe Erwärmung hatte freilich zur Folge, dass bei der späteren Abkühlung nur eine schwache Elektricitätsentwickelung eintrat; indess reichte dieselbe hin, Ausschläge selbst bis zu 8 Skalentheilen an dem Elektrometer hervorzubringen, wenn die Empfindlichkeit desselben so gross war, dass die Spannung eines Elementes Zink-Kupfer-Wasser, dessen einer Pol zur Erde abgeleitet war, einen Ausschlag von 60 Skalentheilen erzeugte. Die Krystalle des Salzes mit nur 2 Aequivalenten Wasser gehören zum monoklinen Systeme. Rammelsberg giebt in seinem »Handbuch der krystallographisch-physikalischen Chemie« das Verhältniss der Klinodiagonale zur Orthodiagonale und zur vertikalen Axe = 0,9338 : 1 : 1,313 und den spitzen Winkel zwischen der Klinodiagonale und der vertikalen Axe = 88° 50′. Das Salz krystallisirt sehr leicht und bildet oft grosse Individuen.

Die bei einer Temperatur von 15 bis 20° C. entstehenden Krystalle sind meistens niedrige Tafeln, an welchen die breiten Flächen durch die Flächen $0P$, also durch die mit der Basis parallel gehenden schiefen Endflächen gebildet werden. An den Enden der Klinodiagonale sind je nach der Dicke der Tafeln mehr oder weniger grosse Flächen $\infty P \infty$ vorhanden, während an den Enden der Orthodiagonale Pyramidenflächen und Flächen vom klinodiagonalen Prisma liegen. An vielen Krystallen treten an den Enden der Orthodiagonale mehr oder weniger grosse Flächen $\infty P \infty$ auf, die bisweilen eine solche Ausdehnung erhalten, dass die Pyramidenflächen fast ganz verdrängt werden. Die Krystalle zeigen einen sehr deutlich mit $\infty P \infty$ parallelen Durchgang, der ihre richtige Auffassung gewöhnlich sehr erleichtert.

Fig. 1 Taf. I stellt einen derartigen Krystall in der Richtung senkrecht gegen die Fläche $0P$ gesehen dar.

Das Salz wurde zuerst von Heeren dargestellt, welcher an den Krystallen desselben bereits besondere Eigenthümlichkeiten beobachtete, so dass er zwei Gattungen derselben unterschied. Die Krystalle der ersten Gattung gleichen dem in Fig. 1 dargestellten.

Als zweite Gattung bezeichnete er dann Krystalle mit mehr oder weniger gekrümmten Flächen. Sie hatten die gleiche chemische Zusammensetzung, wie die der ersten Gattung.

V. v. Lang, welcher später[1]) die Krystalle des unterschwefelsauren Baryt einer sehr ausführlichen Messung unterwarf, wurde durch v. Hauer, welcher ihm die Krystalle übergeben hatte, auf eine eigenthümliche Bildung derselben aufmerksam gemacht.

Während nämlich meistens die Ausdehnung nach der Orthodiagonale überwiegt, zeigten sich diese besonderen Krystalle in der Richtung der Klinodiagonale mehr verlängert. Dagegen waren nach der Orthodiagonale hin mehr oder weniger ausgedehnte Fortsätze angewachsen. Einer Krümmung der an diesen Krystallen vorhandenen Flächen gedenkt v. Lang nicht.

Ausser den vorstehend erwähnten Krystallformen erhielten wir bei einer Krystallisation, welche in einem unterirdischen Raume (Temperatur 10 bis 12° C.) stattgefunden hatte, noch eine andere Modification. Die Figuren 2a und 2b stellen die beiden Ansichten

1) Wien. Ak.-Ber. 45.

eines solchen Krystalles, senkrecht gegen die Flächen $0P$ gesehen, dar. Man erkennt zunächst einen Krystall der gewöhnlichen Form, an welchem die Flächen $0P$ (c und c') und $\infty P\infty$ (a und a') sowie Flächen eines vertikalen Prismas $\infty P\frac{3}{2}$ (die Flächen p) auftreten. In der Zeichnung sind diese letzteren Flächen nur durch ihren Durchschnitt mit den Flächen c und c' angegeben. An die Flächen c und c' setzen sich nun rechts und links in der Richtung der Orthodiagonale Verlängerungen an, welche durch gekrümmte Flächen klinodiagonaler Prismen q und der Pyramiden o gebildet werden.

Von den gekrümmten Prismenflächen q aus verbreiten sich nun die gekrümmten Pyramidenflächen o vorzugsweise nach der Richtung hin, auf welcher auf derselben Seite der stumpfe Winkel zwischen $0P$ und $\infty P\infty$ liegt, also nach der Kante von a und c hin.

Betrachten wir die Ansicht des Krystalles Fig. 2[a] Taf. I von oben, so ziehen sich die beiden vertikalen Prismenflächen p, p nach abwärts bis zur unteren Kante, an welcher der spitze Winkel zwischen c' und a liegt. Der obere Theil dieser Flächen p und die Fläche a ragen also hervor. Das Weiterwachsen der gekrümmten Pyramidenflächen wird, wenn sie den Boden der Krystallisirschale erreicht haben, also an der von a und c' gebildeten unteren Kante angekommen sind, durch den Boden der Schale verhindert.

Auf der unteren Seite, welche beim Wachsthum auf dem Boden aufgelegen hat, wachsen nun gleichfalls gekrümmte Pyramidenflächen vorzugsweise nach der Seite hin, auf welcher der stumpfe Winkel $a'c'$ liegt, und gehen ebenso wie auf der oberen Seite über die Prismenflächen p, p nach aufwärts (die Fläche c' unten liegend gedacht). Da sich der Weiterbildung der Pyramidenflächen in der Salzlösung kein Widerstand entgegenstellt, so wachsen sie über die Kanten von a' und c hinaus. Auf diese Weise bildet sich dann ein Theil, welcher über a' hinaus bogenförmig gekrümmt verläuft. Diese bogenförmige Verlängerung trägt dann bei manchen Krystallen am äussersten Rande wieder schmale Flächen von $\infty P\infty$.

Die auf den bei gewöhnlicher Temperatur gebildeten Krystallen erscheinende Elektricitätsvertheilung ist sehr einfach. Beim Erkalten tritt in der Mitte der grossen Flächen $0P$ positive Elektricität auf, welche nach den Flächen $\infty P\infty$ hin an Stärke abnimmt, ohne jedoch das Vorzeichen zu ändern. Eine ebensolche Abnahme tritt nach den

Enden der Orthodiagonale hin ein, aber beim weiteren Annähern an die Enden der Orthodiagonale geht die positive Polarität in negative über. Auf den Flächen $\infty P\infty$ zeigt die Mitte stark positive Elektricität, welche nach rechts und links hin an Stärke abnimmt, während in der Nähe der von den Pyramidenflächen gebildeten Kanten öfter bereits negative Elektricität auftritt.

Die Enden der Orthodiagonale zeigen negative Spannung, welche sich über die anliegenden Flächen der Pyramiden und klinodiagonalen Prismen sowie über die anliegenden Theile der Flächen $0P$ ausdehnt. Es liegen also an den Krystallen des unterschwefelsauren Baryts beim Erkalten die positiven Pole an den Enden der vertikalen Axe und der Klinodiagonale, während die negativen sich an den Enden der Orthodiagonale finden.

Mit der elektrischen Vertheilung auf den gewöhnlichen Krystallen stimmt nun auch die Vertheilung auf den in den Figuren 2^a und 2^b dargestellten Krystallen mit gekrümmten Flächen im Allgemeinen überein. Eine Änderung tritt nur bisweilen an den auf der oberen Seite bogenförmig verlaufenden Fortsätzen, welche durch die Durchschnitte der von unten kommenden Pyramidenflächen mit der oberen Endfläche c gebildet werden, insofern ein, als die negative Elektricität der Pyramidenflächen sich über den ganzen jenseits a' verlaufenden Rand des Bogens ausdehnt. Öfter aber geht diese negative Elektricität nicht ganz bis zur Mitte des Bogens, welche dann wieder positiv erscheint. Namentlich ist dies der Fall, wenn an dem jenseits a' gelegenen Rande wieder kleine Flächen $\infty P\infty$ auftreten.

Unterschwefelsaurer Strontian.

Die Krystalle des unterschwefelsauren Strontians, welche 4 Atome Wasser enthalten, gehören zum hexagonalen Systeme. Das Verhältniss der Nebenaxe zur Hauptaxe ist 1 : 1,5024. RAMMELSBERG führt in seinem Handbuch der krystallographisch-physikalischen Chemie nur die bereits von HEEREN[1]) beobachteten Gestalten der Grundpyramide P und die beiden Endflächen $0P$ an. An den sehr zahlreichen von uns untersuchten Krystallen fanden wir ausserdem öfter die Flächen

1) HEEREN, Pogg. Ann. Bd. 7, S. 177.

der nächst stumpferen Pyramide $\frac{1}{2}P$, sowie des vertikalen Prismas ∞P und eines trigonalen Trapezoeders[1]). Die Krystalle des unterschwefelsauren Strontians drehen die Polarisationsebene des Lichtes und zwar kommen nach Pape[2]) sowohl rechts- als linksdrehende Krystalle vor. Diese Drehung der Polarisationsebene weist ebenso, wie beim Bergkrystalle auf eine hemiëdrische Bildung hin, in welcher sich eine Drehung ausspricht, also auf eine Hemiëdrie nach den abwechselnden Flächen der zwölfseitigen Pyramide. Diese Hemiëdrie führt zur Bildung von hexagonalen Trapezoedern. Nun weisen aber die von uns später mitgetheilten Untersuchungen über das elektrische Verhalten der Krystalle auf einen Hemimorphismus nach den Nebenaxen hin, wodurch das hexagonale Trapezoeder in ein trigonales übergeht. Die Krystallgestalten sind also ähnlich zu deuten, wie beim Bergkrystall in Bd. XX dieser Abhandlungen S. 473 angegeben ist.

Thermoelektricität.

Die eben erwähnte Analogie zwischen den Krystallformen des unterschwefelsauren Strontians und des Bergkrystalls machte es wahrscheinlich, dass auch die elektrischen Verhältnisse beider einander entsprechen würden. Dem bestimmten Nachweise des elektrischen Verhaltens des unterschwefelsauren Strontians stellten sich aber beträchtliche Schwierigkeiten durch den Umstand entgegen, dass die meisten Krystalle dieses Salzes Zwillingsverwachsungen enthielten. Dieselben waren zum grossen Theile schon äusserlich erkennbar, bisweilen aber war das Aussehen dieser Krystalle derartig, dass sie sich nicht von einfachen Individuen unterscheiden liessen. Erst durch Prüfung einer grossen Anzahl derselben gelang es, einige ringsum ausgebildete fast ganz einfache Individuen aufzufinden.

Die Krystalle des unterschwefelsauren Strontians zeigten, obwohl sie nur bis 53° erhitzt werden durften, doch eine ziemlich starke elektrische Erregung, so dass das Goldblättchen eines empfindlichen Elektrometers bisweilen sogar aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes hinausgetrieben wurde.

---

1) Baumhauer konnte durch Ätzversuche eine trapezoedrische Bildung nicht nachweisen (Groth, Zeitschrift für Krystallogr. Bd. I, S. 54).

2) Pape, Pogg. Ann. Bd. 139.

Bevor wir auf die speciellen Beobachtungen an einzelnen Krystallen eingehen, möge hier das thermoelektrische Verhalten einfacher Krystalle im Allgemeinen dargestellt werden.

Das Auftreten von trigonalen Trapezoedern weist auf eine Hemimorphie nach den Nebenaxen hin. Dieselbe wird auch durch das thermoelektrische Verhalten der Krystalle bestätigt, indem die beiden Enden einer jeden Nebenaxe entgegengesetzte Polaritäten zeigen. An den sechs Ecken der Basis wechseln also positive und negative Spannungen ab. Die elektrische Vertheilung entspricht demnach der beim Bergkrystall beobachteten. In der Richtung der Hauptaxe war keine Elektricität wahrzunehmen. Beim Bergkrystall zeigten die mit trigonalen Trapezoedern versehenen Seitenkanten bei der Abkühlung positive Spannungen, dagegen erschienen die mit diesen Gestalten versehenen Ecken der Basis bei den Krystallen des unterschwefelsauren Strontians während der Abkühlung negativ.

Krystall Nr. 1.

Die Länge der Nebenaxen des Krystalls Nr. 1 betrug ungefähr 11 mm. Die Dicke in der Mitte, das heisst der Abstand der beiden Flächen $0P$ von einander, erreichte dagegen kaum 1,5 mm.

Von Krystallflächen waren vorhanden die Flächen der beiden Pyramiden P und $\frac{1}{2}P$, sowie die Endflächen $0P$.

Fig. 1 Taf. II stellt die Basis dieses Krystalles in dreifacher Vergrösserung dar. Die durch den Durchschnitt der Pyramidenflächen P gebildeten Randkanten mögen der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, . . . bis 6 und die von je zwei derselben gebildeten Randecken (die Enden der Nebenaxen) mit den Zahlen der in ihnen zusammenstossenden Randkanten bezeichnet werden.

Bei der Untersuchung der Ecken wurde der Krystall so in Kupferfeilicht eingehüllt, dass ausser der zu untersuchenden Ecke noch kleine Theile der anliegenden Randkanten aus dem Feilicht hervorragten. Die Ecken selbst zeigten nun, wie schon oben angegeben, der Reihe nach abwechselnd positive und negative Spannungen (s. Fig. 1ᵃ), und zwar wurden die Ecken (1, 2), (3, 4) und (5, 6) beim Erkalten positiv, dagegen die drei übrigen Ecken (2, 3), (4, 5) und (6, 1) negativ elektrisch. Bei Prüfung [illegible] genden Theile der Randkanten erschien auf beiden Seiten [illegible] . 2)

und (3, 4) ebenfalls positive und neben den Ecken (4, 5) und (6, 1) negative Polarität; dagegen war neben der Ecke (2, 3) nur das zu 2 gehörige Stück negativ, das zu 3 gehörige aber positiv, und entsprechend an der Ecke (5, 6) nur das zu 5 gehörige Stück negativ, während das zu 6 gehörige positive Spannung zeigte. Diese Erscheinung weist darauf hin, dass an den betreffenden Stellen ein kleines Zwillingsstück liegt, welches, da die beiden Ecken (2, 3) und (5, 6) einander diametral gegenüber liegen, den Krystall ganz zu durchsetzen scheint. Die auf den vier Ecken (1, 2), (3, 4), (4, 5) und (6, 1) beobachteten Spannungen sind selbstverständlich grösser, als die neben ihnen auf den Randkanten beobachteten. Wenn an der Ecke (1, 2) eine geringere positive Spannung beobachtet wurde, als daneben auf den Randkanten, so erklärt sich dies durch den Umstand, dass an dieser Ecke auf der einen Seite ein kleiner fremder Krystall eingewachsen war, von welchem gerade neben der Ecke (1, 2) eine negative Ecke hervorragte. Durch Annäherung des Platindrahtes an diese kleine Ecke wurde die negative Beschaffenheit derselben nachgewiesen. Durch den Einfluss dieser negativen Elektricität musste selbstverständlich die Vertheilungswirkung der positiven Elektricität der Ecke (1, 2) geschwächt werden. Hätte der kleine Krystall entfernt werden können[1]), so würde die Spannung der Ecke (1, 2) grösser gewesen sein, als die der anliegenden Randkanten. Damit stimmen auch die späterhin mitzutheilenden Versuche über die Piëzoelektricität überein.

Es wurden dann an diesem Krystall die Randkanten noch speciell untersucht (s. Fig. 1^b). Dabei stand der Krystall so im Kupferfeilicht, dass nur eine Randkante hervorragte. Leider sprang bei diesen Versuchen ein an der Randkante 5 gelegenes Stück des Krystalles ab, so dass an Stelle der Randkante 5 nur der in der Fig. 1^b durch eine punktirte Linie dargestellte Bruch untersucht werden konnte.

Krystall Nr. 2.

Der Krystall Nr. 1 trug keine trigonalen Trapezoederflächen. Durch die an ihm gemachten Beobachtungen liess sich also nicht er-

1) Es schien unthunlich den kleinen Krystall herauszubrechen wegen der Gefahr, den ganzen Krystall zu zersprengen.

mitteln, welche Polarität den mit Trapezoederflächen versehenen Ecken angehört. Zu dieser Bestimmung sollen nun die am Krystall Nr. 2 gemachten Beobachtungen dienen. Der Krystall war leider, wie aus der Fig. 2ª Taf. I ersichtlich ist, nur ein Bruchstück, erwies sich aber als ein einfaches Individuum. An der Ecke (1, 2) lag eine grössere und an der Ecke (3, 4) eine kleinere Fläche des trigonalen Trapezoeders. Diese beiden Ecken zeigten nun beim Erkalten negative Spannung, ebenso die Ecke, welche die Randkante 5 mit dem Bruche bildete, während die Ecken (2, 3) und (4, 5) positiv waren. Die neben den Ecken liegenden Theile der Randkanten zeigten gleichnamige Elektricität mit den Ecken, selbstverständlich aber in geringerer Stärke. Die auf dem Bruche, welcher ungefähr die Stelle der Fläche 6 vertrat, beobachteten Spannungen sind in die Fig. 2ª eingetragen. Die Trapezoederflächen tragenden Enden der Nebenaxen zeigen also beim unterschwefelsauren Strontian, wie schon oben bemerkt, die entgegengesetzte Polarität, wie die beim Bergkrystall mit denselben Flächen versehenen.

Krystall Nr. 3.

Der Krystall Nr. 3, dessen Basis in Fig. 3ª Taf. II in doppelter Grösse dargestellt wird, ist ziemlich regelmässig ausgebildet. Er trug nur die Flächen *P* und 0*P*. Die thermoelektrische Untersuchung zeigte, dass er noch ziemlich einfach war. Die abwechselnden Ecken (1, 2), (3, 4) und (5, 6) waren positiv und ebenso ihre Umgebungen, die Ecke (2, 3) mit den anliegenden Theilen der Randkanten war negativ. Dagegen trat an der Ecke (6, 1) die negative Spannung nur auf der Ecke selbst und auf dem anliegenden Theile der Randkante 6 hervor, während auf dem anliegenden Theile der Randkante 1 positive Elektricität beobachtet wurde. An der Ecke (4, 5) war bereits die Ecke und das anliegende Stück der Randkante 4 positiv und die negative Elektricität kam nur auf dem anliegenden Stück der Randkante 5 zur Geltung.

Als Beispiele für die elektrischen Vorgänge an Krystallen, welche sehr mannigfache Zwillingsbildungen besitzen, mögen die Beobachtungen an den drei folgenden Krystallen dienen.

Krystall Nr. 4.

Der Krystall Nr. 4 trug die Flächen P, $\frac{1}{2}P$ und $0P$. Seine Basis ist in Fig. 4ᵃ Taf. II in doppelter Grösse abgebildet. Er scheint, wie aus den in die Figur eingetragenen Beobachtungen hervorgeht, nur an der Ecke (3, 4) einfach zu sein, während an allen übrigen Ecken mehr oder weniger Zwillingsbildungen sich bemerklich machen.

Krystall Nr. 5.

Der Krystall maass in seinen Nebenaxen ungefähr 9 mm, während seine Dicke nahezu 1 mm betrug. Von Krystallflächen waren nur die Pyramidenflächen P und die beiden Flächen $0P$ vorhanden. Seine Basis ist in Fig. 5^a und 5^b in dreifacher Vergrösserung dargestellt.

In Fig. 5^a sind die auf den Ecken und den anliegenden Theilen der Randkanten gemachten Beobachtungen eingetragen. Betrachtet man nur die auf den Ecken selbst auftretenden Polaritäten, so wechseln auf den aufeinanderfolgenden Ecken regelmässig positive und negative Spannungen ab, womit auch das piëzoelektrische Verhalten der Ecken selbst, wie wir später sehen werden, übereinstimmt. Dagegen weisen bereits die auf den an den Ecken anliegenden Theilen der Randkanten ausgeführten Messungen auf mehrere eingeschobene Zwillingsstücke hin; denn nur an den Ecken (3, 4) und (5, 6) zeigten die Stücke der beiden anliegenden Randkanten dieselbe Polarität wie die Ecken, wogegen an den übrigen vier Ecken auf dem anliegenden Stück der einen Randkante bereits entgegengesetzte Elektricität auftrat. Der Krystall wurde dann noch so untersucht, dass nur die einzelnen Randkanten aus dem Kupferfeilicht hervorragten. Dabei waren also die den Ecken selbst zukommenden Polaritäten mehr oder weniger abgeleitet.

In Figur 5^b sind nun die bei dieser Einhüllung auf den verschiedenen Punkten der Kanten beobachteten Spannungen eingetragen. Es treten hierbei in Folge der veränderten Ableitung grosse Verschiedenheiten der Polaritäten selbst an den an die Ecken angrenzenden Theilen der Randkanten gegen die zuvor bei Beobachtung der Ecken an eben diesen Stellen gefundenen Polaritäten hervor. Bemerkt sei hierbei noch, dass ein Stück der Randkante 4 und die ganze

Randkante 5 und auch ein Theil der Randkante 6 vor der Untersuchung der Randkanten abgesprungen war, so dass an Stelle der Randkante 5 nur der dort sich findende Bruch (in Fig. 6[b] punktirt gezeichnet) geprüft werden konnte.

Krystall Nr. 6.

Der Krystall Nr. 6 enthielt, wie die thermoelektrische und später auch die piëzoelektrische Untersuchung zeigte, noch zahlreichere Zwillingsbildungen als der vorhergehende. Seine Basis ist in Fig. 6[a] Taf. II in doppelter Vergrösserung dargestellt und es sind in dieser Zeichnung die an den Ecken und den ihnen anliegenden Theilen der Randkanten beobachteten Polaritäten eingetragen. Alle sechs Ecken zeigten positive Spannung, bei zweien (4, 5) und (5, 6) waren die anliegenden Theile der Randkanten gleichfalls positiv, bei den übrigen vier Ecken trat auf einer oder auf beiden Seiten unmittelbar neben den Ecken bereits negative Spannung auf.

Der Krystall wurde hierauf noch so untersucht, dass nur die Randkanten aus dem Kupferfeilicht hervorragten. Die hierbei beobachteten Polaritäten sind in Fig. 6[b] eingetragen.

Unmittelbar neben den Ecken fand sich auf sämmtlichen Randkanten positive Spannung, die auf der Randkante 5 sich sogar über deren ganze Länge erstreckte, während auf den übrigen Randkanten ein negatives Stück hervortrat, das, wie aus der Figur ersichtlich ist, an verschiedenen Stellen gelegen war.

Piezoelektricität.

Die Beschaffenheit der Krystalle des unterschwefelsauren Strontians gestattete nicht, starken Druck anzuwenden. Ein solcher war auch nicht erforderlich, da selbst bei geringem Druck (30 bis 100 g) starke Ausschläge am Elektrometer beobachtet wurden. Dagegen boten die schon früher erwähnten mannigfachen Zwillingsbildungen oft Schwierigkeiten dar. Dazu kam noch der Umstand, dass die sechs Randkanten meistens von ungleicher Länge waren und auch wegen der verschiedenen Grösse der Pyramidenflächen auf beiden Seiten nicht genau in einer [illegible] Einstellen der Ecken wurde [illegible] dabei [illegible] le Druck- richtung den [illegible] zwei [illegible] ssenden

Randkanten halbirten und die Flächen $0P$ vertikal standen. Dabei lag an Krystallen mit ungleichen Randkanten die auf dem unteren Metall stehende Ecke nicht völlig genau vertikal unter der oberen Ecke. Bei einfachen Krystallen hatte eine geringe Abweichung der betreffenden Nebenaxe von der vertikalen Stellung höchstens den Einfluss, dass die Stärke der in der vertikalen Stellung beobachteten Elektricität etwas abnahm, aber das Vorzeichen sich nicht änderte.

Dagegen traten an zusammengesetzten Krystallen schon bei sehr geringen Abweichungen von der vertikalen Stellung der Nebenaxe sehr oft verschiedene Polaritäten auf, so dass es vorkam, dass bei Wiederholung der Prüfung ein und derselben Ecke, bei nach dem Augenschein möglichst vertikaler Stellung, entgegengesetzte Elektricitäten beobachtet wurden; diese auffallende Umkehrung fand, wie speciell angestellte Versuche mit Bestimmtheit nachwiesen, ihre Erklärung in ausserordentlich geringen Abweichungen in der Stellung der Nebenaxe bei den betreffenden Versuchen.

In Bezug auf ihr piëzoelektrisches Verhalten haben wir die Krystalle in zweierlei Weise untersucht. Sie wurden zuerst mit einer ihrer Nebenaxen vertikal gestellt, wobei das untere Ende dieser Axe auf einer Zinnplatte stand, während auf das obere Ende derselben eine an einem Hebel isolirt befestigte und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundene Zinnplatte mittelst eines Gewichtes drückte. Zweitens wurden die Krystalle mit einer Randkante auf die untere Zinnplatte gestellt, während die verschiedenen Punkte der oberen Kante mittelst einer an dem Hebel befestigten Zinnschneide gedrückt wurden. Hierbei erfolgte der Druck also stets senkrecht gegen die betreffenden Randkanten.

Krystall Nr. 1.

Der Krystall hat sich, wie wir früher (S. 33) gesehen haben, als ziemlich einfach herausgestellt, was auch durch die piëzoelektrische Untersuchung bestätigt wird.

Wurde der Krystall möglichst genau in der Richtung der Nebenaxen gedrückt, so wechselten auf den aufeinander folgenden Ecken die Polaritäten regelmässig ab[1]). Die hierbei beobachteten Polaritäten

1) Selbstverständlich waren die bei Nachlassen des Druckes entstehenden

sind in Fig. 1^c Taf. II bei den einzelnen Ecken an den Enden der in der Richtung der Nebenaxen nach aussen verlaufenden punktirten kurzen Linien verzeichnet. Eine Vergleichung der in Fig. 1^a und Fig. 1^c eingetragenen Spannungen ergiebt, dass Druck und Erkaltung gleichnamige Elektricität erzeugen.

Es wurde nun die Nebenaxe sehr wenig aus der vertikalen Stellung herausgedreht, jedoch so, dass der Krystall noch zwischen den beiden horizontalen Zinnplatten ohne weitere Unterstützung festgehalten wurde.

Diese Drehung erfolgte sowohl in der Ebene der Basis als auch in einer durch die Hauptaxe und Nebenaxe gelegten Ebene nach beiden Seiten. Die bei der Verdrehung der Nebenaxe in der Richtung der Basis beobachteten Spannungen sind in Fig. 1^c an den rechts und links neben den Ecken befindlichen punktirten Linien eingetragen[1]. Bei den vier Ecken (1, 2), (3, 4), (4, 5) und (6, 1) gaben sämmtliche vier Abweichungen der Stellung der Nebenaxe von der vertikalen Richtung dieselbe Polarität wie bei der vertikalen Stellung, selbstverständlich aber in geringerer Stärke. Dagegen machten sich an den Ecken (2, 3) und (5, 6) die bereits durch die thermoelektrische Untersuchung nachgewiesenen Zwillingsstücke bemerkbar, in der Weise, dass bei den Ecken (2, 3) und (5, 6) (s. Fig. 1^c) bei ersterer nach der Kante 3 hin und bei letzterer nach Kante 6 hin entgegengesetzte Polaritäten, als bei vertikaler Stellung beobachtet wurden. Bei einer Abweichung in der durch die Hauptaxe und Nebenaxe gelegten Ebene waren dagegen auch hier die Polaritäten dieselben wie bei der vertikalen Stellung.

Die bei vertikalem Druck auf die einzelnen Punkte der Randkanten beobachteten elektrischen Spannungen sind in Fig. 1^d eingetragen. Bei dieser Prüfung machten sich, wie aus der Zeichnung ersichtlich, die vorerwähnten Zwillingsstücke nicht bemerkbar. Die neben den Ecken beiderseitig gelegenen Stücke der Randkanten zeigten dieselbe Polarität, wie die betreffenden Ecken beim Druck in der Richtung der durch sie gehenden Nebenaxen. Eine absichtlich

---

Polaritäten gerade die entgegengesetzten. Es sind deshalb im Text, sowie in den Zeichnungen stets nur die beim Druck erzeugten Spannungen angegeben.

1) Die bei der Drehung in einer durch die Neben- und Hauptaxe gelegten Ebene erzeugten Polaritäten liessen sich nicht gut in der Figur anbringen.

hervorgebrachte geringe Neigung der Krystallplatte in der Weise, dass von den beiden Flächen $0P$ bald die eine, bald die andere etwas nach oben gerichtet war, erzeugte keine Änderung der Elektricität in Bezug auf das Vorzeichen, sondern nur eine geringe Abnahme ihrer Stärke.

Krystall Nr. 2.

Der Krystall Nr. 2, welcher, wie schon früher bei der Beschreibung seiner thermoelektrischen Eigenschaften erwähnt, nur ein Bruchstück war, konnte aus diesem Grunde nicht an sämmtlichen Ecken auf sein piëzoelektrisches Verhalten geprüft werden. Soweit dies möglich, sind die Beobachtungen in Fig. 2^b Taf. I eingetragen. Die mit Trapezoederflächen versehenen Ecken (1, 2) und (3, 4) zeigten negative Spannung, dagegen die Ecken (2, 3) und (4, 5) positive. An der Ecke (3, 4) erschien, wenn die Randkante 3 etwas gehoben war, positive Elektricität, ein Anzeichen eines hier liegenden Zwillingsstückes, während bei sonstiger Herausdrehung der Nebenaxen aus der vertikalen Stellung dieselbe Polarität entstand, wie bei der vertikalen Stellung.

Beim unterschwefelsauren Strontian zeigen also beim Druck die mit Trapezoederflächen versehenen Ecken die entgegengesetzte Polarität, als die mit den gleichen Flächen versehenen Kanten des Bergkrystalls. Während beim Bergkrystall Druck und Abkühlung entgegengesetzte Polarität erzeugten, sind die durch die genannten Vorgänge beim unterschwefelsauren Strontian hervorgerufenen Polaritäten gleichnamig.

Krystall Nr. 3.

Auch bei der piëzoelektrischen Untersuchung erwies sich der Krystall Nr. 3 ebenso wie bei der thermoelektrischen als noch ziemlich einfach. An den Ecken (3, 4) und (5, 6) (siehe Fig. 3^b Taf. II) trat sowohl bei vertikaler Stellung als bei geringer Verdrehung der Nebenaxen positive und an den Ecken (2, 3) und (6, 1) negative Elektricität auf, während an den beiden einander gegenüberliegenden Ecken (1, 2) und (4, 5) sich Zwillingsbildungen bemerkbar machten.

Krystall Nr. 4.

Wie schon die thermoelektrische Prüfung nachgewiesen, enthielt der Krystall manche eingewachsene Zwillingsstücke. In Fig. 4^b Taf. II sind die beim Druck in der Richtung der Nebenaxe und beim Ab-

weichen derselben von der vertikalen Stellung in der Ebene der Basis gemachten Beobachtungen eingetragen. Hiernach würden an den Ecken (3, 4), (5, 6) und (6, 1) keine Zwillingsstücke liegen, während solche sich an den Ecken (1, 2), (2, 3) und (4, 5) mehr oder weniger bemerklich machen. Dass aber die Ecken (3, 4), (5, 6) und (6, 1) doch nicht frei von Zwillingsstücken waren, ergab sich aus Beobachtungen, bei welchen die Nebenaxe in einer durch dieselbe und die Hauptaxe gelegten Ebene aus der vertikalen Stellung etwas herausgedreht wurde, indem dann bei der Verdrehung nach der einen Seite hin die entgegengesetzte Elektricität auftrat, als bei der vertikalen Stellung.

Krystall Nr. 5.

Wie bereits nach der thermoelektrischen Untersuchung (S. 36) zu erwarten war, zeigte der Krystall beim Druck in der Richtung seiner Nebenaxen auf den Ecken regelmässig abwechselnd positive und negative Spannung (s. Fig. 5^c Taf. II). Dagegen erschien an sämmtlichen Ecken bei Herausdrehung der Nebenaxen in der Ebene der Basis aus der vertikalen Stellung in der einen Richtung entgegengesetzte Elektricität, als bei vertikaler Stellung.

Ähnliche Abweichungen traten auch an den Ecken ein, wenn beim Druck auf dieselben die betreffende Nebenaxe in einer Ebene, die durch dieselbe und die Hauptaxe gelegt wird, etwas geneigt war.

Der Krystall wurde nun weiter in der Weise untersucht, dass eine Randkante desselben auf einer horizontalen Zinnplatte stand, während auf die verschiedenen Punkte der parallelen oben liegenden Kante eine aus Zinn gebildete Schneide drückte. Dabei stand die Ebene der Basis entweder genau vertikal oder war etwas nach der einen oder anderen Seite geneigt. Auch bei diesen Versuchen traten an vielen Stellen bei geneigter Stellung andere Polaritäten auf als bei der vertikalen. Es traf sich daher öfter, dass bei scheinbar vertikaler Stellung bei einem Versuche positive, bei einem anderen Versuche aber negative Elektricität beobachtet wurde, eine Folge davon, dass bei diesen Einstellungen der Krystall doch noch zufällig eine unmerkliche Neigung bald nach der einen, bald nach der anderen Seite erhalten hatte.

In Fig. 5^d sind an den betreffenden Stellen der Randkanten diejenigen Beobachtungen eingetragen, welche bei anscheinend vertikaler

Stellung der Basis stets dieselbe Polarität ergaben. Dagegen sind diejenigen Stellen, an welchen bald die eine, bald die andere Polarität auftrat, ohne Zahlen und Farbe gelassen.

Krystall Nr. 6.

Der Krystall enthält sehr viele Zwillingsstücke. Er war einer der ersten Krystalle, den wir auf sein elektrisches Verhalten untersuchten, und zeigte beim Druck auf die Ecken bei anscheinend derselben Stellung oft entgegengesetzte Polaritäten, so dass vielfach wiederholte Prüfungen nöthig waren, bei welchen der Krystall absichtlich aus der normalen Stellung mehr oder weniger herausgedreht wurde, um die gefundenen Widersprüche zu verstehen und ein annähernd richtiges Bild von seiner Zusammensetzung zu gewinnen.

In Fig. 6^c (welche die Basis in doppelter Grösse darstellt) sind die auf den Ecken bei den verschiedenen Stellungen beobachteten Spannungen eingetragen. An der Ecke (6, 1) war ein Einschnitt deutlich wahrzunehmen, welcher es augenscheinlich machte, dass daselbst ein Zwillingsstück lag. Die Beobachtung ergab auch auf der einen Spitze positive, auf der anderen negative Spannung.

In Fig. 6^d sind schliesslich die beim Druck mit der Schneide auf die horizontal gestellten Randkanten beobachteten Spannungen eingezeichnet. Auch bei diesen Versuchen traten, wenn die Flächen $0P$ aus der vertikalen Richtung nach der einen oder anderen Seite nur sehr wenig herausgestellt wurden, wiederholt entgegengesetzte Spannungen auf als bei vertikaler Stellung.

INHALT.

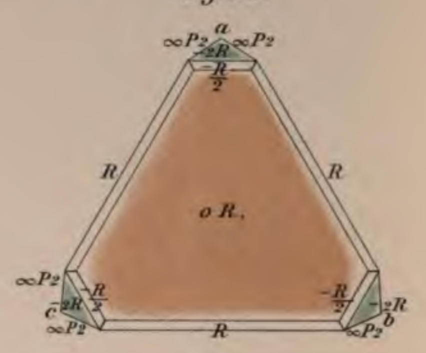


Überjodsaures Natron.

Fig. I A.



Fig. I B.



Bromb

Fig. I.

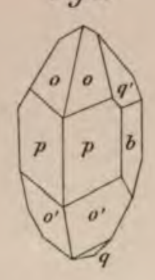


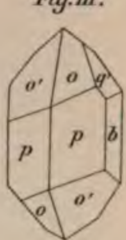
Fig. II a.



Fig. II b.



Fig. III.



Unterschwefelsaurer Baryt.

Fig. I.

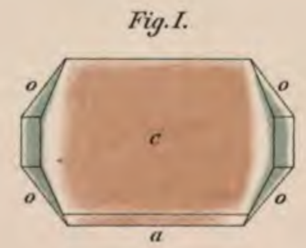
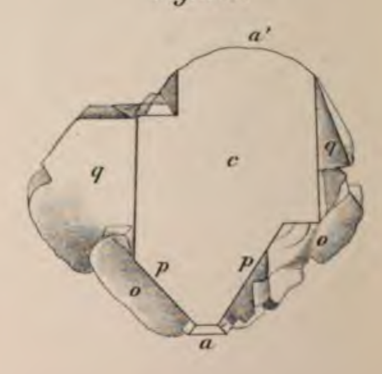
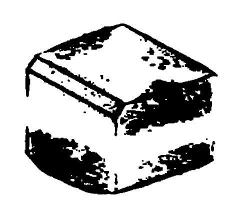


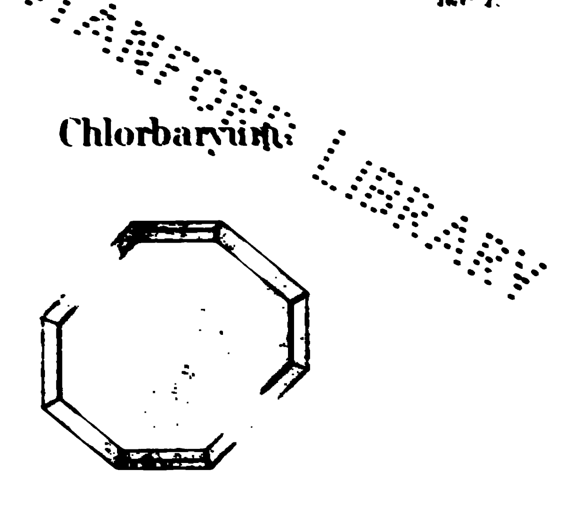
Fig. II a.





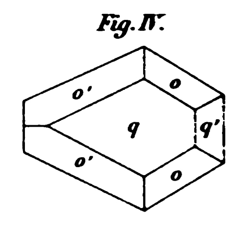
Asparagin.





Chlorbaryum.

ryum.



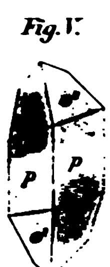
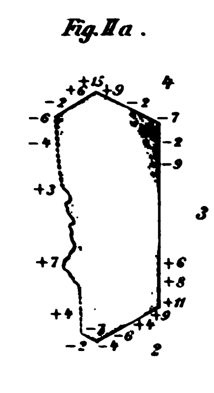


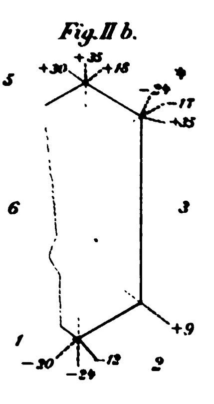


Fig. II b.

a'
o
p
p
c'
a

Unterschwefelsaurer Strontian.

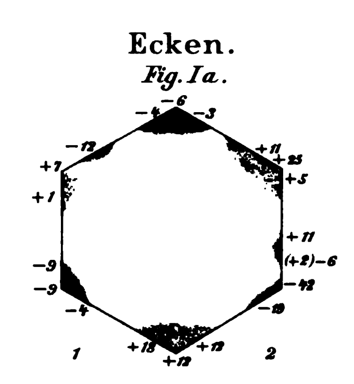




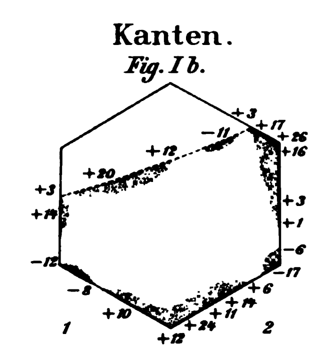
Lith Anst v E. A. Funke Leipzig

Unterschwefel

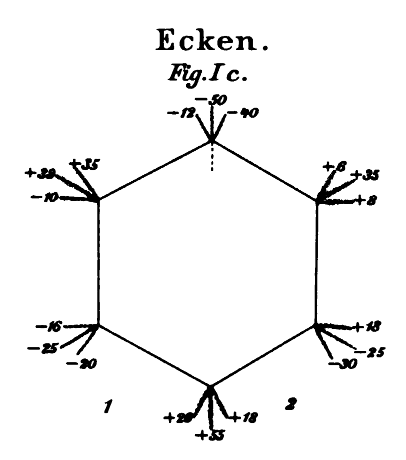
Ecken.
Fig. I a.



Kanten.
Fig. I b.



Ecken.
Fig. I c.



Kanten.
Fig. I d.

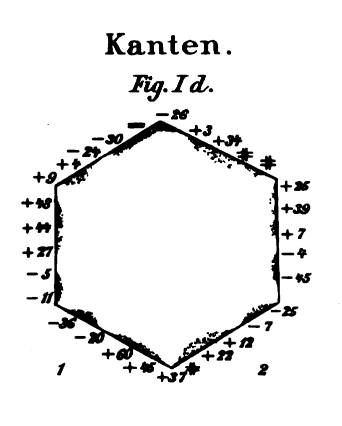
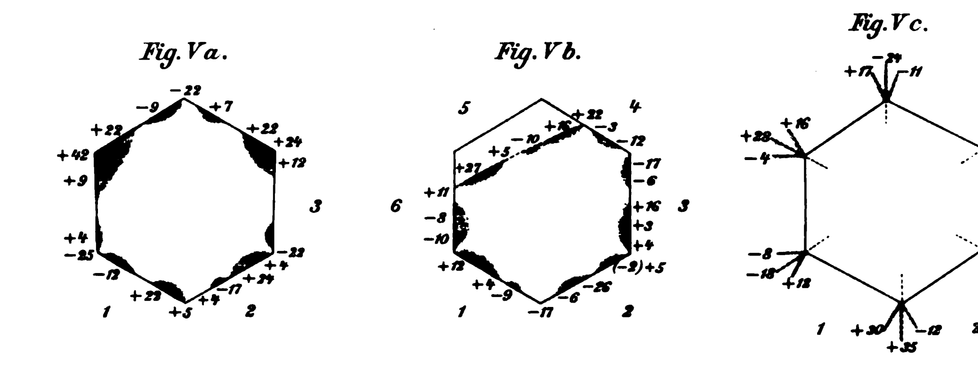


Fig. V a. *Fig. V b.* *Fig. V c.*



r Strontian.

Fig. IV a.

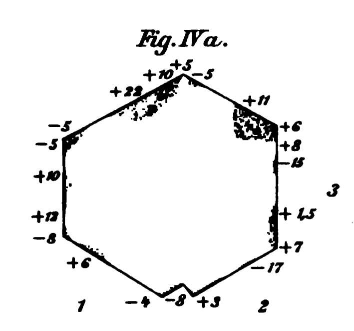


Fig. IV b.

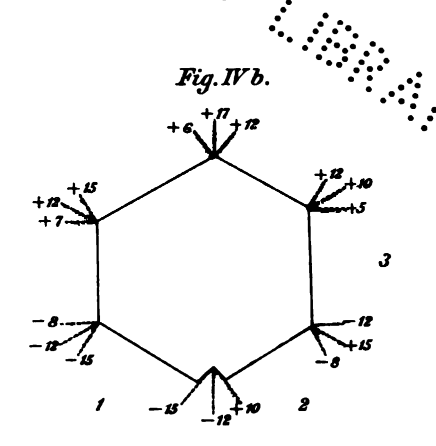


Fig. III a.

Fig. III b.

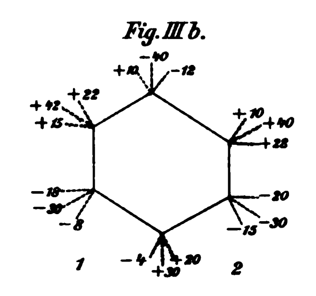


Fig. VI a.

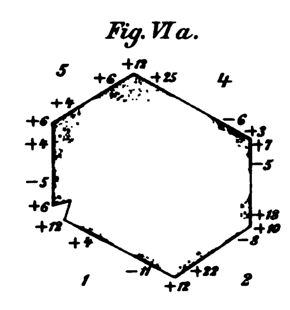


Fig. VI b.

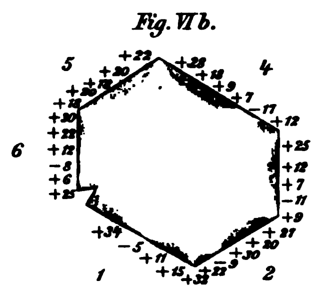


Fig. V d.

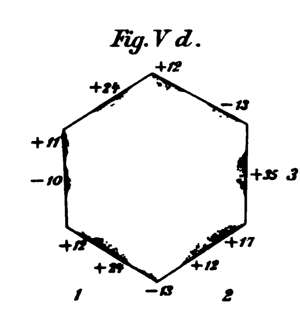


Fig. VI c.

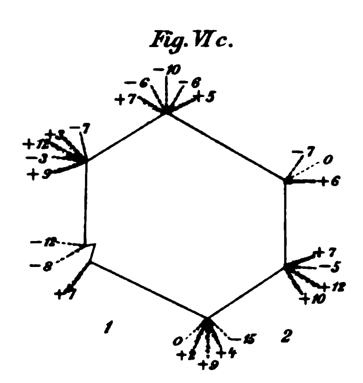
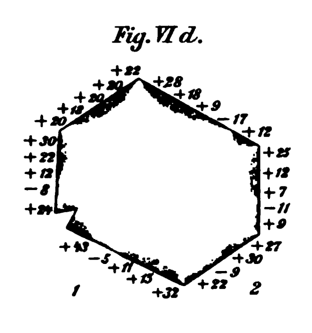


Fig. VI d.



Lith. Anst v E A. Funke, Leipzig.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

UNENDLICHE CONTINUIRLICHE GRUPPEN

VON

SOPHUS LIE.

In dieser Abhandlung gebe ich eine systematische Darstellung ausgedehnter Untersuchungen über unendliche continuirliche Transformationsgruppen, die ich in den Jahren 1883—1886 ausgeführt habe.

Meine ersten Untersuchungen über continuirliche Gruppen bezogen sich auf die Gruppe derjenigen Berührungstransformationen, die mit allen Translationen vertauschbar sind, sowie auf die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen; für diese letztere Gruppe entwickelte ich schon in den Jahren 1872 und 1873 eine Aequivalenztheorie, die für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung als vollständig zu betrachten ist. Gleichzeitig entwickelte ich eine vollständige Aequivalenztheorie für gewisse andere unendliche Gruppen, meine sogenannten Functionengruppen.

Nachdem ich in den Jahren 1870—1873 eine allgemeine Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen begründet hatte, versuchte ich wiederholt, meine Untersuchungen auf beliebige unendliche Gruppen auszudehnen. Es gelang mir im Jahre 1878 für die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen eine allgemeine Invariantentheorie zu begründen; im Übrigen blieben aber meine Bestrebungen lange erfolglos. Endlich hatte ich im Anfange des Jahres 1883 die glückliche Idee, unter allen Gruppen diejenigen herauszugreifen, deren Transformationen durch Differentialgleichungen definirt werden können. Für diese Gruppen, die ich als unendliche continuirliche Gruppen bezeichnet habe, gelang es eine allgemeine Invariantentheorie zu begründen.

Es ist wohl zu beachten, dass es sehr viele Transformationsgruppen giebt, welche nicht durch Differentialgleichungen definirt werden können. So z. B. bilden alle algebraischen Punkttransformationen eine unendliche Gruppe, welche nich*
rentialgleichungen definirt werden kann. Dasselb

aller birationalen Punkttransformationen der Ebene. Die beiden letztgenannten Gruppen besitzen bekanntlich eine hervorragende Wichtigkeit. Man darf daher keineswegs sagen, dass die durch Differentialgleichungen definirten Transformationsgruppen die einzigen continuirlichen Gruppen sind, die Interesse darbieten. Eine andere Sache ist es, dass es sehr viele triviale continuirliche Gruppen giebt, die sich nicht durch Differentialgleichungen definiren lassen. So z. B. erzeugen alle Transformationen

$$x_1 = F(x),$$

die einen Punkt $x = x_0$ invariant lassen, eine Gruppe, die wohl als trivial bezeichnet werden darf.

Im Jahre 1883 veröffentlichte ich in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania eine Bestimmung aller unendlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene. In demselben Jahre gelang es mir, alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$s = F(xyzpq),$$

die eine endliche oder unendliche Gruppe von Berührungstransformationen gestatten, auf kanonische Formen zu bringen. Ähnliche Untersuchungen über die allgemeine MONGE-AMPÈRE'sche Gleichung führten mich zu wichtigen Resultaten, unter denen bis jetzt fast nur diejenigen veröffentlicht worden sind, die sich auf LAPLACE's lineare Differentialgleichungen beziehen.

Im Jahre 1884 skizzirte ich in den Mathematischen Annalen Bd. 24 eine allgemeine Invariantentheorie der endlichen und unendlichen continuirlichen Gruppen. Ausführlichere Untersuchungen über Gruppen in zwei Veränderlichen hatte ich schon im Jahre 1883 im norwegischen Archiv veröffentlicht. Weitergehende Untersuchungen über Differentialinvarianten[1]) trug ich bei verschie-

---

1) AMPÈRE bestimmte alle Differentialinvarianten der Bewegungen der Ebene. Im Jahre 1870 entwickelte der talentvolle englische Mathematiker COCKLE Ideen über die Transformation von linearen Differentialgleichungen, die später durch LAGUERRE's und HALPHEN's bekannte Arbeiten wesentlich weiter geführt worden sind. Dies vorläufig zur Completirung meiner älteren Citate. Im Übrigen will ich schon heute notiren, dass mein ehemaliger Zuhörer, Herr TRESSE, neuerdings in den Acta math. meine Publicationen und Mittheilungen in durchaus uncorrecter Weise ausgebeutet hat.

denen Gelegenheiten in meinen Seminar-Vorlesungen an der Universität Leipzig vor.

In den Jahren 1883—1886 gelang es mir mehrere wichtige Kategorien von unendlichen Gruppen zu bestimmen. So z. B. bestimmte ich alle unendlichen Gruppen von Punkttransformationen des n-fach ausgedehnten Raumes, die im Infinitesimalen die grösstmögliche Transitivität besitzen, ferner alle unendlichen Gruppen des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes $z x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$, die die Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

invariant lassen und im Infinitesimalen die grösstmögliche Transitivität haben, ferner alle Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene, endlich alle primitiven Gruppen von Punkttransformationen des Raumes mit drei oder vier Dimensionen. Ich zerlegte andererseits die Bestimmung aller imprimitiven Gruppen des dreifachen Raumes in mehrere Specialprobleme, deren Erledigung keine Schwierigkeit darbietet. Auch die Bestimmung aller endlichen und unendlichen Berührungstransformationsgruppen des dreidimensionalen Raumes ist es mir schon längst gelungen im Princip zu erledigen, während ich allerdings noch nicht alle Detailrechnungen durchgeführt habe. — In der nachstehenden Abhandlung gebe ich eine ausführliche Darstellung der einfachsten unter den soeben besprochenen Untersuchungen.

Im Jahre 1890 veröffentlichte ich in den Berichten dieser Gesellschaft in zwei Abhandlungen eine eingehende Begründung der Fundamentalsätze meiner Theorie der unendlichen Gruppen. Hoffentlich wird es mir bald möglich sein, zu zeigen, wie sich gewisse tiefer liegende Begriffe und Sätze meiner Theorie der endlichen Gruppen auf unendliche Gruppen ausdehnen. Diese Übertragung ist in den meisten Fällen einfach, ja fast selbstverständlich, in einigen Fällen aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden, die ich theilweise noch nicht überwunden habe.

Ich will diese letzte Behauptung durch ein wichtiges und interessantes Beispiel illustriren. In meiner Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen beweise ich, dass alle endlichen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, die in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation liegen, von infinitesim[illegible] Transformationen der Gruppe erzeugt sind. Es liegt nun sehr nahe [illegible]

dass dieser fundamentale Satz (dessen Wesen, Tragweite und Wichtigkeit von meinen Nachfolgern mehrfach missverstanden worden ist) sich auf unendliche Gruppen ausdehnen lässt. Es ist mir aber nicht einmal gelungen, dieser Vermuthung einen ganz präcisen Ausdruck zu geben, noch weniger eine solche Ausdehnung zu realisiren.

Merkwürdigerweise findet sich im ABEL's Nachlasse eine Note, in welcher mein grosser Landsmann, wenn auch anscheinend unbewusst, doch factisch versucht, diese Idee für den einfachsten Fall durchzuführen. ABEL betrachtet eine ganz beliebige Transformation

$$y = f(x)$$

der eindimensionalen Mannigfaltigkeit x und versucht diese Transformation auf die Form

$$\varphi(y) = \varphi(x) + 1$$

zu bringen, was darauf hinauskommt, dass ABEL behauptet, dass jede Transformation $y = f(x)$ einer gewissen eingliedrigen Gruppe

$$\varphi(y) = \varphi(x) + c \qquad (c = \text{Const.})$$

angehört[1].

Es giebt einen Fall, in dem das von mir besprochene allgemeine Problem sich erledigen lässt. Sei eine Transformation des Raumes $x_1 \dots x_n$ durch die Gleichungen

$$x_k' = f_k(x_1 \dots x_n) \qquad (k = 1 \dots n)$$

bestimmt, und es möge T das Symbol dieser Transformation sein. Verstehen wir nun unter m irgend eine bestimmte ganze positive Zahl, so ist es immer möglich, die Gleichungen derjenigen Transformation hinzuschreiben, deren Symbol

$$T^m$$

ist. In gewissen Fällen lässt sich die Form dieser Gleichungen für unbestimmtes m angeben; alsdann bestimmen die entsprechenden Gleichungen

$$x_k' = F(x_1 \dots x_n\, m),$$

sobald m als Parameter betrachtet wird, wenn auch nicht immer, so doch jedenfalls sehr oft, eine eingliedrige Gruppe, zu welcher selbstverständlicher Weise die Transformation T gehört.

Wendet man z. B. diese Bemerkung auf die sogenannte Fusspunkttransformation an, so erhält man eine eingliedrige Gruppe, die ich als die Gruppe der Fusspunkttransformationen bezeichne. Diese Gruppe hat ihre infinitesimale Transformation, deren Symbol für den Raum $x_1 x_2 x_3$ die Form

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

besitzt. An einer anderen Stelle komme ich auf diese Bemerkung zurück.

---

[1] In ABEL's Untersuchungen kommt schon der allgemeine Gruppenbegriff implicite vor, wenn sich ABEL auch im Allgemeinen auf Gruppen mit vertauschbaren Operationen beschränkt. Es erscheint andererseits unzweifelhaft, dass ABEL's Untersuchungen über Functionalgleichungen bei seinen functionentheoretischen Entdeckungen eine grössere Rolle gespielt haben, als aus seinen Werken unmittelbar hervorgeht. Hierüber mehr an einer anderen Stelle.

In allen meinen Publicationen über continuirliche Gruppen habe ich die Analogie meiner Theorie mit GALOIS' wundervoller Substitionstheorie hervorgehoben. Es erscheint mir hochinteressant, dass die Schlussbemerkungen in GALOIS' wissenschaftlichem Testament es wahrscheinlich machen, dass dieser grosser Mathematiker beabsichtigte, auch eine Theorie der Transformationsgruppen zu entwickeln. Allerdings liegt es nahe zu vermuthen, dass GALOIS' Pläne sich in erster Linie auf discontinuirliche Transformationsgruppen bezogen.

Auch in RIEMANN's Werken (vgl. seine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie) findet sich eine Stelle, die die Vermuthung nahe legt, dass er sich mit allgemeinen Untersuchungen über Transformationsgruppen beschäftigt hatte.

Diese letzten Bemerkungen sind nicht ohne Interesse, wenn man auch nicht vergessen darf, dass so zu sagen alle Mathematiker, wenn auch implicite und unbewusst, sich mit dem Gruppenbegriff beschäftigt haben. Wenn neuerdings ein Mathematiker der Berliner Schule versucht, GAUSS als Urheber des Gruppenbegriffes hinzustellen, so stelle ich demgegenüber die Behauptung auf, dass z. B. EUCLID oder EULER sich früher als GAUSS mit Untersuchungen beschäftigt haben, die als gruppentheoretisch aufgefasst werden können. Bei allen kommt der Gruppenbegriff implicite, und soweit mir bekannt, nur implicite vor.

Capitel I.

Bestimmung aller imprimitiven unendlichen Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene.

Nach meinen allgemeinen Theorien enthält jede unendliche (wie endliche) continuirliche Gruppe von Punkttransformationen

$$x_1 = \varphi(xy), \quad y_1 = \psi(xy)$$

der Ebene unendlich viele infinitesimale Transformationen:

[illegible] $(xy)\frac{\partial f}{\partial y} = \xi p + \eta q,$

deren Inbegriff in jedem einzelnen Falle die betreffende Gruppe vollständig charakterisirt. Das Problem, alle continuirlichen unendlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene zu bestimmen, deckt sich daher vollständig mit dem formell ungleich einfacheren Probleme, alle Schaaren von infinitesimalen Transformationen $Xf = \xi(xy)p + \eta(xy)q$ zu finden, welche in meinem Sinne des Wortes eine unendliche Gruppe erzeugen.

Die infinitesimalen Transformationen $Xf = \xi p + \eta q$ einer (endlichen oder) unendlichen Gruppe werden in jedem einzelnen Falle durch ein System von Differentialgleichungen

$$a_k\xi + b_k\eta + c_k\frac{\partial\xi}{\partial x} + \cdots = 0 \tag{1}$$

$$(k = 1, 2 \ldots)$$

bestimmt, das wir einfach das System der Definitionsgleigleichungen der Gruppe nennen.

Charakteristisch für ein derartiges System von Differentialgleichungen ist einerseits, dass es in ξ und η linear und homogen ist, andererseits dass, sobald

$$X_1f = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{und} \quad X_2f = \xi_2\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y}$$

zwei Lösungssysteme

$$\xi_1,\ \eta_1 \quad \text{und} \quad \xi_2,\ \eta_2$$

liefern, dann der zugehörige Klammerausdruck

$$X_1(X_2(f)) - X_2(X_1(f)) = (X_1\xi_2 - X_2\xi_1)\frac{\partial f}{\partial x} + (X_1\eta_2 - X_2\eta_1)\frac{\partial f}{\partial y}$$

ebenfalls ein Lösungssystem

$$X_1\xi_2 - X_2\xi_1, \quad X_1\eta_2 - X_2\eta_1$$

bestimmt. Für die unendlichen Gruppen kommt als besonderes Merkmal noch hinzu, dass das allgemeinste Lösungssystem $\xi\eta$ sich nicht aus einer begrenzten Anzahl von Lösungssystemen:

$$\xi_1\eta_1; \quad \xi_2\eta_2; \quad \ldots \quad \xi_r\eta_r$$

durch Multiplication mit Constanten und Addition ableiten lässt; für die endlichen continuirlichen Gruppen dagegen ist es charakteristisch,

dass es immer eine solche ganze positive Zahl r giebt, dass die allgemeinsten Werthe $\xi\eta$ sich folgendermassen ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1\xi_1 + \cdots + c_r\xi_r \\ \eta &= c_1\eta_1 + \cdots + c_r\eta_r \end{aligned} \qquad (c_k = \text{Const.}).$$

Wir nennen eine continuirliche Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen Xf imprimitiv, wenn sie mindestens eine Curvenschaar

$$\varphi(xy) = \text{Const.}$$

invariant lässt, anders ausgesprochen, wenn es mindestestens eine Function φ giebt, die zu der Gruppe in solcher Beziehung steht, dass sich alle $X\varphi$ als Functionen von φ ausdrücken lassen.

Dementsprechend nennen wir eine Gruppe primitiv, wenn es bei ihr keine invariante Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ giebt.

In dem folgenden Capitel formuliren und erledigen wir für n Dimensionen ein allgemeines Problem, das für $n = 2$ auf die Bestimmung aller primitiven continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene hinauskommt. Wir können uns daher in diesem Capitel darauf beschränken: alle continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene zu bestimmen, welche *unendlich* und *imprimitiv* sind.

Da wir ohne Beschränkung unsere Punktcoordinaten so wählen können, dass $x = \text{Const.}$ die invariante Curvenschaar ist, so können wir uns auch so ausdrücken:

Wir bestimmen in diesem Capitel alle unendlichen continuirlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$Xf = \xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xy)\frac{\partial f}{\partial y}$$

haben.

Es ist nun von grösster Wichtigkeit, dass das soeben formulirte, keineswegs einfache Problem sich ohne weiteres in mehrere und zwar in fünf verschiedene Unterprobleme zerlegt, unter denen jedes einzelne sich noch weiter zerlegen lässt.

Kennen wir in der That eine unendliche Gruppe, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$\partial f \quad + \eta(xy)\frac{\partial f}{\partial y}$$

besitzen, so zeigen meine allgemeinen Theorien unmittelbar, dass die verkürzten infinitesimalen Transformationen

$$\xi(x)\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

jedesmal eine Gruppe bilden, welche nullgliedrig, eingliedrig, zweigliedrig, dreigliedrig oder unendlichgliedrig sein kann. Es zerfällt daher unser Problem sogleich in die fünf folgenden Probleme:

I) Alle unendlichen Gruppen (g) zu bestimmen, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$\eta(xy)\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

besitzen.

II) Alle unendlichen Gruppen g_1 zu finden, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$cp + \eta_1(xy)\,q \qquad (c = \text{Const.})$$

besitzen.

Man löst dieses zweite Problem, indem man nach und nach alle unendlichen Gruppen g nimmt, deren infinitesimale Transformationen die Form $\eta(xy)\,q$ besitzen, und in jedem Fall in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation $p + \eta_1(xy)\,q$ hinzufügt.

III) Alle unendlichen Gruppen g_2 zu finden, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$(cx + c_1)\,p + \eta_2(xy)\,q$$

besitzen, dabei vorausgesetzt, dass c_1 und c_2 wesentliche Constante bezeichnen.

Sobald das Problem II gelöst ist, findet man alle Gruppen g_2, indem man nach und nach zu den infinitesimalen Transformationen $cp + \eta_1(xy)\,q$ jeder Gruppe g_1 in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation

$$xp + \eta_2(xy)\,q$$

hinzufügt.

IV) Alle unendlichen Gruppen g_3 zu finden, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$(c_2x^2 + c_1x + c)\,p + \eta\,(xy)\,q$$

besitzen, dabei vorausgesetzt, dass c_2, c_1 und c arbiträre Constante bezeichnen.

Sobald das Problem III gelöst ist, finden wir alle Gruppen g_3, indem wir nach und nach zu den infinitesimalen Transformationen jeder einzelnen Gruppe g_2 in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation

$$x^2 p + \eta_2(xy) q$$

hinzufügen.

V) Alle unendlichen Gruppen zu bestimmen, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$\xi(x) p + \eta(xy) q$$

besitzen, dabei vorausgesetzt, dass ξ eine *arbiträre* Function von x bezeichnet.

Zur Lösung dieses Problems nehmen wir nach und nach alle endlichen und unendlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form $\eta(xy) q$ besitzen, und versuchen in jedem Falle dadurch eine Gruppe zu erzeugen, dass wir zu den infinitesimalen Transformationen der betreffenden Gruppe unendlich viele infinitesimale Transformationen

$$\xi(x) p + \eta(xy) q$$

hinzufügen, deren ξ eine von Null verschiedene arbiträre Function von x bezeichnet.

Wir behandeln jetzt nach und nach diese fünf Probleme, deren jedes sich in einfachere Probleme zerlegen lässt.

I.

Bestimmung aller intransitiven unendlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene.

Wir wollen zuerst alle unendlichen Gruppen bestimmen, deren infinitesimale Transformationen die Form $\eta(xy) q$ besitzen; diese Gruppen lassen sich offenbar auch dadurch charakterisiren, dass sie intransitiv und unendlich sind.

Die hiermit definirten Gruppen zerfallen in vier verschiedene Kategorien. Fassen wir nämlich, wie wir können, die Grösse x als Constante auf, so leuchtet ein, dass die Punkte jeder einzelnen Geraden $x = a$ durch eine Gruppe transformirt werden, die eingliedrig, zweigliedrig, dreigliedrig oder unendlichgliedrig ist.

Im ersten Falle erhält unsere Gruppe bei Einführung einer zweckmässigen Function von x, y als neues y die kanonische Form

$$\boxed{X(x)q}$$

wo X eine arbiträre Function von x bezeichnet.

Im zweiten Falle erhalten alle $\eta(xy)$ durch passende Coordinatenwahl die Form $\alpha(x) + \beta(x)y$. Greifen wir nun zwei beliebige infinitesimale Transformationen

$$(\alpha_1 + \beta_1 y)q \quad \text{und} \quad (\alpha_2 + \beta_2 y)q$$

heraus, so erhalten wir durch Klammeroperation die infinitesimale Transformation

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)q,$$

die in unserer Gruppe enthalten ist und im Allgemeinen von Null verschieden sein muss. Die gesuchte Gruppe enthält somit infinitesimale Transformationen, die die Form

$$\omega(x)q$$

besitzen; sie enthält ferner die Transformationen

$$(\omega q, (\alpha + \beta y)q) = \beta\omega q;$$

ferner die Transformationen $\beta^2\omega q$, $\beta^3\omega q \ldots$, überhaupt alle Transformationen

$$\beta^m \omega q \quad (m = 1, 2, 3 \ldots \infty).$$

Hieraus ergiebt sich, dass unsere Gruppe unter allen Umständen alle infinitesimalen Transformationen von der Form $\varphi(x)q$ umfasst. Die übrigen Transformationen können daher auf die Form $\beta(x)yq$ gebracht werden, und dabei giebt es zwei wesentlich verschiedene Fälle, jenachdem β eine lineare Differentialgleichung erfüllt oder nicht. Die gesuchten Gruppen können also entweder auf die kanonische Form

$$\boxed{Xq \quad X_1(x)yq}$$

mit den beiden arbiträren Functionen X und X_1 von x oder auf die kanonische Form

$$\boxed{Xq, \quad \alpha_1(x)yq \ldots \quad \alpha_m(x)yq}$$

mit der einzigen arbiträren Function $X(x)$ gebracht werden.

Im dritten Falle lassen sich alle $\eta(xy)$ auf die Form

$$(X(x) + X_1(x)y + X_2(x)y^2)q$$

bringen. Indem wir nun wie bei der Bestimmung aller endlichen Transformationsgruppen von dieser Form verfahren, erkennen wir, dass unter den hier gemachten Voraussetzungen die drei Functionen X, X_1 und X_2 sämmtlich arbiträr sind. Die gesuchte Gruppe kann daher die kanonische Form

$$\boxed{X(x)q\,, \quad X_1(x)yq\,, \quad X_2(x)y^2q}$$

erhalten.

Wir suchen sodann alle Gruppen $\eta(xy)q$, bei denen die Punkte jeder einzelnen Geraden $x = \text{Const.}$ durch eine Gruppe mit unendlich vielen Parametern transformirt werden. Um die Rechnungen zu vereinfachen, denken wir uns die Veränderlichen x, y von vornherein in solcher Weise gewählt, dass die betreffende Gruppe $\eta(xy)q$ die infinitesimale Transformation q enthält. Unter dieser Voraussetzung müssen offenbar in den Definitionsgleichungen

$$a_x\eta + b_x\eta_x + c_x\eta_y + \cdots = 0$$

die Coefficienten a_x sämmtlich gleich Null sein; da andererseits gleichzeitig mit $\eta(xy)q$ auch die infinitesimale Transformation

$$(q, \eta q) = \frac{\partial\eta}{\partial y}q$$

in unsrer Gruppe vorkommen muss, so können wir ohne Beschränkung annehmen, dass die Coefficienten b_x, $c_x \dots$ nur von x abhängen.

Findet sich unter den Definitionsgleichungen eine von erster Ordnung

$$\alpha(x)\eta_x + \beta(x)\eta_y = 0\,,$$

so muss α von Null verschieden sein, indem η nach unserer Voraussetzung nicht nur von x abhängen darf. Es muss also η die Form

$$\eta = \Omega(y + X(x))$$

haben, wo $X(x)$ eine bestimmte Function von x, Ω dagegen eine jedenfalls vorläufig unbestimmte Function des Argumentes $y + X$ bezeichnet. Führen wir hier $y + X(x)$ als neues y ein, so erhalten alle infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe die Form $W(y)q$, und dabei muss W eine arbiträre Function von y sein, indem unsere Gruppe sonst endlich wäre.

Besitzt daher eine unendliche Gruppe $\eta(xy)q$ eine Definitionsgleichung erster Ordnung, so ist sie ähnlich mit der Gruppe

$$\boxed{Y(y)q}$$

deren infinitesimale Transformationen die arbiträre Function $Y(y)$ von y enthalten.

Wir wollen sodann annehmen, dass sich unter den Definitionsgleichungen unserer Gruppe $\eta(xy)q$ keine von erster, dagegen mindestens eine von zweiter Ordnung

$$\alpha(x)\eta_x + \beta(x)\eta_y + \gamma(x)\eta_{xx} + \delta(x)\eta_{xy} + \varepsilon(x)\eta_{yy} = 0$$

findet. Denken wir uns jetzt, wie wir können, die $\eta(xy)$ nach den Potenzen von x, y entwickelt, so dürfen wir behaupten, dass unsere Gruppe zwei infinitesimale Transformationen enthält, deren Reihenentwickelungen

$$(x + \cdots)q \qquad (y + \cdots)q$$

mit Gliedern erster Ordnung anfangen, ferner mindestens eine, deren Reihenentwickelung

$$(ax^2 + bxy + cy^2 + \cdots)q = K$$

mit Gliedern zweiter Ordnung anfängt. Nun aber ist

$$(xq + \cdots, K) = (bx^2 + 2cxy + \cdots)q = K_1,$$
$$(xq + \cdots, K_1) = 2cx^2q + \cdots,$$

und also muss c gleich Null sein, denn sonst hätten wir drei infinitesimale Transformationen von der Form

$$x^2q + \cdots, \quad xyq + \cdots, \quad y^2q + \cdots$$

und das steht im Widerspruch mit dem Vorhandensein einer Definitionsgleichung zweiter Ordnung.

Also haben alle infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung die Form

$$(ax^2 + bxy + \cdots)q$$

und dementsprechend giebt es eine Definitionsgleichung, welche die Form

$$\eta_{yy} + X\eta_y + X_1\eta_x = 0$$

besitzt. Sind nun

$$\eta q \quad \text{und} \quad \zeta q$$

zwei beliebige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe, so muss auch der Ausdruck

$$\eta\zeta_y - \zeta\eta_y$$

unsere Definitionsgleichungen, insbesondere die oben stehende erfüllen. Wir erhalten in dieser Weise die Relation

$$\eta\zeta_{yyy} - \zeta\eta_{yyy} + \eta_y\zeta_{yy} - \zeta_y\eta_{yy} + X(\eta\zeta_{yy} - \zeta\eta_{yy})$$
$$+ X_1(\eta_x\zeta_y - \zeta_x\eta_y + \eta\zeta_{xy} - \zeta\eta_{xy}) = 0$$

oder nach Elimination der Grössen ζ_{yyy}, η_{yyy}:

$$\eta_y\zeta_{yy} - \zeta_y\eta_{yy} + X_1(\eta_x\zeta_y - \zeta_x\eta_y) = 0\,,$$

oder endlich nach Elimination der Grössen η_{yy}, ζ_{yy}:

$$2X_1(\eta_x\zeta_y - \zeta_x\eta_y) = 0\,.$$

Wäre nun X_1 verschieden von Null, so ergäbe sich durch Particularisirung von ζ, dass η eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllte. Also ist $X_1 = 0$, und alle η erfüllen eine Gleichung von der Form

$$\eta_{yy} + X\eta_y = 0\,,$$

woraus wieder folgt, dass drei infinitesimale Transformationen $\eta_1 q$, $\eta_2 q$, $\eta_3 q$ immer eine lineare Relation erfüllen, deren Coefficienten nur von x abhängen. Dies steht aber mit unseren Voraussetzungen in directem Widerspruch, und daher giebt es jedenfalls keine Definitionsgleichung zweiter Ordnung.

Nehmen wir jetzt an, dass sich unter den Definitionsgleichungen mindestens eine von dritter Ordnung findet. Indem wir fast ganz wie in dem vorangehenden Falle verfahren, erkennen wir, dass unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation von der Form

$$(y^3 + ay^2x + byx^2 + cx^3 + \cdots)q$$

enthalten kann. Daher giebt es eine Definitionsgleichung, welche die Grösse η_{yyy} als Function der Ableitungen erster und zweiter Ordnung bestimmt. Führen wir nun die Abkürzungen

$$\frac{\partial U}{\partial y} = U'\,, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = U_,$$

ein, so erhält die besprochene Definitionsgleichung die Form

$$\eta''' + X_1\eta'' + X_2\eta_,' + X_3\eta_{,,} + X_4\eta' + X_5\eta_, = 0\,.$$

Sind η und ζ zwei beliebige particuläre Lösungen, so ist, wissen wir, der Ausdruck

$$\eta\zeta' - \zeta\eta'$$

ebenfalls eine Lösung, und es besteht daher die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\eta\zeta^{(4)} + 2\eta'\zeta''' - \eta^{(4)}\zeta - 2\eta'''\zeta' + X_1(\eta\zeta''' + \eta'\zeta'' - \eta''\zeta' - \eta'''\zeta)\\
&\quad + X_2(\eta\zeta_{,}'' + \eta_{,}\zeta'' - \eta_{,}''\zeta - \eta''\zeta_{,})\\
&\quad + X_3(\eta\zeta_{,,}' + 2\eta_{,}\zeta_{,}' + \eta_{,,}\zeta' - \eta_{,,}'\zeta - 2\eta_{,}'\zeta_{,} - \eta'\zeta_{,,})\\
&\quad + X_4(\eta\zeta'' - \eta''\zeta) + X_5(\eta\zeta_{,}' + \eta_{,}\zeta' - \eta_{,}'\zeta - \eta'\zeta_{,}) = 0\,,
\end{aligned}$$

die durch Elimination der Grössen $\zeta^{(4)}$ und $\eta^{(4)}$ die Form:

$$\begin{aligned}
&2\eta'\zeta''' - 2\eta'''\zeta' + X_1(\eta'\zeta'' - \eta''\zeta') + X_2(\eta_{,}\zeta'' - \eta''\zeta_{,})\\
&\qquad + X_3(2\eta_{,}\zeta_{,}' + \eta_{,,}\zeta' - \eta'\zeta_{,,} - 2\eta_{,}'\zeta_{,}) + X_5(\eta_{,}\zeta' - \eta'\zeta_{,}) = 0
\end{aligned}$$

annimmt. Berücksichtigen wir hier noch einmal, dass η und ζ unsere Definitionsgleichung erfüllen, so erhalten wir die Relation:

$$\begin{aligned}
&-X_1(\eta'\zeta'' - \eta''\zeta') + X_2(\eta_{,}\zeta'' - \eta''\zeta_{,} - 2\eta'\zeta_{,}' + 2\zeta'\eta_{,}')\\
&+ X_3(2\eta_{,}\zeta_{,}' + 3\eta_{,,}\zeta' - 3\eta'\zeta_{,,} - 2\eta_{,}'\zeta_{,}) + 2X_5(\zeta'\eta_{,} - \eta'\zeta_{,}) = 0\,,
\end{aligned}$$

die identisch bestehen muss, indem weder η noch ζ eine Gleichung von zweiter oder erster Ordnung erfüllt. In dieser Weise erkennen wir, dass die Coefficienten X_1, X_2, X_3 und X_5 gleich Null sind und dass daher unsere Definitionsgleichung die Form

$$\eta''' + X_4\eta' = 0$$

besitzen muss; dies ist indess von vornherein ausgeschlossen, indem vier beliebig gewählte particuläre Lösungen η_1, η_2, η_3, η_4 keine lineare homogene Relation erfüllen dürfen, deren Coefficienten nur von x abhängen.

Übrig bleibt daher nur noch die Annahme, dass die Ordnung aller Definitionsgleichungen grösser als drei ist. Dann aber kämen u. a. zwei infinitesimale Transformationen vor, deren Reihenentwickelungen die Form besässen

$$y^2q + \cdots, \quad y^3q + \cdots$$

und dann fänden wir durch Klammeroperation die Transformationen

$$\begin{aligned}
(y^2q + \cdots,\ y^3q + \cdots) &= y^4q + \cdots\\
(y^2q + \cdots,\ y^4q + \cdots) &= 2y^5q + \cdots
\end{aligned}$$

und überhaupt für jedes m eine Transformation

$$y^mq + \cdots$$

durch fortgesetzte Klammeroperation fänden wir sodann die Transformationen

$$(xq + \cdots, y^m q + \cdots) = mxy^{m-1}q + \cdots,$$
$$(xq + \cdots, xy^{m-1}q + \cdots) = (m-1)x^2y^{m-2}q + \cdots$$
u. s. w.,

sodass unsere Gruppe, welches auch die ganzen Zahlen m und n sind, immer eine infinitesimale Transformation enthält, deren Reihenentwickelung die Form

$$x^m y^n q + \cdots$$

besitzt.

Wir finden also nur noch eine Gruppe, nämlich diejenige, deren infinitesimale Transformationen die allgemeine Form

$$\eta(xy)q$$

besitzen. Es gilt daher der Satz:

Satz. Eine intransitive unendliche Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene kann durch passende Coordinatenwahl auf eine unter den folgenden Formen gebracht werden:

$$\boxed{X(x)q} \qquad \boxed{X(x)q,\ X_1(x)yq}$$

$$\boxed{X(x)q,\quad \alpha_1(x)yq,\quad \alpha_2(x)yq\ \ldots\ \alpha_m(x)yq}$$

$$\boxed{Y(y)q} \qquad \boxed{X(x)q,\ X_1(x)yq,\ X_2(x)y^2q}$$

$$\boxed{\eta(xy)q}$$

In diesem Schema bezeichnen $X_\varkappa(x)$, $Y(y)$ und $\eta(xy)$ arbiträre Functionen der betreffenden Argumente; dagegen sollen die $\alpha_\varkappa(x)$ für jede einzelne Gruppe bestimmte Functionen von x bedeuten, welche aber in den verschiedenen Gruppen ganz verschiedene Formen haben können.

Hiermit ist die Bestimmung aller intransitiven unendlichen Gruppen von Punkttransformationen der Ebene vollständig durchgeführt. Um die Übersicht zu erleichtern, zerlegten wir im Vorangehenden dieses allgemeine Problem in vier getrennte Probleme. Es wird aber der Aufmerksamkeit des gewissenhaften Lesers nicht entgehen, dass unsere Zerlegung unter theoretischem Gesichtspunkte

unvollkommen ist, wenn sie auch praktisch bequem ist. Factisch umfasst nämlich unsere Behandlung des vierten Falles, wenn auch nicht in der Form, so doch in der Realität, alle vier Fälle. Bei der Behandlung des vierten Falles wurden wir nämlich nach und nach zur Betrachtung von Definitionsgleichungen geführt, die die Form

$$\eta_y = 0 , \quad \eta_x = 0 ,$$
$$\eta_{yy} + X(x)\eta_y = 0 , \quad \eta_{yyy} + X(x)\eta_y = 0$$

besassen. Wären nun unsere drei ersten Fälle nicht schon von vornherein erledigt worden, so hätten wir alle diese Definitionsgleichungen discutiren müssen und würden dann unmittelbar alle intransitiven Gruppen gefunden haben.

Es erscheint nicht möglich, die vorhergehenden Rechnungen ohne principielle methodische Änderungen wesentlich abzukürzen. Jedenfalls sind meine Bestrebungen in dieser Richtung erfolglos geblieben.

Wir heben ausdrücklich hervor, dass alle soeben gefundenen intransitiven unendlichen Gruppen durch Differentialgleichungen definirt werden können. Die Definitionsgleichungen unserer sechs Gruppen sind, wie man leicht erkennt, die folgenden:

A) $\xi = 0 , \quad \eta_y = 0 ,$

B) $\xi = 0 , \quad \eta_{yy} = 0 ,$

C) $\xi = 0 , \quad \eta_{yy} = 0 \quad (\eta_y)_x^m + \beta_{m-1}(x)(\eta_y)_x^{m-1} + \cdots + \beta(x)\eta_y = 0 ,$

D) $\xi = 0 , \quad \eta_x = 0 ,$

E) $\xi = 0 , \quad \eta_{yyy} = 0 ,$

F) $\xi = 0 .$

II.

Jetzt bestimmen wir alle imprimitiven unendlichen Gruppen, bei denen die Curven der invarianten Schaar $\varphi = a$ durch eine eingliedrige Gruppe transformirt werden; anders ausgesprochen: wir bestimmen alle unendlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form:

$$\text{Const.} \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(xy)\frac{\partial f}{\partial y}$$

besitzen. Jede derartige Gruppe enthält eine unendliche invariante Untergruppe, welche die Form $\eta(xy)q$ hat. Wir finden somit

gesuchten Gruppen, indem wir nach und nach alle im vorigen Paragraphen gefundenen Gruppen vornehmen und zu den Transformationen $\eta(xy)q$ jeder derartigen Gruppe in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation

$$p + \eta_1(xy)q$$

hinzufügen.

Wir nehmen zuerst die unendliche Gruppe $X(x)q$ und stellen die Forderung, dass die infinitesimalen Transformationen

$$Xq \quad \text{und} \quad p + \eta_1(xy)q$$

eine unendliche Gruppe erzeugen sollen. Hierzu ist, wie wir durch Klammeroperation erkennen, nothwendig und hinreichend, dass η_1 die Form

$$\eta_1 = \alpha(x)y + \beta(x)$$

besitzt; dabei leuchtet ein, dass wir $\beta(x)$ ohne weiteres gleich Null setzen können. Wir sehen somit, dass die gesuchte Gruppe die Form

$$Xq, \quad p + X_1yq$$

erhalten kann; wir wollen zeigen, dass wir sogar ohne Beschränkung $X_1 = 0$ setzen können. Führen wir nämlich neue Veränderliche durch die Substitution

$$x_1 = x \qquad y_1 = yB(x)$$

ein, so behält die Untergruppe Xq ihre Form, während die neue Transformation $p + X_1yq$ die Gestalt

$$p_1 + \left(X_1 + \frac{B'}{B}\right)y_1q_1$$

annimmt. Unsere Gruppe erhält daher durch passende Coordinatenwahl die kanonische Form

$$\boxed{X(x)q \quad p}$$

Sodann nehmen wir die Gruppe Xq, X_1yq und versuchen in allgemeinster Weise eine solche Function $\eta_1(xy)$ zu finden, dass die infinitesimalen Transformationen

$$Xq, \quad X_1yq, \quad p + \eta(xy)q$$

eine Gruppe erzeugen. Durch Bildung der Relationen

$$(Xq, p + \eta q) = \varphi(x)q + \varphi_1(x)yq,$$
$$(X_1yq, p + \eta q) = \psi(x)q + \psi_1(x)yq$$

erkennen wir, dass η in y linear sein muss und sogar ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Unsere Gruppe erhält in dieser Weise die kanonische Form

$$\boxed{Xq, \quad X_1 yq, \quad p}$$

Suchen wir jetzt alle unendlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$X(x)q, \quad \alpha_1(x)yq \dots \alpha_m(x)yq, \quad p + \eta q$$

besitzen. Durch Klammeroperation erkennen wir, dass wir ohne Beschränkung

$$p + \eta q = p + \varphi(x) yq$$

setzen können. Führen wir sodann

$$y_1 = y e^{-\int \varphi dx}$$

als neues y ein, so erhalten unsere infinitesimalen Transformationen die Form:

$$Xq, \quad \alpha_1 yq \dots \alpha_m yq \quad p,$$

und dabei erfüllen die $\alpha_\varkappa$ Relationen von der Form

$$\alpha'_\varkappa(x) = c_{\varkappa 1}\alpha_1 + \dots + c_{\varkappa m}\alpha_m,$$

die zeigen, dass die $\alpha_\varkappa$ ein System Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten bilden. Unsere Gruppe kann somit auf die kanonische Form gebracht werden:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e^{\alpha_\varkappa x} yq, & x e^{\alpha_\varkappa x} yq \dots & x^{m_\varkappa} e^{\alpha_\varkappa x} yq \\ X(x)q, & p & (\varkappa = 1, 2 \dots) \end{array}}$$

Besitzen die infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe die Form

$$Y(y)q, \quad p + \eta(xy)q,$$

so muss η für jedes Y eine Gleichung von der Form

$$Y\eta_y - Y_y\eta = \varphi(y)$$

erfüllen; folglich ist η eine Function von y und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden. Die gesuchte Gruppe hat daher die kanonische Form:

$$\boxed{Y(y)q, \quad p}$$

Besitzen die infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe die Form

$$X(x)q\,, \quad X_1(x)yq\,, \quad X_2(x)y^2q\,, \quad p+\eta(xy)q\,,$$

so ergiebt sich durch Klammeroperation, dass η eine ganze Function zweiten Grades von y sein muss, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden kann. Also besitzt die betreffende Gruppe die kanonische Form

$$\boxed{X(x)q\,, \quad X_1(x)yq\,, \quad X_2(x)y^2q \quad p}$$

Erzeugen endlich die infinitesimalen Transformationen

$$\varphi(xy)q\,, \quad p+\eta(xy)q$$

eine unendliche Gruppe, so kann η ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden, so dass die kanonische Form der Gruppe wird

$$\boxed{\varphi(xy)q \quad p}$$

Wir fassen unsere Resultate in dem folgenden Satze zusammen:

Satz. Wenn bei einer imprimitiven unendlichen Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene die Curven einer invarianten Curvenschaar $F(xy)=a$ *eingliedrig* transformirt werden, so kann die Gruppe durch passende Coordinatenwahl auf eine unter den folgenden kanonischen Formen gebracht werden:

$$\boxed{Xq\,, \; p} \qquad \boxed{Xq\,, \quad X_1yq\,, \quad p}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\alpha_\varkappa x}yq\,, \quad x^{\alpha_\varkappa x}yq \;\ldots\; x^{m_\varkappa}e^{\alpha_\varkappa x}yq \\ Xq\,, \quad p \qquad (\varkappa=1,2\ldots) \end{array}}$$

$$\boxed{Xq\,, \quad X_1yq\,, \quad X_2y^2q\,, \quad p}$$

$$\boxed{Y(y)q \quad p} \qquad \boxed{\eta(xy)q\,, \quad p}$$

Wir fügen hinzu, dass eine jede unter diesen sechs Gruppen durch Differentialgleichungen definirt werden kann. Wir stellen die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen dieser sechs Schema zusammen:

A) $\xi_y = 0\,, \qquad \xi_x = 0\,, \qquad \eta_y = 0\,,$

B) $\xi_y = 0\,, \qquad \xi_x = 0\,, \qquad \eta_{yy} = 0\,,$

C) $\xi_y = 0\,, \qquad \xi_x = 0\,, \qquad \eta_{yy} = 0\,,$

$$(\eta_y)_x^{(\nu)} + C_{\nu-1}(\eta_y)_x^{(\nu-1)} + C_{\nu-2}(\eta_y)_x^{\nu-2} + \cdots + C_1\,\eta_y = 0\,,$$
$$(C_x = \text{Const.})$$

D) $\xi_y = 0\,, \qquad \xi_x = 0\,, \qquad \eta_{yyy} = 0\,,$

E) $\xi_y = 0\,, \qquad \xi_x = 0\,, \qquad \eta_x = 0\,,$

F) $\xi_y = 0\,, \qquad \xi_x = 0\,.$

III.

Jetzt müssen wir alle imprimitiven unendlichen Gruppen bestimmen, deren Transformationen die Curven der invarianten Schaar $\varphi(xy) = \text{Const.}$ durch eine zweigliedrige Gruppe transformiren; anders ausgesprochen, wir suchen alle Untergruppen der unendlichen Gruppe

$$\eta\,(xy)\,q\,, \quad p\,, \quad xp\,,$$

bei denen x zweigliedrig transformirt wird.

Wir wissen, dass wir alle diese Gruppen finden, wenn wir zu einer jeden unter den soeben bestimmten sechs Gruppen in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation hinzufügen, welche die Form

$$xp + \eta\,(xy)\,q$$

besitzt.

A) Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,, \quad p\,, \quad xp + \eta\,(xy)\,q$$

eine unendliche Gruppe, so kann η ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich cy gesetzt werden, und es ist daher

$$\boxed{Xq\,, \quad p\,, \quad xp + cyq}$$

eine kanonische Form der Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,, \quad X_1yq\,, \quad p\,, \quad xp + \eta q$$

eine Gruppe, so kann η ohne weiteres gleich Null gesetzt werden, und es ist daher

$$\boxed{Xq\,, \quad X_1 y q\,, \quad p\,, \quad xp}$$

eine kanonische Form der gesuchten Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,, \quad e^{\alpha_x x} y q\,, \quad x e^{\alpha_x x} y q \dots x^{m_x} e^{\alpha_x x} y q\,, \quad p\,, \; xp + \eta q$$
$$(x = 1, 2 \dots)$$

eine unendliche Gruppe, so besitzt $\eta(xy)$ die Form

$$\eta = \beta(x) y + \gamma(x)\,,$$

wobei γ ohne weiteres gleich Null gesetzt werden kann. Nun aber ist

$$(x^{m_x} e^{\alpha_x x} y q\,, \quad xp + \beta y q) = -x \frac{d}{dx} (x^{m_x} e^{\alpha_x x}) y x$$

und also ist

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0\,;$$

es besteht andererseits eine Gleichung von der Form

$$(p\,, \quad xp + \beta y q) = p + (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) y q + \varphi(x) q$$

oder

$$\beta' = c_0 + c_1 x c + \dots + c_m x^m\,,$$

sodass wir

$$\beta(x) = k x^{m+1}$$

setzen können. Unsere unendliche Gruppe besitzt somit die Form

$$Xq\,, \quad yq\,, \quad xyq \dots x^m yq\,, \quad p\,, \quad xp + k x^{m+1} y q\,.$$

Führen wir hier als neues y die Grösse

$$y e^{-\frac{k}{m+1} x^{m+1}}$$

ein, so erkennen wir, dass wir der Constante k ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Werth $k = 0$ ertheilen können, und es ist daher

$$\boxed{Xq\,, \quad yq\,, \quad xyq \,.\,. \, x^m yq\,, \quad p\,, \quad xp}$$

eine kanonische Form unserer Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,, \quad X_1 y q\,, \quad X_2 y^2 q\,, \quad p\,, \quad xp + \eta q$$

eine unendliche Gruppe, so ist η eine ganze Function zweiten Grades von y und kann daher ohne weiteres gleich Null gesetzt werden; es ist daher

$$\boxed{Xq, \quad X_1 yq, \quad X_2 y^2 q, \quad p, \quad xp}$$

eine kanonische Form der Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Y(y)q, \quad p, \quad xp + \eta(xy)q$$

eine Gruppe, so ist η eine Function von y allein und kann daher gleich Null gesetzt werden. Es ist also

$$\boxed{Y(y)q, \quad p, \quad xp}$$

eine kanonische Form der Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$\eta(xy)q, \quad p, \quad xp + \alpha(xy)q$$

eine Gruppe, so kann α gleich Null gesetzt werden, und es ist also

$$\boxed{\eta(xy)q, \quad p, \quad xp}$$

eine kanonische Form der Gruppe.

Wir fassen unsere Resultate in dem folgenden Satze zusammen:

Satz. Transformirt eine unendliche Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene die Curven der invarianten Schaar $\varphi(xy) = a$ zweigliedrig, so kann sie durch passende Coordinatenwahl auf eine unter den folgenden kanonischen Formen gebracht werden:

$$\boxed{Xq, \quad p, \quad xp + cyq} \qquad \boxed{Xq, \quad X_1 yq, \quad p, \quad xp}$$

$$\boxed{Xq, \quad yq, \quad xyq \ldots x^m yq, \quad p, \quad xp}$$

$$\boxed{Xq, \quad X_1 yq, \quad X_2 y^2 q, \quad p, \quad xp}$$

$$\boxed{Y(y)q, \quad p, \quad xp} \qquad \boxed{\eta(xy)q, \quad p, \quad xp}$$

Diese sechs Gruppen können sämmtlich durch Differentialgleichungen definirt werden. Wir stellen die sechs Systeme von Definitionsgleichungen in dem folgenden Schema zusammen:

A) $\xi_y = 0\,,\quad \xi_{xx} = 0\,,\quad \eta_{yy} = 0\,,\quad \eta_y - c\xi_x = 0\,,$
B) $\eta_{yy} = 0\,,\quad \xi_y = 0\,,\quad \xi_{xx} = 0\,,$
C) $\eta_{yy} = 0\,,\quad (\eta_y)_x^{(m+1)} = 0\,,\quad \xi_y = 0\,,\quad \xi_{xx} = 0\,,$
D) $\eta_{yyy} = 0\,,\quad \xi_y = 0\,,\quad \xi_{xx} = 0\,,$
E) $\eta_x = 0\,,\quad \xi_y = 0\,,\quad \xi_{xx} = 0\,,$
F) $\xi_y = 0\,,\quad \xi_{xx} = 0\,.$

IV.

Jetzt bestimmen wir alle unendlichen Gruppen von Punkttransformationen der xy-Ebene, deren Transformationen die Form

$$(\text{Const.} + \text{Const.}\, x + \text{Const.}\, x^2)\, p + \eta\,(xy)\, q$$

besitzen; dabei setzen wir voraus, dass die drei in ξ eingehenden Constanten von einander unabhängig sind. Wir wir wissen, finden wir alle diese Gruppen, indem wir nach und nach die sechs soeben gefundenen Gruppen vornehmen und jedesmal zu den Transformationen der betreffenden Gruppe in allgemeinster Weise eine infinitesimale Transformation von der Form

$$x^2 p + \eta\,(xy)\, q$$

hinzufügen.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,,\quad p\,,\quad xp + cyq\,,\quad x^2 p + \eta\,(xy)\, q$$

eine Gruppe, so kann η ohne weiteres gleich $2cxy$ gesetzt werden, und es ist daher

$$\boxed{Xq\,,\quad p\,,\quad xp + cyq\,,\quad x^2 p + 2cxyq}$$

eine kanonische Form der Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,,\quad X_1 yq\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2 p + \eta\,(xy)\, q$$

eine unendliche Gruppe, so kann η ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden, und es ist daher

$$\boxed{Xq\,,\quad X_1 yq\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2 p}$$

Form der Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,,\quad yq\,,\quad xyq\ \ldots\ x^m yq\,,$$
$$p\,,\quad xp\,,\quad x^2p+\eta(xy)\,q$$

eine unendliche Gruppe, so muss m gleich Null und η gleich cxy sein; die kanonische Form der Gruppe ist dementsprechend

$$\boxed{Xq\,,\quad yq\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p+cxyq}$$

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Xq\,,\quad X_1yq\,,\quad X_2y^2q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p+\eta q$$

eine unendliche Gruppe, so ist η eine ganze Function zweiten Grades von y und kann daher ohne weiteres gleich Null gesetzt werden. Die kanonische Form der Gruppe ist daher

$$\boxed{Xq\,,\quad X_1yq\,,\quad X_2y^2q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p}$$

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$Y(y)q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p+\eta q$$

eine unendliche Gruppe, so hängt η nur von y ab und kann somit gleich Null gesetzt werden. Es ist daher

$$\boxed{Y(y)q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p}$$

die kanonische Form der Gruppe.

Erzeugen die infinitesimalen Transformationen

$$\eta(xy)\,q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p+\varphi(xy)\,q$$

eine unendliche Gruppe, so kann φ gleich Null gesetzt werden, und dementsprechend ist

$$\boxed{\eta(xy)\,q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p}$$

die kanonische Form der Gruppe.

Unsere Resultate fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Satz. Transformirt eine unendliche Gruppe von Punkttransformationen der xy-Ebene die Curven einer invarianten Schaar $\varphi(xy)=a$ dreigliedrig, so kann die **Gruppe**

durch passende Coordinatenwahl auf eine unter den folgenden kanonischen Formen gebracht werden:

$$\boxed{Xq\,,\quad p\,,\quad xp+cyq\,,\quad x^2p+2cxyq}$$

$$\boxed{Xq\,,\quad X_1yq\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p}$$

$$\boxed{Xq\,,\quad yq\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p+cxyq}$$

$$\boxed{Xq\,,\ X_1yq\,,\ X_2y^2q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p}$$

$$\boxed{Y(y)q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p} \qquad \boxed{\eta(xy)q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p}$$

V.

Wir suchen jetzt alle unendlichen Gruppen, deren Transformationen die Geradenschaar $x = \text{Const.}$ invariant lassen und dabei die Veränderliche x durch eine unendliche Gruppe transformiren.

Indem wir dieses Problem in Angriff nehmen, beschränken wir uns zunächst auf den Fall, dass die gesuchte Gruppe:

$$\xi(x)p+\eta(xy)q$$

gar keine Transformation enthält, die alle Geraden $x = \text{Const.}$ invariant lässt; anders ausgesprochen, wir nehmen zunächst an, dass sobald ξ gleich Null wird, dann auch η verschwindet. Alle derartigen Gruppen enthalten sicher drei infinitesimale Transformationen, welche die Form

$$\begin{gathered} p+\eta(xy)q \\ xp+\eta_1(xy)q \\ x^2p+\eta_2(xy)q \end{gathered}$$

besitzen und überdies eine dreigliedrige Untergruppe erzeugen. Wir wissen überdies, dass diese dreigliedrige Untergruppe auf eine unter den folgenden Formen

$$\begin{gathered} p\,,\quad xp\,,\quad x^2p \\ p\,,\quad xp+yq,\quad x^2p+2xyq \\ p+q\,,\quad xp+yq\,,\quad x^2p+y^2q \end{gathered}$$

Im ersten Falle enthält die gesuchte unendliche Gruppe die infinitesimalen Transformationen:

$$V_3 f = x^3 p + \eta_3 q, \quad (p, x^3 p + \eta_3 q) = 3x^2 p + \frac{\partial \eta_3}{\partial x} q = 3x^2 p .$$

Es besitzt daher $V_3 f$ die Form

$$x^3 p + Y(y) q ,$$

und somit finden wir durch Klammeroperation die Transformationen

$$(x^2 p, \quad x^3 p + Yq) = x^4 p ,$$
$$(x^2 p, \quad x^4 p) = 2x^5 p$$

u. s. w. Unsere Annahmen führen daher auf die Gruppe

$$\boxed{\xi(x) p}$$

Nehmen wir jetzt an, dass die gesuchte unendliche Gruppe die dreigliedrige Untergruppe

$$V_1 f = p , \quad V_2 f = xp + yq , \quad V_3 f = x^2 p + 2xyq$$

enthält. Alsdann ist es leicht, eine vierte Transformation $V_4 f$ zu bestimmen, die die Form

$$x^3 p + \eta(xy) q$$

besitzt. Die Relationen

$$(p, \quad x^3 p + \eta q) = 3x^2 p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q ,$$

$$(xp + yq, \quad x^3 p + \eta q) = 2x^3 p + (x\eta_x + y\eta_y - \eta) q$$

zeigen nämlich, dass

$$\eta = 3x^2 y + cy^3 \qquad (c = \text{Const.})$$

und

$$x^3 p + \eta q = x^3 p + (3x^2 y + cy^3) q = V_4 f$$

ist.

Die bis jetzt gefundenen infinitesimalen Transformationen $V_1 f$, $V_2 f$, $V_3 f$, $V_4 f$ besitzen die gemeinsame Form

$$\alpha(x) p + (\alpha' y + \varkappa \alpha''' y^3) q .$$

Nun aber besteht die Formel:

$$(\alpha p + (\alpha' y + \varkappa \alpha''' y^3) q , \ \beta p + (\beta' y + \varkappa \beta''' y^3) q) =$$
$$= (\alpha \beta' - \alpha' \beta) p + ((\alpha \beta' - \alpha' \beta)' y + \varkappa (\alpha \beta' - \alpha' \beta)''' y^3) q ,$$

und also erkennen wir, indem wir zur Abkürzung

$$x^m p + ((x^m)' y + c(x^m)''' y^3) q = V_m f$$

setzen, dass die Transformationen

$$V_2V_3f - V_3V_2f = V_4f,$$
$$V_2V_4f - V_4V_2f = 2V_5f,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$V_2V_mf - V_mV_2f = (m-2)V_{m+1}f$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

welches auch die ganze Zahl m ist, sämmtlich unserer Gruppe angehören. In Folge dessen gehört auch jede Transformation, welche die Form

$$c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_mV_m + \cdots \qquad (c_k = \text{Const.})$$

besitzt, der Gruppe an, und es ist

$$\boxed{\xi(x)p + (\xi'y + \varkappa\xi'''y^3)q}$$

das allgemeine Symbol der infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe.

Wir wollen jetzt alle weiteren Gruppen

$$\xi(x)p + \eta(xy)q$$

bestimmen, welche keine Untergruppe enthalten, deren Transformationen die Form

$$\omega(xy)q$$

besitzen. Nach meinen Untersuchungen über endliche continuirliche Gruppen können wir annehmen, dass die gesuchte unendliche Gruppe eine dreigliedrige Untergruppe enthält, deren Transformationen die Form

$$V_0f = p, \quad V_1f = xp + yq,$$
$$V_2f = x^2p + (2xy + y^2)q$$

haben. Unsere unendliche Gruppe enthält überdies, welches auch die ganze Zahl m sein mag, immer eine Transformation V_mf, welche die Form

$$V_mf = x^mp + \zeta(xy)q$$

besitzt.

Durch Bildung der Klammerausdrücke

$$V_0V_3f - V_3V_0f,$$
$$V_1V_3f - V_3V_1f$$

erkennen wir, dass $V_3 f$ die Form

$$V_3 f = x^3 p + (3x^2 y + 3xy^2 + cy^3) q$$
$$(c = \text{Const.})$$

besitzt. Indem wir nun nach und nach die Klammerausdrücke

$$V_2 V_3 f - V_3 V_2 f,$$
$$V_2 V_4 f - V_4 V_2 f,$$
$$V_2 V_5 f - V_5 V_2 f \quad \text{u. s. w.}$$

bilden, erkennen wir, dass die Incremente ζ_m homogene ganze Functionen m^{ten} Grades in x und y:

$$\zeta_m = a_{m,m} x^m + a_{m,m-1} x^{m-1} y + \cdots a_{m,1} x y^{m-1} + a_{m,0} y^m$$

sind. Wir erhalten überdies für die Coefficienten $a_{m,0}$ die Werthe

$$a_{4,0} = c, \quad a_{5,0} = c, \; \ldots \; a_{m,0} = c.$$

Bilden wir andererseits den Ausdruck

$$V_3 V_4 f - V_4 V_3 f,$$

so erhalten wir für $a_{6,0}$ den Werth

$$a_{6,0} = c^2$$

und es ist daher

$$c = c^2,$$

sodass c entweder gleich Null oder 1 sein muss.

Ist $c = 0$, so haben $V_2 f$ und $V_3 f$ die Form:

$$V_2 f = x^2 p + (2xy + y^2) q,$$
$$V_3 f = x^3 p + (3x^2 y + 3xy^2) q,$$

und ich behaupte, dass $V_m f$ die Form

$$V_m f = x^m p + \left((x^m)' y + \frac{1}{2} (x^m)'' y^2\right) q$$

besitzt. Zum Beweis setzen wir

$$Uf = \alpha(x) p + \left(\alpha' y + \frac{1}{2} \alpha'' y^2\right) q,$$

$$Wf = \beta(x) p + \left(\beta' y + \frac{1}{2} \beta'' y^2\right) q$$

und bilden sodann den Klammerausdruck

$$UWf - WUf = (\alpha\beta' - \alpha'\beta) p + \left[(\alpha\beta' - \alpha'\beta)' y + \frac{1}{2} (\alpha\beta' - \alpha'\beta)'' y^2\right] q.$$

Setzen wir in dieser allgemeinen Formel $\alpha(x) = x^2$ und $\beta(x)$ nach und nach gleich x^3, x^4, x^5 ..., so sehen wir, dass unsere Formel

$$V_m f = x^m p + \left((x^m)' y + \frac{1}{2} (x^m)'' y^2\right) q$$

für $m = 3, 4, 5$ u. s. w. immer richtig ist.

Da nun andererseits jede Transformation

$$c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots + c_m V_m + \cdots$$

unserer Gruppe angehört, so erkennen wir, dass die allgemeine infinitesimale Transformation unserer Gruppe die Form

$$\boxed{\xi(x) p + \left(\xi' y + \frac{1}{2} \xi'' y^2\right) q}$$

besitzt.

Ist $c = 1$, so besitzen $V_2 f$ und $V_3 f$ die Form

$$V_2 f = x^2 p + (2xy + y^2) q,$$
$$V_3 f = x^3 p + (3x^2 y + 3xy^2 + y^3) q.$$

Führen wir hier $x + y$ als neues y ein, so erhalten $V_2 f$ und $V_3 f$ die einfachere Form

$$V_2 f = x^2 p + y^2 q,$$
$$V_3 f = x^3 p + y^3 q$$

und also kommt durch Klammeroperation

$$V_4 f = x^4 p + y^4 q,$$
$$V_5 f = x^5 p + y^5 q$$

und überhaupt

$$V_m f = x^m p + y^m q.$$

In dieser Weise finden wir die Gruppe

$$\varphi(x) p + \varphi(y) q,$$

die indess nicht in Betracht kommt, da sie nicht durch Differentialgleichungen definirt werden kann.

Wir müssen jetzt alle unendlichen Gruppen

$$\xi(x) p + \eta(xy) q$$

bestimmen, die eine invariante Untergruppe enthalten, deren Transformationen die Form $\eta_1(xy) q$ besitzen; dabei nehmen wir wie früher an, dass $\xi(x)$ eine arbiträre Function von x darstellt. Die besprochene invariante Untergruppe $\eta(xy) q$ kann endlich oder unendlich sein. Ist

sie endlich, so können wir ohne weiteres annehmen, dass sie entweder die Form

$$X_1(x)q \dots X_m(x)q \qquad (m > 0)$$

oder die Form

$$X_1 q \dots X_m q, \quad yq \qquad (m + 1 > 0)$$

oder aber die Form

$$q, \quad yq, \quad y^2 q \qquad .$$

besitzt. Ist die Untergruppe $\eta(xy)q$ dagegen unendlich, so besitzt sie eine unter den Formen

$$X(x)q; \qquad Xq, \quad X_1 yq;$$

$$Xq, \quad \alpha_1(x)yq \dots \alpha_m(x)yq;$$

$$Xq, \quad X_1 yq, \quad X_2 y^2 q; \qquad Y(y)q; \qquad \eta(xy)q.$$

Wir wollen diese neun Fälle der Reihe nach behandeln.

Besitzt die Untergruppe $\eta(xy)q$ die Form $X_1 q \dots X_m q$, so enthält die gesuchte unendliche Gruppe drei infinitesimale Transformationen

$$p + \eta(xy)q,$$

$$xp + \eta_1(xy)q,$$

$$x^2 p + \eta_2(xy)q,$$

die, mit den m Transformationen $X_1 q \dots X_m q$ vereinigt, eine $(m + 3)$-gliedrige Gruppe erzeugen, die die kanonische Form

$$q, \quad xq_1 \dots x^{r-1}q, \quad p, \quad 2xp + (r - 1)yq, \quad x^2 p + (r - 1)xyq$$

erhalten kann. Die gewünschte unendliche Gruppe enthält eine Transformation

$$H_3 = x^3 p + \eta(xy)q,$$

deren η Relationen von der Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = c_0 + c_1 x + \dots + c_{r-1} x^{r-1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3(r - 1)xy + d_0 + d_1 x + \dots + d_{r-1} x^{r-1}$$

erfüllt. Es besitzt daher H_3 die Form

$$H_3 = x^3 p + \left[\frac{3}{2}(r - 1)x^2 y + dx^r + ey\right]q;$$

nun aber ist

$$(x^{r-1}q, H_3) = \frac{1}{2}(r - 1)x^{r-1}q + ex^{r-1}q,$$

und also muss $r = 1$ sein.

Die früher besprochene Untergruppe hat daher die Form

$$q\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p$$

und die Relation

$$(xp\,,\ x^3p + (dx + ey)q) = 2x^3p + dxq$$

zeigt, dass $d = e = 0$ und

$$H_3 = x^3p$$

ist. Jetzt finden wir nach und nach die Transformationen

$$(x^2p\,,\ x^3p) = x^4p$$
$$(x^3p\,,\ x^4p) = 2x^5p$$
u. s. w.

und es ist daher

$$\boxed{q\,,\ X(x)p}$$

die kanonische Form unserer Gruppe.

Wir bestimmen jetzt alle unendlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen sich aus den folgenden

$$yq\,,\quad p\,,\quad xp\,,\quad x^2p + xyq$$
$$H_m = x^mp + \eta_m(xy)q \qquad (m = 3, 4 \ldots \infty)$$

linear ableiten lassen.

Das Increment η_3 muss die Gleichungen

$$\frac{\partial\eta_3}{\partial x} = 3xy + 2ky\,,$$
$$x\frac{\partial\eta_3}{\partial x} = 2\eta_3 + ly$$

erfüllen und besitzt daher die Form

$$H_3 = \frac{3}{2}x^2y + kxy - \frac{1}{2}ly\,,$$

wobei wir l ohne Beschränkung gleich Null setzen können, sodass H_3 die Form

$$H_3 = x^3p + \left(\frac{3}{2}x^2y + kxy\right)q$$

annimmt. Nun aber ist

$$(x^2p + xyq\,,\ H_3) = x^4p + (2x^3y + kx^2y)q = H_4$$

und

$$(p\,,\ H_4) = 4x^3p + (6x^2y + 2kxy)q\,,$$

woraus hervorgeht, dass $k = 0$ und

$$H_3 = x^3 p + \frac{3}{2} x^2 y q$$

$$H_4 = x^4 p + 2 x^3 y q$$

und überhaupt

$$H_m = x^m p + \frac{m}{2} x^{m-1} y q$$

ist. Unsere unendliche Gruppe besitzt daher die kanonische Gestalt

$$\boxed{yq, \quad \xi(x) p + \frac{1}{2} \xi' y q}$$

Wir bestimmen jetzt alle unendlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen sich aus den folgenden

$$q, \ xq \ldots \ x^{r-1} q, \ yq, \ p, \ xp, \ x^2 p + (r-1) x y q$$
$$H_m = x^m p + \eta_m q \qquad (m = 3, 4 \ldots \infty)$$

linear ableiten lassen.

Hier muss η_3 die Relationen

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial y} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{r-1} x^{r-1} + 2 c y$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial x} = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{r-1} x^{r-1} + d y + 3 (r-1) x y$$

$$x \frac{\partial \eta_3}{\partial x} = e_0 + e_1 x + \cdots + e_{r-1} x^{r-1} + e y + 2 \eta_3$$

$$y \frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \eta = m_0 + m_1 x + \cdots + m_{r-1} x^{r-1} + m y$$

erfüllen und daher ist

$$\eta_3 = \frac{3}{2} (r-1) x^2 y$$

und

$$H_3 = x^3 p + \frac{3}{2} (r-1) x^2 y q$$

Dabei zeigt die Gleichung

$$(x^{r-1} q, \ H_3) = \frac{r-1}{2} x^{r+1} q,$$

dass $r = 1$ sein muss. Es wird daher

$$H_3 = x^3 p, \quad H_4 = x^4 p, \ \ldots \ H_m = x^m p$$

und es ist dementsprechend

$$\boxed{q, \ yq, \ \xi(x) p}$$

die kanonische Form unserer Gruppe.

Lassen sich alle infinitesimalen Transformationen einer unendlichen Gruppe aus Transformationen linear ableiten, die die Form

$$q\,,\quad yq\,,\quad y^2q\,,\quad H_m = x^m p + \eta(xy)\,q$$
$$(m = 1, 2, 3 \ldots \infty)$$

besitzen, so ergiebt sich unmittelbar durch Klammeroperation, dass alle η_m gleich Null gesetzt werden können.

Es ist daher

$$\boxed{q\,,\ yq\,,\ y^2q\,,\ \xi(x)p}$$

die kanonische Form der betreffenden Gruppe.

Jetzt suchen wir alle unendlichen Gruppen $\xi(x)p + \eta(xy)q$ mit einer arbiträren Function $\xi(x)$, die eine invariante unendliche Untergruppe von der Form $\eta(xy)\,q$ enthält.

Enthält die unendliche Gruppe $\xi(x)p + \eta q$ die unendliche Untergruppe $X(x)\,q$, so muss η in y linear sein, und wir können daher ohne Weiteres

$$\eta = y\cdot\alpha(x)$$

setzen. Dabei ist klar, dass die infinitesimalen Transformationen

$$\xi(x)p + y\cdot\alpha(x)q$$

für sich allein eine unendliche Gruppe erzeugen. Setzen wir nun

$$x^m p + y\varphi_m(x)\,q = H_m\,,$$

so können wir offenbar

$$H_0 = p\,,\quad H_1 = xp + cyq$$
$$H_2 = x^2p + 2cxyq\,,\quad H_3 = x^3p + 3cxyq$$

und überhaupt

$$H_m = x^m p + cmx^{m-1}yq$$

setzen. Unsere Gruppe kann daher die kanonische Form:

$$\boxed{X(x)\,q\,,\quad \xi(x)p + c\xi' yq}$$

erhalten. Wir bemerken ausdrücklich, dass die Constante c wesentlich ist und nicht durch Änderung der Veränderlichen particularisirt werden kann.

Enthält eine unendliche Gruppe: $\xi(x)p + \eta q$ mit der arbiträren Function $\xi(x)$ die unendliche Gruppe Xq, $X_1 yq$, so muss η die Form

$$\eta = \alpha(x)y + \beta(x)$$

haben und kann daher gleich Null gesetzt werden. Die gesuchte unendliche Gruppe kann daher die kanonische Form

$$\boxed{X(x)q\,,\quad X_1(x)yq\,,\quad \xi(x)p}$$

erhalten.

Enthält eine unendliche Gruppe $\xi(x)p + \eta q$ mit der arbiträren Function $\xi(x)$ die unendliche Untergruppe Xq, $X_1 yq$, $X_2 y^2 q$, so kann η gleich Null gesetzt werden, so dass die Gruppe die kanonische Form

$$\boxed{Xq,\quad X_1 yq,\quad X_2 y^2 q,\quad \xi(x)p}$$

erhält.

Enthält eine unendliche Gruppe $\xi(x)p + \eta q$ die unendliche Untergruppe $Y(y)q$, so kann η gleich Null gesetzt werden; gleichzeitig erhält die gesuchte Gruppe die kanonische Gestalt

$$\boxed{Y(y)q\,,\quad \xi(x)p}$$

Enthält eine unendliche Gruppe $\xi(x)p + \zeta(xy)q$ die unendliche Untergruppe $\eta(xy)q$, so ist

$$\boxed{\eta(xy)q\,,\quad \xi(x)p}$$

die kanonische Form der Gruppe.

Endlich müssen wir alle unendlichen Gruppen $\xi(x)p + \eta(xy)q$ bestimmen, die eine unendliche Untergruppe

$$Xq\,,\quad \alpha_1(x)yq \ldots \quad \alpha_m(x)yq$$

enthalten. Die Transformationen dieser Untergruppe zusammen mit den drei Transformationen

$$p + \eta q\,,\quad xp + \eta_1 q\,,\quad x^2 p + \eta_2 q$$

bilden eine grössere Untergruppe, die nach unseren früheren Ergebnissen die kanonische Form

$$Xq,\quad yq\,,\quad p,\quad xp,\quad x^2 p + cxyq$$

erhalten kann. Die gesuchte unendliche Gruppe enthält eine Transformation

$$H_3 = x^3 p + \frac{3}{2} c x^2 y q ,$$

die durch Combination mit H_2 die Transformation

$$H_4 = x^4 p + 2 c x^3 y q$$

liefert. In dieser Weise erkennen wir, dass unsere Gruppe die kanonische Form

$$\boxed{Xq , \quad yq , \quad \xi(x) p + k \xi' y q}$$

erhalten kann.

Indem wir jetzt unsere Resultate zusammenfassen, heben wir zunächst hervor, dass die gefundenen imprimitiven Gruppen sich naturgemäss in zwei Kategorien anordnen lassen, jenachdem die Transformationen der betreffenden Gruppe nur eine Curvenschaar oder aber zwei Curvenschaaren invariant lassen.

Wir stellen zunächst diejenigen unendlichen Gruppen zusammen, bei denen zwei Curvenschaaren invariant bleiben; wir wählen $x =$ Const. und $y =$ Const. als Gleichungen der invarianten Curvenschaaren.

Unendliche Grupen von Punkttransformationen, bei denen zwei Curvenschaaren invariant bleiben[1]).

$$\boxed{X(x) p} = \boxed{Y(y) q}$$

$$\boxed{q , \quad X(x) p} = \boxed{Y(y) q , \quad p}$$

$$\boxed{q , \quad yq , \quad Xp} = \boxed{Yq , \quad p , \quad xp}$$

$$\boxed{q , \quad yq , \quad y^2 q , \quad Xp} = \boxed{Yq , \quad p , \quad xp , \quad x^2 p}$$

$$\boxed{X(x) p \quad Y(y) q}$$

---

1) Wir bemerken, dass die Bestimmung aller unendlichen Gruppen, deren infinitesimale Transformationen die Form

$$\xi(x) p + \eta(y) q$$

besitzen, im Grunde *unmittelbar* aus meiner alten Bestimmung aller endlichen Gruppen in einer Veränderlichen hervorgeht.

Unendliche Gruppen von Punkttransformationen, bei denen nur eine Curvenschaar $x = \text{Const.}$ invariant bleibt.

I.

$\boxed{Xq}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq}$ $\boxed{X_1q,\ X_1yq,\ X_2y^2q}$

$\boxed{Xq,\ \alpha_1(x)yq \ldots \alpha_m(x)yq}$ $\boxed{\eta(xy)q}$

II.

$\boxed{Xq,\ p}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ p}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ X_2y^2q,\ p}$

$\boxed{\begin{array}{l} e^{\alpha_k x}yq \ldots\ldots x^{m_k}e^{\alpha_k x}yq \\ Xq,\ p \quad (k = 1, 2 \ldots) \end{array}}$ $\boxed{\eta(xy)q,\ p}$

III.

$\boxed{Xq,\ p,\ xp + cyq}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ p,\ xp}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ X_2y^2q,\ p,\ xp}$

$\boxed{Xq,\ yq,\ xyq \ldots x^m yq,\ p,\ xp}$ $\boxed{\eta(xy)q,\ p,\ xp}$

IV.

$\boxed{Xq,\ p,\ xp + cyq,\ x^2p + 2cxyq}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ p,\ xp,\ x^2p}$

$\boxed{Xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + cxyq}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ X_2y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p}$

$\boxed{\eta(xy)q,\ p,\ xp,\ x^2p}$

V.

$\boxed{Xp + (X'y + kX'''y^3)q}$ $\boxed{Xp + (X'y + \tfrac{1}{2}X''y^2)q}$

$\boxed{yq,\ Xp + \tfrac{1}{2}X'yq}$ $\boxed{X_1q,\ Xp + cX'yq}$ $\boxed{X_1q,\ yq,\ Xp + kX'yq}$

$\boxed{Xq,\ X_1yq,\ \xi(x)p}$ $\boxed{Xq,\ X_1yq,\ X_2y^2q,\ \xi(x)p}$ $\boxed{\eta(xy)q,\ \xi(x)p}$

Capitel II.

Alle unendlichen Gruppen von Punkttransformationen, die im Infinitesimalen die grösstmögliche Transitivität besitzen.

Wir suchen hier alle unendlichen continuirlichen Gruppen des Raumes von n Dimensionen, bei denen die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in möglichst allgemeiner Weise also $(nn - 1)$-gliedrig transformirt werden. Wir werden finden, dass auch diese Gruppen auf sehr einfache Normalformen gebracht werden können. Besonders merkwürdig ist es, dass die Bestimmung dieser unendlichen continuirlichen Gruppen in der Ebene zu dem Begriffe Flächeninhalt und in höheren Räumen zu dem Begriffe Rauminhalt führt, während die Bestimmung der entsprechenden endlichen continuirlichen Gruppen zur projectiven Geometrie führt (vgl. Th. d. Trfsgr. I, Kap. 29).

Es sei der Coordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage und $x_1' \dots x_n'$ seien die homogenen Coordinaten der hindurchgehenden Linienelemente. Soll eine continuirliche Gruppe G so beschaffen sein, dass diese Linienelemente bei Festhaltung des Coordinatenanfangs in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, so sind, wie a. a. O. gezeigt ist, nur zwei Fälle möglich: entweder enthält die lineare homogene Gruppe $\mathfrak{G}$ in den x', die angiebt, wie die bewussten Linienelemente transformirt werden, überhaupt alle nn infinitesimalen Transformationen: $x_i'p_\nu'$, oder sie enthält nur $nn - 1$ unabhängige von der Form:

$$x_i'p_k', \quad x_i'p_i' - x_k'p_k' \qquad (i \neq k).$$

In beiden Fällen ist überdies sicher, dass die Gruppe G transitiv ist, dass sie also in der Umgebung des Coordinatenanfangs n unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_n + \cdots$$

von nullter Ordnung in den x enthält. Unter den Definitionsgleichungen für die infinitesimalen Transformationen von G giebt es daher jedenfalls keine von nullter Ordnung.

Wir werden jetzt zeigen, dass jedem dieser beiden Fälle unendlich viele unendliche continuirliche Gruppen entsprechen, die auf eine gemeinsame äusserst einfache kanonische Form gebracht werden können. Dabei nehmen wir $n > 1$ an, da der Fall $n = 1$ gar keine Schwierigkeiten bietet.

§ 1.

Enthält die lineare homogene Gruppe $\mathfrak{G}$ alle nn infinitesimalen Transformationen $x_i' p_k'$, so giebt es (s. Th. d. Trfsgr. I, Kap. 11) unter den Definitionsgleichungen für die infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^n \xi_i(x_1 \dots x_n) p_i$$

der Gruppe G sicher keine von erster Ordnung. Wäre nun unter diesen Definitionsgleichungen auch keine von zweiter Ordnung vorhanden, so enthielte also G in der Umgebung des Coordinatenanfangs nicht blos nn infinitesimale Transformationen erster Ordnung von der Form:

$$x_i p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \dots n),$$

sondern auch $\frac{nn(n+1)}{1.2}$ Transformationen zweiter Ordnung von der Form:

$$x_i x_k p_j + \cdots \qquad (i, k, j = 1 \dots n).$$

Sehen wir zu, was sich hieraus für weitere Transformationen ergeben.

Da $n > 1$ angenommen ist, so bekommen wir zunächst durch Combination der beiden Transformationen: $x_i x_k p_i + \cdots$ und $x_i^2 p_k + \cdots$ $(i \neq k)$ eine Transformation dritter Ordnung von der Form:

$$-x_i^3 p_i + 2x_i^2 x_k p_k + \cdots,$$

ferner durch Combination von $x_i^2 p_k + \cdots$ und $x_k^2 p_k + \cdots$ eine Transformation:

$$2x_i^2 x_k p_k + \cdots.$$

Unsere Gruppe enthält also auch eine Transformation von der Gestalt: $x_i^3 p_i + \cdots$, woraus sich durch wiederholte Combination mit $x_i^2 p_i + \cdots$ für jede ganze Zahl $m \geqq 1$ das Vorhandensein einer Transformation:

$$x_i^m p_i + \cdots$$

ergiebt. Combinirt man aber diese Transformation der Reihe nach α_1-mal mit $x_1 p_i + \cdots$, α_2-mal mit $x_2 p_i + \cdots$, und so weiter, und

wählt man die ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ auf alle möglichen Weisen so, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$$

ist, so erkennt man, dass unsere Gruppe überhaupt jede Transformation von der Form:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} p_i + \cdots \qquad (i = 1 \dots n)$$

enthält, in der die Summe der Exponenten $\alpha_1 \dots \alpha_n$ gleich m ist. Da aber m jede positive ganze Zahl $\geqq 1$ sein kann, so ist hiermit bewiesen, dass die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe G überhaupt keine Definitionsgleichung erfüllen, mit andern Worten: G ist unter den gemachten Voraussetzungen die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen.

Wir erhalten somit als erstes wichtiges Ergebniss den

Satz I. Unter den Definitionsgleichungen einer continuirlichen Gruppe, die nicht mit der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen zusammenfällt, giebt es stets mindestens eine Gleichung von nullter oder von erster oder von zweiter Ordnung.

§ 2.

Wir können von jetzt ab annehmen, dass unsere Gruppe G nicht mit der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen zusammenfällt. Unter ihren Definitionsgleichungen kommt dann sicher mindestens eine von zweiter Ordnung vor, G kann also in der Umgebung des Coordinatenanfangs nicht $\frac{1}{2}nn(n+1)$ infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung von der Form:

(A) $$x_i x_k p_j + \cdots \qquad (i, k, j = 1 \dots n)$$

enthalten. Dagegen steht nach dem Früheren fest, dass G n Transformationen nullter Ordnung:

(B) $$p_i + \cdots \qquad (i = 1 \dots n)$$

und mindestens $nn - 1$ Transformationen erster Ordnung von der Form:

(C) $$x_i p_k + \cdots, \quad x_i p_i - x_k p_k + \cdots \qquad (i, k, = 1 \dots n;\ i \neq k)$$

enthält. Ist die oben erwähnte lineare homogene Gruppe $\mathfrak{G}$ $(nn-1)$-gliedrig, so sind damit alle Transformationen erster Ordnung von G erschöpft, ist aber $\mathfrak{G}$ nn-gliederig; so kommt noch eine Transformation erster Ordnung von der Form:

$$\text{(D)} \qquad x_1p_1 + \cdots + x_np_n + \cdots$$

hinzu.

Es gilt nun festzustellen, was für infinitesimale Transformationen zweiter und höherer Ordnung in unserer Gruppe G vorkommen. Zum Glück brauchen wir bei dieser Untersuchung vorläufig noch nicht zu berücksichtigen, ob G eine Transformation von der Form (D) enthält oder nicht. Wir brauchen zunächst blos zu untersuchen, was für infinitesimale Transformationen zweiter und höherer Ordnung eine unendliche continuirliche Gruppe G enthalten kann, von der nur bekannt ist, dass sie n Transformationen nullter Ordnung (B) und $nn-1$ Transformationen erster Ordnung (C) enthält, dass sie dagegen nicht $\frac{1}{2}nn(n+1)$ Transformationen zweiter Ordnung von der Form (A) enthält.

Da G unendlich sein soll, so muss es infinitesimale Transformationen von jeder beliebig hohen Ordnung enthalten. Es sei also:

$$Xf = \sum_1^n{}_i\, g_i^{(m)}(x_1 \ldots x_n)p_i + \cdots$$

eine infinitesimale Transformation von m^{ter} Ordnung, wo m eine beliebige ganze Zahl >1 bedeutet und wo die $g_i^{(m)}$ ganze homogene Functionen m^{ter} Ordnung sind, während die weggelassenen Glieder von höherer als m^{ter} Ordnung sind.

Wir können hier immer annehmen, dass $g_1^{(m)} \neq 0$ ist, wäre nämlich $g_1^{(m)} = 0$, aber etwa $g_2^{(m)} \neq 0$, so wäre:

$$\left(\sum_2^n{}_i\, g_i^{(m)}p_i + \cdots,\ x_2p_1 + \cdots\right) = g_2^{(m)}p_1 - \sum_2^n{}_i\, x_2 \frac{\partial g_i^{(m)}}{\partial x_1} p_i + \cdots$$

eine unserer Gruppe angehörige infinitesimale Transformation m^{ter} Ordnung, bei der unsere Annahme erfüllt ist. Wir setzen also $g_1^{(m)}$ als von Null verschieden voraus und combiniren Xf nach einander mit $x_1p_k + \cdots$ $(k = 2 \ldots n)$ und zwar mit jeder dieser Transformationen gerade so oft, dass das betreffende x_k aus den Gliedern m^{ter} Ordnung

in dem Factor von p_1 wegfällt. Auf diese Weise erhalten wir schliesslich eine Transformation m^{ter} Ordnung von der Form:

$$x_1^m p_1 + \sum_2^n i \gamma_i^{(m)}(x_1 \dots x_n) p_i + \cdots .$$

Diese Transformation combiniren wir wieder mit allen $x_1 p_1 - x_\nu p_\nu + \cdots$ $(\nu = 2 \dots n)$ und erkennen so, genau wie auf S. 622 f. von Trfsgr. I das Vorhandensein einer Transformation:

$$Yf = x_1^m p_1 + \sum_2^n i A_i^{(m)} x_1^{m-1} x_i p_i + \cdots ,$$

durch deren Combination mit $x_1 p_k + \cdots$ $(k > 1)$ sich noch die Transformation:

$$(A_k^{(m)} - 1) x_1^m p_k + \cdots \qquad (k > 1)$$

ergiebt.

Nehmen wir zunächst an, es seien für ein gewisses $m > 2$ alle $A_i^{(m)} = 1$.

Unsere Transformation Yf besässe dann die Form:

$$\mathfrak{Y}f = x_1^{m-1}(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots ,$$

es käme also durch Combination mit $x_k p_1 + \cdots$ $(k > 1)$

$$(m - 1) x_1^{m-2} x_k (x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots$$

und durch Wiederholung dieses Verfahrens schliesslich:

$$x_k^{m-1}(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \qquad (k = 1 \dots n).$$

Durch Combination mit $p_j + \cdots$ $(j \neq k)$ ergäbe sich weiter:

$$x_k^{m-1} p_j + \cdots \qquad (k \neq j),$$

wo k und j zwei ganz beliebige von einander verschiedene unter den Zahlen $1 \dots n$ sind.

Aus $\mathfrak{Y}f$ könnten wir ferner durch mehrmalige Combination mit $p_1 + \cdots$ nach und nach die Transformationen:

$$\begin{array}{l} m x_1^{m-1} p_1 + (m - 1) x_1^{m-2}(x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \\ m x_1^{m-2} p_1 + (m - 2) x_1^{m-3}(x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m x_1^2 p_1 \quad + \qquad 2 x_1 (x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + \cdots \end{array}$$

ableiten. Von diesen ergäbe die letzte mit $x_1 p_k + \cdots$ $(k > 1)$ combinir:

$$(2 - m) x_1^2 p_k + \cdots ,$$

so dass, da $m > 2$ sein sollte, die Transformation:

$$x_1^2 p_k + \cdots$$

vorkäme.

Nun aber ist:

$$(x_k p_1 + \cdots,\ x_1^2 p_k + \cdots) = -x_1^2 p_1 + 2x_1 x_k p_k + \cdots \quad (k > 2),$$

also erhielten wir durch Addition die Transformation:

$$-(n-1)x_1^2 p_1 + 2x_1(x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + \cdots$$

und wenn diese von der Transformation:

$$m x_1^2 p_1 + 2x_1(x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n) + \cdots$$

abgezogen würde, die nachstehende:

$$(n + m - 1)x_1^2 p_1 + \cdots,$$

also auch die Transformation:

$$x_1^2 p_1 + \cdots,$$

und da die Zahl 1 in den vorstehenden Ueberlegungen nichts ausgezeichnetes hat, überhaupt n Transformationen von der Form:

$$x_k^2 p_k + \cdots \quad (k = 1 \ldots n).$$

Für $i \neq k$ ergäbe sich nunmehr:

$$(x_i p_k + \cdots,\quad x_k^2 p_k + \cdots) = 2x_i x_k p_k + \cdots$$

$$(x_i p_k + \cdots,\ x_i x_k p_k + \cdots) = x_i^2 p_k + \cdots$$

und endlich, wenn $n > 2$ ist und j eine von i und k verschiedene Zahl bedeutet:

$$(x_j p_k + \cdots,\ x_i x_k p_k + \cdots) = x_i x_j p_k + \cdots.$$

Unsere Gruppe G enthielte demnach unter der gemachten Voraussetzung gerade $\frac{1}{2} nn(n+1)$ infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung von der Form (A), was mit dem zu Anfang des Paragraphen Gesagten in Widerspruch stände. Folglich ist die Annahme, dass für ein gewisses $m > 2$ in der Transformation Yf alle $A_i^{(m)} = 1$ seien, unzulässig.

Da in der Transformation:

$$Yf = x_1^m p_1 + \sum_2^n {}_i A_i^{(m)} x_1^{m-1} x_i p_i + \cdots$$

für $m > 2$ niemals alle $A_i^{(m)} = 1$ sein können, so dürfen wir an-

nehmen, dass etwa $A_2^{(m)} \neq 1$ ist, und sind daher nach S. 85 sicher, dass eine Transformation:

$$x_1^m p_2 + \cdots$$

vorkommt. Nun ist:

$$(x_1^m p_2 + \cdots,\ x_2 p_1 + \cdots) = x_1^m p_1 - m x_1^{m-1} x_2 p_2 + \cdots.$$

ferner:

$$(x_2 p_1 + \cdots,\ x_1^m p_1 - m x_1^{m-1} x_2 p_2 + \cdots)$$
$$= 2 m x_1^{m-1} x_2 p_1 - m(m-1) x_1^{m-2} x_2^2 p_2 + \cdots$$

und diese beiden Formeln sind offenbar besondere Fälle der allgemeinen Formel:

$$(x_2 p_1 + \cdots,\ (\mu+1) x_1^{m-\mu} x_2^\mu p_1 - (m-\mu) x_1^{m-\mu-1} x^{\mu+1} p_2 + \cdots) =$$
$$= (m-\mu)\{(\mu+2) x_1^{m-\mu-1} x_2^{\mu+1} p_1 - (m-\mu-1) x_1^{m-\mu-2} x_2^{\mu+2} p_2\} + \cdots,$$

also enthält unsere Gruppe G zugleich mit $x_1^m p_2 + \cdots$ auch noch $m+1$ Transformationen von der Gestalt:

$$(\mu+1) x_1^{m-\mu} x_2^\mu p_1 - (m-\mu) x_1^{m-\mu-1} x_2^{\mu+1} p_2 + \cdots$$
$$(\mu = 0,\ 1 \ldots m),$$

also insbesondere eine Transformation:

$$x_2^m p_1 + \cdots.$$

Ist $n > 2$, so bilden wir für $i > 2$

$$(x_1^m p_2 + \cdots,\ x_2 p_i + \cdots) = x_1^m p_i + \cdots,$$
$$(x_2^m p_1 + \cdots,\ x_1 p_i + \cdots) = x_2^m p_i + \cdots,$$

schliessen daraus in der eben geschilderten Weise auf das Vorhandensein von Transformationen von der Form:

$$x_i^m p_1 + \cdots,\ x_i^m p_2 + \cdots \qquad (i > 2)$$

und finden endlich wegen der Gleichung:

$$(x_i^m p_1 + \cdots,\ x_1 p_k + \cdots) = x_i^m p_k + \cdots \qquad (k \neq 1, i),$$

dass unsere Gruppe $n(n-1)$ Transformationen von der Form:

$$x_i^m p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \ldots n;\ i \neq k)$$

enthält.

Ich habe hier die Rechnung so eingerichtet, dass der Fall $n = 2$ mit berücksichtigt wird, obwohl das nicht nöthig gewesen wäre, da ich diesen Fall schon 1884 (Ges. d. Wiss. zu Christiania) erledigt habe. Beschränkt man sich auf den Fall $n > 2$, so kommt man schneller zum Ziel. Es ist nämlich für $k > 2$:

$$(x_1^m p_2 + \cdots,\ x_2 p_k + \cdots) = x_1^m p_k + \cdots,$$

andererseits aber:

$$(x_k p_1 + \cdots,\ x_1^m p_2 + \cdots) = m x_1^{m-1} x_k p_2 + \cdots,$$

$$(x_k p_1 + \cdots,\ x_1^{m-1} x_k p_2 + \cdots) = (m-1)\, x_1^{m-2} x_k^2 p_2 + \cdots,$$

also bekommen wir schliesslich: $x_k^m p_2 + \cdots$, endlich wird, wenn i, k und 2 drei verschiedene Zahlen sind:

$$(x_k^m p_2 + \cdots,\ x_2 p_i + \cdots) = x_k^m p_i + \cdots$$

und so weiter.

Aus den Transformationen: $x_i^m p_k + \cdots$ $(i \neq k)$ ergeben sich, da $m > 2$ ist, durch Combination mit $p_i + \cdots$ die $n(n-1)$ Transformationen zweiter Ordnung:

$$x_i^2 p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \dots n;\ i \neq k);$$

ferner finden wir

$$(x_i^2 p_k + \cdots,\ x_k p_i + \cdots) = x_i^2 p_i - 2 x_i x_k p_k + \cdots$$

und endlich, wenn $n > 2$ ist und i, k, j drei verschiedene Zahlen bedeuten:

$$(x_j p_i + \cdots,\ x_i^2 p_k + \cdots) = 2 x_j x_i p_k + \cdots.$$

Folglich sind in unserer Gruppe G jedenfalls die nachstehenden Transformationen zweiter Ordnung:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} x_i^2 p_k + \cdots,\ x_i^2 p_i - 2 x_i x_k p_k + \cdots,\ x_j x_i p_k + \cdots \\ (i, k, j = 1 \dots n;\ i \neq k,\ k \neq j,\ j \neq i) \end{cases}$$

enthalten.

Es fragt sich jetzt, ob ausser diesen noch andere Transformationen zweiter Ordnung auftreten können.

Vermöge der Transformationen (E) können wir aus jeder etwa noch hinzukommenden Transformation zweiter Ordnung alle Glieder zweiter Ordnung wegschaffen, die eine der Formen: $x_j x_i p_k$, $x_i x_k p_k$, $x_i^2 p_k$ besitzen, unter i, k, j drei verschiedene Zahlen verstanden. Folglich können wir annehmen, dass die hinzukommende Transformation zweiter Ordnung so lautet:

$$\sum_1^n {}^i\, a_i x_i^2 p_i + \cdots.$$

Wäre hier etwa $a_k \neq 0$, so combinirten wir mit: $x_\nu p_k + \cdots$ $(\nu \neq k)$ und fänden die Transformation:

$$2 a_k x_k x_\nu p_k - a_\nu x_\nu^2 p_k + \cdots,$$

so dass unsere Gruppe die $n - 1$ Transformationen:

$$x_k x_\nu p_k + \cdots \quad (\nu \neq k)$$

enthielte. Wegen (E) enthielte sie aber dann zugleich die $n - 1$ Transformationen:

$$x_\nu^2 p_\nu + \cdots \quad (\nu \neq k)$$

und, da a_k von Null verschieden sein sollte, offenbar auch noch:

$$x_k^2 p_k + \cdots,$$

hieraus aber würde folgen, dass sie $\frac{1}{2} nn(n+1)$ Transformationen zweiter Ordnung von der Form (A) enthielte, was nach S. 83 ausgeschlossen ist. Folglich können zu den schon bekannten Transformationen zweiter Ordnung (E) keine neuen hinzutreten.

Wir haben im Vorstehenden nur den Umstand benutzt, dass G $nn - 1$ Transformationen erster Ordnung von der Form:

$$x_i p_k + \cdots, \quad x_i p_i - x_k p_k + \cdots$$

enthält; ob die Transformation: $\Sigma x_\nu p_\nu + \cdots$ auftritt oder nicht, das kam nicht in Betracht, denn wir haben bei allen Klammeroperationen nur Transformationen erster Ordnung von der Form (C) angewendet. Es wäre nun noch denkbar, dass sich aus den Transformationen zweiter Ordnung (E) durch Combination mit: $p_1 + \cdots, \cdots, p_n + \cdots$ eine Transformation von der Form: $\Sigma x_\nu p_\nu + \cdots$ ergäbe. Man überzeugt sich aber leicht, dass das nicht der Fall ist und dass man durch diese Operationen nur Transformationen erster Ordnung von der Form (C) bekommt. Demnach können wir sagen:

Jede unendliche continuirliche Gruppe G von der verlangten Beschaffenheit, die nicht mit der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen zusammenfällt, enthält $\frac{1}{2} n(n-1)(n+2)$ infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung von der Form (E), und in jeder anderen Transformation zweiter Ordnung, die der Gruppe angehört, lassen sich die Glieder zweiter Ordnung aus den Gliedern zweiter Ordnung der Transformationen (E) linear ableiten. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Gruppe eine infinitesimale Transformation erster Ordnung von der Form: $\Sigma x_\nu p_\nu + \cdots$ enthält oder nicht.

§ 3.

Was wir im vorigen Paragraphen für den Coordinatenanfang bewiesen haben, das überträgt sich natürlich auf jeden beliebigen anderen Punkt: $x_1^0 \dots x_n^0$ von allgemeiner Lage. Unsere Gruppe G enthält daher in der Umgebung eines solchen Punktes n infinitesimale Transformationen von nullter Ordnung in den $x_k - x_k^0$, ferner entweder $nn - 1$ oder nn infinitesimale Transformationen erster und ausserdem in jedem Falle $\frac{1}{2}n(n-1)(n+2)$ von zweiter Ordnung. Die Anfangsglieder in den Reihenentwickelungen dieser infinitesimalen Transformationen erhält man aus den Reihenentwickelungen in der Umgebung des Coordinatenanfangs, wenn man für $x_1 \dots x_n$ der Reihe nach: $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$ einsetzt.

Da wir die Anfangsglieder der infinitesimalen Transformationen erster und zweiter Ordnung kennen, die in der Umgebung eines beliebigen Punktes von allgemeiner Lage auftreten, so sind wir im Stande, etwas darüber auszusagen, welche Form die Definitionsgleichungen erster und zweiter Ordnung unserer Gruppe G besitzen.

Enthält G in der Umgebung von $x_1^0 \dots x_n^0$ blos $nn - 1$ infinitesimale Transformationen erster Ordnung, aus denen sich keine von höherer Ordnung linear ableiten lässt, so giebt es unter den Definitionsgleichungen von G eine und nur eine von erster Ordnung. Nun hat in diesem Falle die allgemeine infinitesimale Transformation erster Ordnung von G die Form:

$$\sum_1^n{}' \xi_\nu p_\nu = \sum_{i \neq \nu}^{1..n}{}' a_{i\nu}(x_i - x_i^0)p_\nu + \sum_{i \neq \nu}^{1...n}{}' b_{i\nu}\{(x_i - x_i^0)p_i - (x_\nu - x_\nu^0)p_\nu\} + \cdots,$$

wo die $a_{i\nu}$ und die $b_{i\nu}$ ganz willkürlich sind; bildet man daher die Ausdrücke:

$$\left[\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i}\right]_{x=x^0},$$

so sieht man sofort, dass zwischen diesen eine und nur eine Relation besteht, nämlich diese:

$$\text{(F)} \qquad \sum_1^n{}' \left[\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu}\right]_{x=x^0} = 0,$$

die von dem Punkte $x_1^0 \dots x_n^0$ ganz unabhängig sind. Demnach muss die Definitionsgleichung erster Ordnung unserer Gruppe so beschaffen

sein, dass sie, sobald $\xi_1 \dots \xi_n$ für $x_i = x_i^0$ verschwinden, bei der Substitution: $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$ in die Gleichung (F) übergeht. Das aber ist offenbar nur möglich, wenn sie die Form:

$$\text{(K)} \qquad \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_1^n {}^\nu \alpha_\nu (x_1 \dots x_n)\, \xi_\nu$$

besitzt, wo $\alpha_1 \dots \alpha_n$ gewisse Functionen sind, die sich in der Umgebung von $x_1^0 \dots x_n^0$ regulär verhalten.

Unter den Definitionsgleichungen zweiter Ordnung von G müssen jedenfalls die n vorkommen, die aus (K) durch Differentiation nach $x_1 \dots x_n$ entstehen:

$$\text{(L)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^n {}^\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_1^n {}^\nu \left(\alpha_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_i} \xi_\nu \right) \quad (i = 1 \dots n);$$

es ist aber leicht zu zeigen, dass ausser diesen n keine weiteren Definitionsgleichungen zweiter Ordnung auftreten können. In der That, in n Veränderlichen giebt es überhaupt $\frac{1}{2} nn(n+1)$ unabhängige infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung, aus denen sich keine von dritter oder höherer Ordnung linear ableiten lässt Unsere Gruppe G enthält aber solcher Transformationen gerade:

$$\frac{1}{2} n(n-1)(n+2) = \frac{1}{2} nn(n+1) - n,$$

also muss die Zahl ihrer Definitionsgleichungen zweiter Ordnung gerade gleich n sein, worin offenbar liegt, dass die Gleichungen (K) die einzigen Definitionsgleichungen zweiter Ordnung sind.

Enthält andererseits G in der Umgebung von $x_1^0 \dots x_n^0$ gerade nn infinitesimale Transformationen erster Ordnung, aus denen sich keine von höherer Ordnung linear ableiten lässt, so giebt es unter den Definitionsgleichungen von G sicher keine von erster Ordnung, dagegen muss es gerade n unabhängige Definitionsgleichungen zweiter Ordnung geben, denn die Anfangsglieder der infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung von G sind genau dieselben wie im vorigen Falle und der vorhin gemachte Schluss über die Zahl der Definitionsgleichungen zweiter Ordnung bleibt auch jetzt in Kraft. Überdies ergiebt sich leicht, dass diese Definitionsgleichungen zweiter Ordnung die Form:

$$\text{(M)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu\tau}^{1\ldots n} \alpha_{i\nu\tau} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\tau} + \sum_{\nu}^{1\ldots n} \beta_{i\nu} \xi_\nu \\ (i = 1 \ldots n) \end{cases}$$

besitzen, wo die $\alpha_{i\nu\tau}$ und $\beta_{i\nu}$ gewisse Functionen von $x_1 \ldots x_n$ sind. Denkt man sich nämlich $\xi_1 \ldots \xi_n$ so gewählt, dass sie mit Gliedern zweiter Ordnung in den $x_i - x_i^0$ anfangen, setzt man diese Werthe von $\xi_1 \ldots \xi_n$ in die Definitionsgleichungen zweiter Ordnung von G ein, und macht man dann noch die Substitution: $x_i = x_i^0$, so muss dasselbe herauskommen, als hätte man die eben beschriebenen Operationen auf die Definitionsgleichungen zweiter Ordnung, die im vorigen Fall auftraten, ausgeführt. Das aber ist offenbar nur möglich, wenn die Definitionsgleichungen zweiter Ordnung von G die Form (M) besitzen.

§ 4.

Wir kennen jetzt alle Definitionsgleichungen erster und zweiter Ordnung, die bei unseren Gruppen auftreten; wir müssen noch untersuchen, ob zu den aus ihnen durch Differentiation ableitbaren Gleichungen noch andere Definitionsgleichungen dritter und höherer Ordnung hinzukommen können.

Oben sahen wir, dass unsere Gruppe G für jedes $m > 1$ unter allen Umständen $n(n-1)$ infinitesimale Transformationen m^{ter} Ordnung von der Form:

$$x_i^m p_k + \cdots \qquad (i, k = 1 \ldots n;\; i \neq k)$$

enthält. Ist $n > 1$, so können wir hieraus durch Combination mit $x_j p_i + \cdots$, wo j von i und k verschieden ist, $m - 1$ Transformationen von der Form:

$$x_i^{m-\mu} x_j^\mu p_k + \cdots \qquad (\mu = 1 \ldots m)$$

ableiten, und wenn wir dieses Verfahren fortsetzen, erkennen wir, dass G überhaupt jede Transformation von der Form:

$$(\alpha) \qquad x_{i_2}^{\nu_2} x_{i_3}^{\nu_3} \ldots x_{i_n}^{\nu_n} p_{i_1} + \cdots \qquad (\nu_2 + \cdots + \nu_n = m)$$

enthält, unter $i_1 \ldots i_n$ irgend eine Reihenfolge der Zahlen $1, 2 \ldots n$ verstanden. Die Zahl dieser infinitesimalen Transformationen, die offenbar von einander unabhängig sind, ist gleich n multiplicirt mit

der Zahl der Parameter einer ganzen homogenen Function m^{ten} Grades von $n-1$ Veränderlichen, sie hat also den Werth:

$$n \cdot \frac{(n-1)\, n\, (n+1) \cdots (n+m-2)}{m!} .$$

Zu diesen Transformationen kommen nun noch gewisse andere von m^{ter} Ordnung hinzu. Es treten nämlich zugleich mit: $x_i^m p_k + \cdots$ $(i \neq k)$ auch noch die m Transformationen:

$$(\mu+1)\, x_i^{m-\mu} x_k^{\mu} p_i - (m-\mu)\, x_i^{m-\mu-1} x_k^{\mu+1} p_k + \cdots \quad (\mu = 0, 1 \ldots m-1)$$

auf, die wir symmetrischer so schreiben können:

$$x_i^{\mu} x_k^{\nu} \{(\nu+1)\, x_i p_i - (\mu+1)\, x_k p_k\} + \cdots ,$$

unter μ und ν irgend zwei solche Zahlen der Reihe: $0, 1, 2 \ldots m-1$ verstanden, die zur Summe $m-1$ geben. Ist nun $n > 2$ und j von i und k verschieden, so ergiebt sich durch Combination der letzten Transformation mit: $x_j p_i + \cdots$ die Transformation:

$$x_j x_i^{\mu-1} x_k^{\nu} \{(\nu+1)\, x_i p_i - \mu x_k p_k\} + \cdots .$$

Wiederholen wir diese Operation und combiniren wir auch noch mit $x_j p_k + \cdots$, so erhalten wir überhaupt jede Transformation von der Form:

$$x_i^{\mu} x_k^{\nu} x_j^{\varrho} \{(\nu+1)\, x_i p_i - (\mu+1)\, x_k p_k\} + \cdots ,$$

unter μ, ν, ϱ irgend drei solche Zahlen der Reihe: $0, 1 \ldots m-1$ verstanden, die zur Summe $m-1$ haben. Ist $n > 3$, so combiniren wir diese Transformation noch mit allen: $x_h p_j + \cdots$, in denen h von i, k und j verschieden ist und gelangen so zu allen Transformationen von der Form:

$$\text{(N)} \qquad x_{i_1}^{\mu_1} x_{i_2}^{\mu_2} \ldots x_{i_n}^{\mu_n} \{(\mu_2+1)\, x_{i_1} p_{i_1} - (\mu_1+1)\, x_{i_2} p_{i_2}\} + \cdots ,$$

wo $i_1 \ldots i_n$ irgend eine Reihenfolge der Zahlen $1, 2 \ldots n$ bedeuten, während $\mu_1 \ldots \mu_n$ solche Zahlen der Reihe $0, 1 \ldots m-1$ sind, dass $\mu_1 + \cdots + \mu_n = m-1$ ist.

Die infinitesimalen Transformationen (N) sind offenbar von den früher gefundenen (α) unabhängig, aber sie sind nicht alle von einander unabhängig, man erhält jedoch augenscheinlich lauter von einander unabhängige, wenn man etwa $i_1 = 1$ setzt, ferner i_2 die Werthe $2, 3 \ldots n$ ertheilt und ausserdem $i_3 \ldots i_n$ und $\mu_1 \ldots \mu_n$ noch auf alle möglichen Weisen wählt. Die Anzahl der von einander unabhängigen unter den Transformationen (N) ist daher gleich $n-1$

multiplicirt mit der Anzahl der Parameter einer ganzen homogenen Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in n Veränderlichen, das heisst sie hat den Werth:

$$(n-1)\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!}.$$

Wir kennen nunmehr in unserer Gruppe:

$$n\cdot\frac{(n-1)n\cdots(n+m-2)}{m!}+(n-1)\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!}=$$
$$=(n-1)(n+m)\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{m!}$$

unabhängige infinitesimale Transformationen m^{ter} Ordnung, aus denen sich keine von $(m+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Ordnung linear ableiten lässt. Andererseits ist klar, dass es in n Veränderlichen überhaupt nur

$$n\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m!}$$

derartige infinitesimale Transformationen m^{ter} Ordnung giebt, folglich kann die Zahl der von einander unabhängigen Definitionsgleichungen m^{ter} Ordnung bei unserer Gruppe jedenfalls nicht grösser sein als die Differenz der beiden eben hingeschriebenen Zahlen, sie kann also nicht grösser sein als:

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{m!}\{n(n+m-1)-(n-1)(n+m)\}=$$
$$=\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!}.$$

Nun aber ergeben sich aus den uns bekannten Definitionsgleichungen zweiter Ordnung durch Differentiation genau so viele unabhängige Definitionsgleichungen m^{ter} Ordnung, als eine ganze homogene Function $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von n Veränderlichen Coefficienten hat, mithin ist die Zahl der so entstehenden von einander unabhängigen Definitionsgleichungen m^{ter} Ordnung genau gleich:

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+m-2)}{(m-1)!},$$

und da nach dem vorhin Gesagten feststeht, dass eine grössere Anzahl unabhängiger Definitionsgleichungen m^{ter} Ordnung nicht auftreten kann, so ist hiermit bewiesen, dass sich alle Definitionsgleichungen dritter und höherer Ordnung unserer Gruppe aus den Definitionsgleichungen zweiter Ordnung durch blosse Differentiation ergeben.

Zugleich ist klar, dass die Formeln (α) und (N), überhaupt alle Formen von infinitesimalen Transformationen m^{ter} Ordnung ($m > 1$), die in unserer Gruppe auftreten können, liefern.

Wir haben somit den

Satz 2. Ist eine unendliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen des R_n ($n > 1$) so beschaffen, dass die ∞^{n-1} Linienelemente durch jeden festgehaltenen Punkt von allgemeiner Lage in allgemeinster Weise, das heisst ($nn - 1$)-gliedrig transformirt werden, so sind nur drei Fälle möglich: *erstens*, die Definitionsgleichungen der Gruppe reduciren sich auf: $0 = 0$, die Gruppe ist also die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen; *zweitens*, unter den Definitionsgleichungen der Gruppe giebt es keine von nullter und eine und nur eine von erster Ordnung von der Form:

$$\text{(K)} \qquad \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu (x_1 \dots x_n)\, \xi_\nu ,$$

aus der sich alle Definitionsgleichungen zweiter und höherer Ordnung durch Differentiation ergeben; *drittens*, unter den Definitionsgleichungen der Gruppe giebt es keine von nullter oder erster Ordnung, dafür aber gerade n von zweiter Ordnung von der Form:

$$\text{(M)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_\nu^{1\dots n} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{i\mu\nu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\nu^{1\dots n} \beta_\nu \xi_\nu \quad (i = 1 \dots n),$$

aus denen sich alle Definitionsgleichungen dritter und höherer Ordnung durch Differentiation ergeben.

§ 5.

Wir suchen jetzt alle unendlichen continuirlichen Gruppen, die durch eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (K) definirt sind.

Sind: $d_\nu x_1, \dots, d_\nu x_n$ ($\nu = 1 \dots n$) n verschiedene Systeme von Differentialen, so stellt der Ausdruck:

$$\Delta = \Sigma \pm d_1 x_1 \dots d_n x_n$$

bei Benutzung rechtwinkliger Coordinaten bekanntlich den Rauminhalt

eines von ebenen Mannigfaltigkeiten begrenzten unendlich kleinen Raumstücks dar und es besteht für jede infinitesimale Transformation:

$$Xf = \sum_1^n \xi_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

die Gleichung:

$$\frac{1}{\varDelta} X\varDelta = \sum_1^n \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu}.$$

Gehört daher Xf der durch (K) definirten unendlichen Gruppe an, so wird:

$$\text{(P)} \qquad \frac{1}{\varDelta} X\varDelta = \sum_1^n \alpha_\nu \xi_\nu$$

und umgekehrt ist das Bestehen der Gleichung (P) für die infinitesimalen Transformationen der bewussten Gruppe charakteristisch.

Ist jetzt:

$$Yf = \sum_1^n \eta_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

eine zweite infinitesimale Transformation jener Gruppe, so ist:

$$\frac{1}{\varDelta} Y\varDelta = \sum_1^n \alpha_\nu \eta_\nu ,$$

es wird also:

$$\frac{1}{\varDelta}\{XY\varDelta - YX\varDelta\} = \sum_1^n \alpha_\nu (X\eta_\nu - Y\xi_\nu) + \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \xi_\mu \eta_\nu \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu}\right).$$

Anderseits ist aber:

$$(XY) = XYf - YXf = \sum_1^n (X\eta_\nu - Y\xi_\nu) \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

unter den gemachten Voraussetzungen wieder eine infinitesimale Transformation der Gruppe, so dass auch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varDelta}\{XY\varDelta - YX\varDelta\} = \sum_1^n \alpha_\nu (X\eta_\nu - Y\xi_\nu)$$

besteht, folglich muss für je zwei infinitesimale Transformationen Xf und Yf der Gruppe

$$\sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \xi_\mu \eta_\nu \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

identisch verschwinden. Denken wir uns nur infinitesimale Transformation der Gruppe

Bedingung eine Gleichung nullter Ordnung, die von allen infinitesimalen Transformationen Xf der Gruppe erfüllt werden muss. Das geht nicht, also müssen für jede infinitesimale Transformation Yf der Gruppe die Gleichungen:

$$\sum_1^n {}_\nu\, \eta_\nu \left(\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu}\right) = 0 \quad (\mu = 1 \dots n)$$

bestehen, woraus auf dieselbe Weise folgt:

$$\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1 \dots n) .$$

Demnach giebt es eine Function u von den x, deren Differentialquotienten beziehungsweise gleich $\alpha_1 \dots \alpha_n$ sind; unsere Definitionsgleichung (K) erhält somit die Gestalt:

$$\text{(K')} \qquad \sum_1^n {}_\nu\, \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum_1^n {}_\nu\, \xi_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu}$$

und die Gleichung (P), die für jede infinitesimale Transformation unserer Gruppe gilt, bekommt die Form:

$$\frac{1}{\Delta} X\Delta = Xu ,$$

wofür wir offenbar auch:

$$\text{(Q)} \qquad X(e^{-u} \Delta) = 0$$

schreiben können.

Jetzt ist es leicht die Gleichungen (K') und (Q) noch weiter zu vereinfachen. Führen wir nämlich neue Veränderliche $x_1' \dots x_n'$ ein und setzen wir:

$$d_\nu x_i' = \sum_1^n {}_\tau\, \frac{\partial x_i'}{\partial x_\tau} d_\nu x_\tau ,$$

so wird bekanntlich:

$$\Delta' = \sum \pm d_1 x_1' \dots d_n x_n' = \Delta \,.\, \sum \pm \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_n'}{\partial x_n} .$$

Bestimmen wir daher die neuen Veränderlichen derart, dass

$$\sum \pm \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_n'}{\partial x_n} = e^{-u}$$

wird, so bekommt unsere Gruppe in den neuen Veränderlichen eine solche Form, dass für jede ihrer infinitesimalen Trans-

$$Xf = \sum_1^n \overline{\xi}_\nu (x_1' \dots x_n')$$

die Gleichung: $X\Delta' = 0$ besteht. Hieraus folgt zugleich, dass die Definitionsgleichung unserer Gruppe in den neuen Veränderlichen die Form:

$$\sum_1^n \frac{\partial \overline{\xi}_\nu}{\partial x_\nu'} = 0$$

annimmt.

Wir sehen hieraus, dass jede der hier gesuchten Gruppen durch eine Punkttransformation des R_n mit der unendlichen Gruppe ähnlich ist, deren Transformationen alle Raumelemente des R_n invariant lassen. Mit einem der Hydrodynamik entlehnten Bilde können wir diese letztere Gruppe auch als die Gruppe aller Bewegungen einer incompressibeln Flüssigkeit bezeichnen.

§ 6.

Jetzt zur Bestimmung aller unendlichen continuirlichen Gruppen, unter deren Definitionsgleichungen es gerade n von zweiter Ordnung giebt, die die Form

$$\text{(M)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \sum\limits_\nu^{1\dots n} \dfrac{\partial \xi_\nu}{\partial x_\nu} = \sum\limits_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{i\mu\nu} \dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\mu} + \sum\limits_\mu^{1\dots n} \beta_{i\mu}\, \xi_\mu \\ (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

besitzen, während Definitionsgleichungen nullter und erster Ordnung gar nicht auftreten und alle Definitionsgleichungen dritter und höherer Ordnung aus (M) durch Differentiation erhalten werden.

Ist Xf eine beliebige infinitesimale Transformation der durch (M) definirten Gruppe und hat Δ dieselbe Bedeutung wie vorhin, so ist augenscheinlich:

$$\text{(R)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\Delta}\, X\Delta\right) = \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{i\mu\nu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\mu^{1\dots n} \beta_{i\mu}\, \xi_\mu .$$

Für eine beliebige zweite infinitesimale Transformation Yf der Gruppe ist ebenso:

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\Delta}\, Y\Delta\right) = \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} \alpha_{i\mu\nu} \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\mu^{1\dots n} \beta_{i\mu}\, \eta_\mu .$$

Unter diesen Voraussetzungen ist nun aber auch

$$(XY) = XYf - YXf = \sum_{i\mu}^{1\ldots n} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$$

eine infinitesimale Transformation unserer Gruppe, es muss also auch werden:

$$\frac{\partial}{\partial x_\tau}\left\{\frac{XY\varDelta - YX\varDelta}{\varDelta}\right\} = \sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\tau\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{i}^{1\ldots n} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i}\right) + \\ + \sum_{\mu i}^{1\ldots n} \beta_{\tau\mu} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i}\right),$$

eine Gleichung, die durch Benutzung von (R) und (S) die Form:

$$\text{(T)} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\tau}\left\{\frac{XY\varDelta - YX\varDelta}{\varDelta}\right\} = &\sum_{i}^{1\ldots n}\left\{\xi_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\tau}\left(\frac{1}{\varDelta} Y\varDelta\right) - \eta_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\tau}\left(\frac{1}{\varDelta} X\varDelta\right)\right\} + \\ &+ \sum_{i\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\tau\mu\nu}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i}\right) - \\ &- \sum_{i\mu\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \alpha_{\tau\mu\nu}}{\partial x_i}\left(\xi_i \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_\nu} - \eta_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu}\right) - \\ &- \sum_{i\mu}^{1\ldots n} \frac{\partial \beta_{\tau\mu}}{\partial x_i}(\xi_i \eta_\mu - \eta_i \xi_\mu) \end{aligned}\right.$$

annimmt. Andererseits ergiebt sich direct:

$$\frac{1}{\varDelta}\{XY\varDelta - YX\varDelta\} = \sum_{i}^{1\ldots n}\left\{\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varDelta} Y\varDelta\right) - \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varDelta} X\varDelta\right)\right\},$$

und wenn man das nach x_τ differentiirt und mit (T) vergleicht, so erhält man bei Benutzung von (R) und (S) die Gleichung:

$$\text{(U)} \quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{\tau\mu\nu}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i}\right) - \\ &- \sum_{i\mu\nu}^{1\ldots n} \alpha_{i\mu\nu}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\tau}\frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\tau}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu}\right) - \\ &- \sum_{i\mu\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial \alpha_{\tau\mu\nu}}{\partial x_i}\left(\xi_i \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_\nu} - \eta_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\nu}\right) - \\ &- \sum_{i\mu}^{1\ldots n} \beta_{i\mu}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\tau}\eta_\mu - \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\tau}\xi_\mu\right) - \\ &- \sum_{i\mu}^{1\ldots n}\left(\frac{\partial \beta_{\tau\mu}}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta_{\tau i}}{\partial x_\mu}\right)\xi_i \eta_\mu = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (U) muss bestehen, welche Lösungensysteme der Definitionsgleichungen (M) man auch für $\xi_1 \ldots \xi_n$ und $\eta_1 \ldots \eta_n$ ein-

setzen mag. Hieraus folgt, wie im vorigen Paragraphen, dass die Gleichung (U) an und für sich eine Identität sein muss, das heisst, dass sie für alle Werthe der ξ_i, η_i und ihrer Differentialquotienten identisch besteht. Wir müssen jetzt zusehen, was sich daraus für Eigenschaften der $\alpha_{i\mu\nu}$ und $\beta_{i\mu}$ ergeben.

Setzen wir auf der linken Seite von (U) den Coefficienten von $\xi_i\eta_\mu$ gleich Null, so finden wir die Bedingungen:

$$\text{(V)}\qquad \frac{\partial\beta_{\tau\mu}}{\partial x_i} - \frac{\partial\beta_{\tau i}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (i, \tau, \mu = 1 \ldots n).$$

In dem übrig bleibenden Ausdruck setzen wir den Coefficienten von ξ_i gleich Null; das giebt:

$$\sum_{\mu\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial\alpha_{\tau\mu\nu}}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_\mu}{\partial x_\nu} = \sum_{\mu}^{1\ldots n}\beta_{\mu i}\frac{\partial\eta_\mu}{\partial x_\tau},$$

eine Gleichung, die sich sofort in die folgenden zerlegt:

$$\text{(W)}\qquad \frac{\partial\alpha_{\tau\mu\nu}}{\partial x_i} = \varepsilon_{\nu\tau}\beta_{\mu i} \qquad (i, \tau, \mu, \nu = 1 \ldots n),$$

wo $\varepsilon_{\nu\tau}$ die übliche Bedeutung hat.

Den Rest der Gleichung (U) schreiben wir nun folgendermassen:

$$\sum_{i\mu\nu\pi}^{1\ldots n} \varepsilon_{i\pi}\alpha_{\tau\mu\nu}\left\{\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial\eta_\mu}{\partial x_\pi} - \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x_\pi}\right\} = \sum_{i\mu\nu\pi}^{1\ldots n} \varepsilon_{\tau\pi}\alpha_{i\mu\nu}\left\{\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\pi}\frac{\partial\eta_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\pi}\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x_\nu}\right\}$$

und erhalten schliesslich noch die Bedingungen:

$$(\Omega)\qquad \varepsilon_{i\pi}\alpha_{\tau\mu\nu} - \varepsilon_{\mu\nu}\alpha_{\tau i\pi} = \varepsilon_{\tau\nu}\alpha_{i\mu\pi} - \varepsilon_{\tau\pi}\alpha_{\mu i\nu},$$

die für alle Werthe der Zahlen i, μ, ν, π, τ erfüllt sein müssen.

Ist ν weder $= \mu$ noch $= \tau$ und setzt man $\pi = i$, so ergiebt sich aus:

$$\alpha_{\tau\mu\nu} = -\varepsilon_{\tau i}\alpha_{\mu i\nu},$$

oder, da man $i = \nu$ wählen kann und $\varepsilon_{\tau\nu}$ verschwindet: $\alpha_{\tau\mu\nu} = 0$. Es sind also alle $\alpha_{\tau\mu\nu} = 0$, in denen τ, μ, ν drei verschiedene Zahlen sind, und ebenso alle $\alpha_{\tau\tau\nu} = 0$, in denen $\nu \neq \tau$.

Ist ferner $\tau \neq \nu$, aber $\mu = \nu$, so folgt aus (Ω):

$$\varepsilon_{i\pi}\alpha_{\tau\nu\nu} - \alpha_{\tau i\pi} = -\varepsilon_{\tau\pi}\alpha_{\nu i\nu}$$

für alle Werthe von i und π. Setzt man daher $\pi = \tau$, $i = \nu$, so kommt:

$$\alpha_{\tau\nu\tau} = \alpha_{\nu\nu\nu} \qquad (\nu \neq \tau),$$

setzt man andererseits $\pi = \tau = i$, so findet man:

$$\alpha_{\tau\nu\nu} - \alpha_{\tau\tau\tau} = - \alpha_{\nu\tau\nu},$$

also, da $\alpha_{\tau\tau\tau} = \alpha_{\nu\tau\nu}$ ist:

$$\alpha_{\tau\nu\nu} = 0 \qquad (\tau \neq \nu).$$

Demnach ist allgemein:

(a) $$\alpha_{\tau\mu\nu} = \varepsilon_{\tau\nu}\alpha_{\mu\mu\mu} \qquad (\tau, \mu, \nu = 1 \dots n)$$

und wirklich werden die Gleichungen (Ω) bei Einsetzung dieser Werthe der α_{ikj} zu lauter Identitäten. Für $\beta_{\mu i}$ ergiebt sich schliesslich noch aus (W) der Werth:

(b) $$\beta_{\mu i} = \frac{\partial \alpha_{\mu\mu\mu}}{\partial x_i} \qquad (\mu, i = 1 \dots n),$$

der offenbar auch die Gleichungen (V) befriedigt.

Nunmehr erhalten die Gleichungen (M) die Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\Delta} X\Delta\right) = \sum_1^n{}^{\mu} \alpha_{\mu\mu\mu}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i} + \sum_1^n{}^{\mu} \frac{\partial \alpha_{\mu\mu\mu}}{\partial x_i}\xi_\mu,$$

woraus durch Integration sofort folgt:

$$\frac{1}{\Delta} X\Delta = \sum_1^n{}^{\mu} \alpha_{\mu\mu\mu}\xi_\mu + A,$$

unter A eine Constante verstanden. Ebenso wird natürlich:

$$\frac{1}{\Delta} Y\Delta = \sum_1^n{}^{\mu} \alpha_{\mu\mu\mu}\eta_\mu + B,$$

und:

$$\frac{1}{\Delta}(XY\Delta - YX\Delta) = \sum_{i\mu}^{1\dots n} \alpha_{\mu\mu\mu}\left(\xi_i \frac{\partial \eta_\mu}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_i}\right) + C.$$

Andererseits aber wird auch:

$$\frac{1}{\Delta}(XY\Delta - YX\Delta) = X\left(\frac{1}{\Delta} Y\Delta\right) - Y\left(\frac{1}{\Delta} X\Delta\right)$$

$$= \sum_1^n{}^{\mu} \alpha_{\mu\mu\mu}(X\eta_\mu - Y\xi_\mu) + \sum_1^n{}^{\mu}(\eta_\mu . X\alpha_{\mu\mu\mu} - \xi_\mu . Y\alpha_{\mu\mu\mu})$$

und demnach muss für je zwei infinitesimale Transformationen Xf und Yf unserer Gruppe eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{i\mu}^{1\dots n} \xi_i \eta_\mu \left(\frac{\partial \alpha_{\mu\mu\mu}}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_{iii}}{\partial x_\mu}\right) = C$$

bestehen. Differentiirt man die nach x_τ, so fällt C weg und die ent-

stehende Gleichung muss für alle Werthe der ξ_i, η_μ und ihrer Differentialquotienten identisch bestehen, hieraus ergiebt sich:

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial \alpha_{\mu\mu\mu}}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_{iii}}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (i, \mu = 1 \dots n),$$

so dass die $\alpha_{\mu\mu\mu}$ einfach die ersten Differentialquotienten einer gewissen Function u sein müssen.

Durch die vorstehenden Entwickelungen ist gezeigt, dass die Definitionsgleichungen (M) unserer Gruppe die Form:

$$\text{(M')} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_1^n{}^\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\mu} - \sum_1^n{}^\mu \frac{\partial u}{\partial x_\mu} \xi_\mu\right) = 0 \qquad (i = 1 \dots n)$$

besitzen. Um schliesslich noch diese Gleichungen auf eine einfachere Form zu bringen, bemerken wir, dass für jede infinitesimale Transformation Xf unserer Gruppe eine Gleichung von der Form:

$$\frac{1}{\Delta} X\Delta = Xu + A$$

besteht, wo der Werth der Constanten von der besonderen Beschaffenheit von Xf abhängt. Diese Gleichung lässt sich nun in der Form:

$$\frac{1}{e^{-u}\Delta} X(e^{-u}\Delta) = A$$

schreiben; führt man daher neue Veränderliche $x'_1 \dots x'_n$ ein, die so gewählt sind, dass

$$\sum \pm \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_\mu} = e^{-u}$$

wird, so nimmt sie die Form:

$$\frac{1}{\Delta'} X\Delta' = A$$

an, wo Δ' dieselbe Bedeutung hat, wie auf S. 97. Demnach kann man die Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ immer so wählen, dass die Definitionsgleichungen unserer Gruppe die einfache Form:

$$\text{(M'')} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^n{}^\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (i = 1 \dots n)$$

annehmen.

Die durch (M'') definirte Gruppe ist dadurch charakterisirt, dass sich bei jeder ihrer Transformationen alle Raumelemente der R_n in constantem Verhältniss ändern.

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt hatten, vollständig erledigt und wir können die gewonnenen Ergebnisse in dem Satze zusammenfassen:

Theorem. *Ist eine unendliche continuirliche Gruppe des R_n $(n > 1)$ so beschaffen, dass bei Festhaltung eines Punktes von allgemeiner Lage die ∞^{n-1} Linienelemente durch diesen Punkt stets in allgemeinster Weise, also $(nn - 1)$-gliedrig transformirt werden, so sind nur drei Fälle möglich:* ***Erstens:*** *die Gruppe ist durch eine Punkttransformation des R_n ähnlich mit der unendlichen Gruppe, die alle Raumelemente des R_n invariant lässt.* ***Zweitens:*** *sie ist ähnlich mit der unendlichen Gruppe, deren Transformationen alle Raumelemente in constantem Verhältnisse ändern.* ***Drittens:*** *sie ist die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen des R_n.*

Die Analogie mit dem entsprechenden Satze für endliche continuirliche Gruppen liegt auf der Hand.

Capitel III.

Bestimmung aller (irreducibeln) unendlichen Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene.

Wir benutzen hier dieselben Bezeichnungen wie in Cap. 23 des Abschn. II der Transformationsgruppen. Es sind also z, x, y die Coordinaten der Linienelemente der Ebene und: $dz - y dx = 0$ ist die Bedingung dafür, dass zwei unendlich benachbarte Linienelemente der Ebene vereinigt liegen. Ausserdem aber bedienen wir uns der in Cap. 26 a. a. O. dargestellten Rechnung mit den Reihenentwickelungen der charakteristischen Functionen. Wir denken uns also die charakteristische Function jeder infinitesimalen Berührungstransformation der Ebene nach Potenzen von z, x, y entwickelt — unter $z = x = y = 0$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage verstanden — aber so, dass wir in der Reihenentwickelung nicht die Gl

von gleicher Ordnung zusammenfassen, sondern die von gleicher Stufe (a. a. O. S. 526). Dabei schreiben wir in diesen Reihenentwickelungen immer nur die Glieder niedrigster Stufe hin und erinnern ein für alle Mal daran, dass die weggelassenen Glieder einer Reihenentwickelung stets in z, x, y von höherer Stufe sind als die geschriebenen.

§ 1.

Genau wie bei den endlichen irreducibeln Berührungstransformationsgruppen der Ebene finden wir auch bei den unendlichen, dass nur drei verschiedene Fälle denkbar sind. Ist nämlich G eine unendliche irreducibele Berührungstransformationsgruppe der Ebene, so giebt es nur die folgenden drei Möglichkeiten:

Erstens, G enthält charakteristische Functionen von der Form:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 1+\cdots, & x+\cdots, & y+\cdots \\ x^2+\cdots, & xy+\cdots, & y^2+\cdots, \end{cases}$$

während keine von der Form: $z-\frac{1}{2}xy+\cdots$ auftritt und noch weniger eine von der Form:

$$z(ax+by)+h_3(x,y)+\cdots,$$

wo die Constanten a und b nicht beide verschwinden und wo h_3 eine ganze homogene Function dritten Grades von x und y bedeutet.

Zweitens. G enthält charakteristische Functionen von der Form:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} 1+\cdots, & x+\cdots, & y+\cdots \\ x^2+\cdots, & xy+\cdots, & y^2+\cdots \\ & z-\frac{1}{2}xy+\cdots, & \end{cases}$$

dagegen keine von der Form:

$$z(ax+by)+h_3(x,y)+\cdots$$

wo a und b nicht beide verschwinden.

Drittens. G enthält charakteristische Functionen von der Form

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} 1+\cdots, \quad x+\cdots, \quad y+\cdots \\ x^2+\cdots, \quad xy+\cdots, \quad y^2+\cdots \\ z-\frac{1}{2}xy+\cdots \\ zx+g_3(x,y)+\cdots, \quad zy+h_3(x,y)+\cdots \end{cases}$$

Wir wissen also in jedem dieser drei Fälle, was für charakteristische Functionen von nullter, erster und zweiter Stufe auftreten; festzustellen bleibt nur, was für Functionen dritter und höherer Stufe vorkommen können.

§ 2.

Vorerst lassen sich unsere drei Fälle noch gemeinsam behandeln. Aus dem Umstande nämlich, dass die Gruppe G in jedem der drei Fälle die charakterischen Functionen:

$$x + \cdots, \quad y + \cdots,$$
$$x^2 + \cdots, \quad xy + \cdots, \quad y^2 + \cdots$$

enthält, lassen sich gewisse Schlüsse über die charakteristischen Functionen dritter und höherer Stufe ziehen, die offenbar für alle drei Fälle gültig bleiben.

Wir wollen annehmen, dass unsere Gruppe G eine charakteristische Function m^{ter} Stufe $(m > 2)$ von der Form:

$$h_m(x, y) + \cdots$$

enthält, unter h_m eine ganze homogene Function m^{ten} Grades von x und y allein verstanden. Ausführlicher geschrieben wird diese charakteristische Function so lauten:

$$(1) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} y + \cdots + a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m + \cdots,$$

wo $a_0, a_1 \dots a_m$ nicht sämmtlich verschwinden und wo die weggelassenen Glieder von $(m+1)^{\text{ter}}$ und höherer Stufe in z, x, y sind.

Sind $a_1 \dots a_m$ alle null, so haben wir schon eine charakteristische Function von der Form: $x^m + \cdots$, im entgegensetzten Falle combiniren wir die Function (1) eine genügende Anzahl von Malen mit: $x^2 + \cdots$ und gelangen so schliesslich auch zu einer charakteristischen Function von der Form:

$$x^m + \cdots,$$

die unserer Gruppe G angehört. Combiniren wir jetzt: $x^m + \cdots$ wiederholt mit: $y^2 + \cdots$, so finden wir der Reihe nach die Functionen:

$$x^{m-1}y + \cdots, \quad x^{m-2}y^2 + \cdots, \quad \cdots, \quad xy^{m-1} + \cdots, \quad y^m + \cdots,$$

die unter der gemachten Voraussetzung alle unserer Gruppe angehören. Ist nun $m > 3$, so erhalten wir, indem wir $x^m + \cdots$ $(m-1)$-mal mit $y + \cdots$ combiniren, die Function: $x^3 + \cdots$. Demnach ist klar, dass unsere Gruppe, wie auch m sonst beschaffen sein mag, stets die Functionen:

$$x^3 + \cdots, \quad x^2y + \cdots, \quad xy^2 + \cdots, \quad y^3 + \cdots$$

enthält. Endlich finden wir noch:

$$\begin{aligned} \{x^2y + \cdots, \; x^3 + \cdots\} &= 3x^4 + \cdots, \\ \{x^2y + \cdots, \; x^4 + \cdots\} &= 4x^5 + \cdots, \end{aligned}$$

was beliebig weit fortgesetzt werden kann. Demnach enthält unsere Gruppe überhaupt für jeden Werth $n > 2$ eine charakteristische Function von der Form: $x^n + \cdots$ und nach dem Obigen zugleich noch n von der Form:

$$x^{n-1}y + \cdots, \quad x^{n-2}y^2 + \cdots, \quad \cdots, \quad y^n + \cdots.$$

Also:

Enthält eine Berührungstransformationsgruppe die charakteristischen Functionen:

$$\begin{aligned} &1 + \cdots, \quad x + \cdots, \quad y + \cdots \\ &x^2 + \cdots, \quad xy + \cdots, \quad y^2 + \cdots \end{aligned}$$

und enthält sie ausserdem auch nur eine charakteristische Function m^{ter} Stufe $(m > 2)$ von der Form:

$$h_m(x, y) + \cdots,$$

so ist sie unendlich und enthält, wie man auch die positiven ganzen Zahlen i und k wählen mag, stets eine charakteristische Function von der Form:

$$x^i y^k + \cdots.$$

§ 3.

Nunmehr schliessen wir den dritten Fall aus und beschränken uns auf die Betrachtung der beiden ersten Fälle. Diese haben nämlich das Gemeinsame, dass bei keinem von beiden eine charakteristische Function dritter Stufe:

$$z(ax + by) + h_3(x, y) + \cdots$$

auftreten kann, in der a und b nicht beide verschwinden, deren Glieder dritter Stufe also z wirklich enthalten. Wir werden zeigen, dass ebensowenig eine charakteristische Function n^{ter} Stufe ($n > 3$) vorkommen kann, deren Glieder n^{ter} Stufe z wirklich enthalten.

G sei eine unendliche Gruppe, die unter einen der beiden ersten Fälle gehört und enthalte eine charakteristische Function n^{ter} Stufe ($n > 3$), in deren Gliedern n^{ter} Stufe z wirklich vorkommt. Dann hat diese charakteristische Function nothwendig die Form:

$$U = \sum_0^m {}_\mu \, z^\mu h_{n-2\mu}(x, y) + \cdots,$$

wo $m \leqq E\left(\frac{n}{2}\right)$, unter $E\left(\frac{n}{2}\right)$ die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl verstanden, wo ferner $h_{n-2\mu}$ eine ganze homogene Function $(n-2\mu)^{\text{ten}}$ Grades von x und y ist und wo die weggelassenen Glieder von $(n+1)^{\text{ter}}$ und höherer Stufe in z, x, y sind. Da überdies die Glieder n^{ter} Stufe von U die Veränderliche z wirklich enthalten sollen, so können wir voraussetzen, dass $m > 0$ und $h_{n-2m} \neq 0$ ist.

Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder nämlich enthält h_{n-2m} eine der beiden Veränderlichen x und y wirklich oder es ist eine blosse, natürlich von Null verschiedene Constante.

Im ersten Falle kommen wir sehr leicht auf einen Widerspruch. Ist nämlich $m > 1$, so combiniren wir U $(m-1)$-mal mit der charakteristischen Function: $1 + \cdots$ und finden so, dass unsere Gruppe jedenfalls eine charakteristische Function von der Form:

$$V = g_{n-2m+2}(x, y) + z h_{n-2m}(x, y) + \cdots$$

enthält, wo g_{n-2m+2} eine ganze homogene Function $(n-2m+2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Ist nun $n - 2m = 1$, so liegt der Widerspruch auf der Hand, denn V ist eine unserer Gruppe angehörige charakteristische Function dritter Stufe, deren Glieder dritter Stufe z wirklich enthalten, und eine solche Function darf ja unter den gemachten Voraussetzungen in G nicht vorkommen. Ist aber $n - 2m > 1$, so bilden wir:

$$\{y + \cdots, V\} = \frac{\partial g_{n-2m+2}}{\partial x} + z \frac{\partial h_{n-2m}}{\partial x} + \cdots$$

$$\{x + \cdots, V\} = -\frac{\partial g_{n-2m+2}}{\partial y} - x h_{n-2m} - z \frac{\partial h_{n-2m}}{\partial y} + \cdots$$

da nun die Differentialquotienten von h_{n-2m} nicht beide verschwinden können, so enthalten die Glieder niedrigster Stufe in einer dieser beiden charakteristischen Functionen z wirklich, wir stossen daher durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich auf eine charakteristische Function dritter Stufe, deren Glieder dritter Stufe nicht von z frei sind, und damit auf einen Widerspruch.

Der erste Fall ist also ausgeschlossen. Im zweiten ist offenbar $n = 2m$ und da $n > 3$ sein sollte, so ist $m \geqq 2$. Ist insbesondere $m > 2$, so combiniren wir U $(n - 2)$-mal nach einander mit: $1 + \cdots$ und finden daher, dass unsere Gruppe sicher eine charakteristische Function vierter Stufe von der Form:

$$W = z^2 + zg_2(x,y) + g_4(x,y) + \cdots$$

enthält, wo g_2 und g_4 ganze homogene Functionen zweiten und vierten Grades von x und y allein sind. Jetzt ergiebt sich aber:

$$\{y + \cdots, W\} = z\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_4}{\partial x} + \cdots$$

$$\{x + \cdots, W\} = -2zx - z\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_4}{\partial y} - xg_2 + \cdots$$

und da die Ausdrücke:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}, \quad 2x + \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

nicht beide verschwinden können, so ist hiermit wieder eine charakteristische Function dritter Stufe gefunden, deren Glieder dritter Stufe z enthalten, also kommen wir auch hier auf einen Widerspruch.

Hieraus ergiebt sich, dass im ersten und zweiten Falle nur solche charakteristische Functionen dritter und höherer Stufe auftreten können, deren Glieder niedrigster Stufe von z frei sind. Da nun unsere Gruppe G unendlich ist und also sicher charakteristische Functionen von höherer als der zweiten Stufe enthält, so können wir aus dem Ergebnisse des vorigen Paragraphen schliessen, dass G für jedes Paar von positiven ganzen Zahlen i und k, das der Bedingung: $i + k > 2$ genügt, eine charakteristische Function von der Form: $x^i y^k + \cdots$ enthält, aber sonst keine weiteren charakteristischen Functionen dritter und höherer Stufe.

Damit sind nun im ersten und zweiten Falle die Anfangsglieder aller auftretenden charakteristischen Functionen bestimmt, wir können daher sagen:

Gehört G unter den ersten Fall, so enthält es die charakteristischen Functionen:

$$\text{(I')} \qquad x^i y^k + \cdots \qquad (i, k = 0, 1, 2 \ldots),$$

gehört es unter den zweiten Fall, so enthält es die charakteristischen Functionen:

$$\text{(II')} \qquad z - \frac{1}{2} xy + \cdots, \quad x^i y^k + \cdots \quad (i, k = 0, 1, 2 \cdots),$$

dagegen enthält G in keinem von beiden Fällen eine charakteristische Function, deren Glieder niedrigster Stufe sich nicht aus den Gliedern niedrigster Stufe der angegebenen charakteristischen Functionen linear ableiten lassen.

Wir wollen noch erwähnen, dass hierdurch zugleich die charakteristischen Functionen dritter und höherer Stufe aller *endlichen* Berührungstransformationsgruppen gefunden sind, die unter den ersten oder den zweiten Fall gehören. Diese Gruppen können nämlich überhaupt keine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe enthalten, denn enthielten sie eine, so wäre sie offenbar nicht endlich.

§ 4.

Wir kommen jetzt zu dem dritten Falle und betrachten also die unendlichen Gruppen von Berührungstransformationen, die ausser den charakteristischen Functionen:

$$\begin{gathered} 1 + \cdots, \quad x + \cdots, \quad y + \cdots \\ x^2 + \cdots, \quad xy + \cdots, \quad y^2 + \cdots \\ z - \frac{1}{2} xy + \cdots \end{gathered}$$

jedenfalls noch zwei Functionen dritter Stufe von der Form:

$$U = zx + g_3(x, y) + \cdots, \qquad V = zy + h_3(x, y) + \cdots$$

enthalten.

Die Function g_3 hat die Form:

$$g_3 = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3,$$

also wird:

$$\begin{aligned} \{xy + \cdots, U\} &= xz + x \frac{\partial g_3}{\partial x} - y \frac{\partial g_3}{\partial y} + \cdots \\ &= xz + 3\alpha x^3 + \beta x^2 y - \gamma x y^2 - 3\delta y^3 + \cdots \end{aligned}$$

das heisst, von den Gliedern niedrigster Stufe von U werden bei der Combination mit $xy + \cdots$ nur zwei, nämlich xz und $\beta x^2 y$ mit demselben Factor reproducirt. Demnach (Trfsgr. I, S. 622, Satz 1) können wir schliessen, dass unsere Gruppe G die charakteristische Function:

$$U' = xz + \beta x^2 y + \cdots$$

enthält.

Nunmehr ergiebt sich:

$$\{x^2 + \cdots, U'\} = -(2\beta + 1)x^3 + \cdots.$$

Ist daher $2\beta + 1 \neq 0$, so enthält G eine charakteristische Function: $x^3 + \cdots$ und damit nach § 2 überhaupt für jedes beliebige Werthepaar i und k eine von der Form:

$$x^i y^k + \cdots.$$

Ausserdem enthält G noch die beiden Functionen dritter Stufe: $xz + \cdots$, $yz + \cdots$, also auch:

$$\{x^i y^k + \cdots, xz + \cdots\} = k x^i y^{k-1} z + (k-1) x^{i+1} y^k + \cdots,$$

mithin überhaupt: $x^\mu y^\nu z +$ für beliebige $\mu, \nu = 0, 1, 2 \cdots$. Ferner wird:

$$\{x^\mu y^\nu z + \cdots, xz + \cdots\} = \nu x^\mu y^{\nu-1} z^2 + (\nu - 1) x^{\mu+1} y^\nu z + \cdots,$$

so dass auch alle charakteristischen Functionen von der Form: $x^\mu y^\nu z^2 + \cdots$ auftreten, und indem man so fortfährt, erkennt man schliesslich, dass bei beliebiger Wahl der positiven ganzen Zahlen i, k, j stets eine charakteristische Function von der Form:

$$x^i y^k z^j + \cdots$$

auftritt.

Alles das gilt, wenn $2\beta + 1 \neq 0$ ist. Ist aber $2\beta + 1 = 0$, und enthielte G für $m > 2$ eine charakteristische Function m^{ter} Stufe, deren Glieder niedrigster Stufe von z frei sind, so liessen sich die eben durchgeführten Schlüsse wieder anwenden und wir kämen auf den vorigen Fall zurück. Demnach bleibt nur noch der Fall zu erledigen, dass $2\beta + 1 = 0$ ist und dass für $m > 2$ in G nur solche charakteristische Functionen m^{ter} Stufe auftreten, deren Glieder m^{ter} Stufe z wirklich enthalten. Dieser Fall kann aber hier gar nicht eintreten, wenn G unendlich sein soll.

In der That, unter den eben beschriebenen Voraussetzungen enthielte G die beiden charakteristischen Functionen dritter Stufe:

$$xz - \frac{1}{2} x^2 y + \cdots$$

$$\left\{y^2 + \cdots,\; xz - \frac{1}{2} x^2 y + \cdots\right\} = 2\left(yz - \frac{1}{2} xy^2\right) + \cdots,$$

sonst aber offenbar keine von dritter Stufe. Ferner enthielte es die charakteristische Function vierter Stufe:

$$\left\{yz - \frac{1}{2} xy^2 + \cdots,\; xz - \frac{1}{2} x^2 y + \cdots\right\} = \left(z - \frac{1}{2} xy\right)^2 + \cdots.$$

Wäre nun G unendlich, so enthielte es auch für $n > 4$ noch charakteristische Functionen n^{ter} Stufe, also etwa die Function:

$$U = \sum_0^m {}^{\mu}\, z^{\mu} h_{n-2\mu}(x, y) + \cdots,$$

wo $m \leqq E\left(\frac{n}{2}\right)$ ist und wo wir annehmen können, dass $m > 0$ und $h_{n-2m} \neq 0$ ist, denn die Glieder niedrigster Stufe von U dürfen nicht von z frei sein.

Wir dürfen hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass h_{n-2m} von x frei ist. Es wird nämlich:

$$\{y^2 + \cdots,\; U\} = \sum_0^m {}^{\mu}\, z^{\mu} 2y \frac{\partial h_{n-2\mu}}{\partial x} + \sum_1^m {}^{\mu}\, \mu z^{\mu-1} y^2 h_{n-2,\mu} + \cdots,$$

wenn daher h_{n-2m} noch nicht frei von x ist, können wir durch genügend oft wiederholte Combination mit $y^2 + \cdots$ stets eine charakteristische Function von der Form U ableiten, in der h_{n-2m} von x frei und überdies von Null verschieden ist. Demnach dürfen wir von vornherein $h_{n-2m} = y^{n-2m}$ setzen. Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich, wenn wir jedesmal unter den Gliedern n^{ter} Stufe nur die mit z^{m-1} und mit z^m berücksichtigen:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} U = \cdots + z^{m-1} h_{n-2m+2} + z^m y^{n-2m} + \cdots \\ \{y^2 + \cdots, U\} = \cdots + z^{m-1} y\left(2 \dfrac{\partial h_{n-2m+2}}{\partial x} + m y^{n-2m+1}\right) \\ \{xy + \cdots, U\} = \cdots + z^{m-1}\left(x \dfrac{\partial h_{n-2m+2}}{\partial x} - y \dfrac{\partial h_{n-2m+2}}{\partial y}\right) - (n-2m) z^m y^{n-2m} + \cdots. \end{cases}$$

Liesse sich nun aus diesen drei Functionen stets eine Function n^{ter} Stufe linear ableiten, deren Glieder n^{ter} Stufe von z^m frei wären-

aber z^{m-1} wirklich enthielten, so könnten wir die Zahl m von vornherein um eine Einheit kleiner annehmen als vorhin, könnten dann das eben angewendete Verfahren noch $(m-1)$-mal wiederholen und würden schliesslich zu einer charakteristischen Function n^{ter} Stufe von z gelangen, deren Glieder n^{ter} Stufe von z frei wären. Eine solche Function ist aber ausgeschlossen, also müssen wir bei dieser Verkleinerung von m einmal, ohne dass m null wird, zu einer Function:

$$U = \cdots + z^{m-1} h_{n-2m+2} + z^m y^{n-2m} + \cdots$$

gelangen, die so beschaffen ist, dass sich aus den drei Functionen (A) keine Function linear ableiten lässt, deren Glieder n^{ter} Stufe zwar von z^m, nicht aber von z^{m-1} frei sind. Die ganze homogene Function h_{n-2m+2} genügt daher dann den Gleichungen:

$$2\frac{\partial h_{n-2m+2}}{\partial x} + my^{n-2m+1} = 0$$

$$x\frac{\partial h_{n-2m+2}}{\partial x} - y\frac{\partial h_{n-2m+2}}{\partial y} = -(n-2m)h_{n-2m+2}$$

und hat somit die Form:

$$h_{n-2m+2} = -\frac{m}{2}xy^{n-2m+1},$$

so dass U selbst in der Form:

$$U = \sum_0^{m-2}{}^{\mu} z^\mu h_{n-2\mu}^{(x,y)} - \frac{m}{2}z^{m-1}xy^{n-2m+1} + z^m y^{n-2m} + \cdots$$

erscheint.

Nunmehr bilden wir die charakteristische Function $(n+1)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$\left\{yz - \frac{1}{2}xy^2 + \cdots,\, U\right\} = \sum_0^{m-1}{}^{\mu} z^\mu g_{n+1-2\mu}^{(x,y)} - \frac{1}{2}(n-m-2)z^m y^{n+1-2m} + \cdots.$$

Da $n > 4$ war und $m \leqq E\left(\frac{n}{2}\right)$, so ist $n-m > 2$, das Glied mit z^m verschwindet also nicht. Wir sehen hieraus, dass wir die Function U von vornherein so annehmen können, dass n um Eins grösser ist als ursprünglich, während m dasselbe bleibt. Das ganze Verfahren können wir nun offenbar so oft wiederholen, wie wir wollen, und wir finden daher schliesslich eine unserer Gruppe angehörige charakteristische Function:

$$U = \sum_0^{m}{}^{\mu} z^\mu h_{n-2\mu}(x, y) + \cdots,$$

bei der $m > 0$, $h_{n-2m} \neq 0$ und $n - 2m$ beliebig gross, also insbesondere > 2 ist. Combiniren wir aber jetzt U m-mal hinter einander mit $1 + \cdots$, so erhalten wir eine charakteristische Function von der Form:

$$h_{n-2m}(x, y) + \cdots,$$

die mindestens von dritter Stufe ist und deren Glieder niedrigster Stufe von z frei sind. Damit sind wir auf einen Widerspruch gestossen und haben also bewiesen, dass der oben angenommene Fall gar nicht eintreten kann.

Gehört also eine unendliche Berührungstransformationsgruppe G zu der dritten der drei von uns unterschiedenen Klassen, und sind i, k, j irgend drei positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null, so enthält G stets eine charakteristische Function $(i + k + 2j)^{\text{ter}}$ Stufe von der Form:

$$x^i y^k z^j + \cdots.$$

Ist daher n eine beliebige ganze Zahl $\geqq 0$, so enthält G stets die grösste überhaupt mögliche Zahl von solchen charakteristischen Functionen n^{ter} Stufe, aus denen sich keine Function $(n+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Stufe linear ableiten lässt.

Hieraus folgt endlich, dass die charakteristischen Functionen W unserer Gruppe G gar keiner Definitionsgleichung genügen können.

In der That, die etwa vorhandenen Definitionsgleichungen sind nothwendig linear und homogen in W und seinen Differentialquotienten. Wir wollen nun jeden Differentialquotienten von der Form:

$$\frac{\partial^{i+k+j} W}{\partial x^i \partial y^k \partial z^j}$$

als einen Differentialquotienten $(i + k + 2j)^{\text{ter}}$ Stufe bezeichnen und uns die Definitionsgleichungen auf eine gewisse Normalform gebracht denken: Zunächst[1]) schaffen wir alle Differentialquotienten zweiter und höherer Stufe fort und lösen die übrig bleibenden Gleichungen nach so vielen Differentialquotienten erster Stufe auf als möglich, dann schaffen wir alle Differentialquotienten dritter und höherer Stufe fort und lösen die übrig bleibenden Gleichungen zweiter Stufe nach so vielen Differentialquotienten zweiter Stufe auf wie möglich. In dieser

1) Das Auftreten einer Gleichung nullter Stufe ist ausgeschlossen, da die nur die Form: $W = 0$ haben könnte.

Weise fahren wir fort, dann wird jede Definitionsgleichung von der Stufe $i+k+2j$ die Form:

$$\frac{\partial^{i+k+j}W}{\partial x^i \partial y^k \partial z^j} = \sum_{\mu\nu\pi}^{0,1\ldots} \chi_{\mu\nu\pi}(x,y,z) \frac{\partial^{\mu+\nu+\pi}W}{\partial x^\mu \partial y^\nu \partial z^\pi}$$

besitzen, wo μ, ν, π der Bedingung $\mu+\nu+2\pi \leqq i+k+2j$ genügen und wo die χ gewöhnliche Potenzreihen von x, y, z sind.

Gäbe es nun bei der oben betrachteten Gruppe G eine Definitionsgleichung von $(i+k+2j)^{\text{ter}}$ Stufe, so wären offenbar die Coefficienten der Glieder niedrigster Stufe in jeder charakteristischen Function $(i+k+2j)^{\text{ter}}$ Stufe von G durch eine lineare homogene Relation verknüpft, was nach dem Obigen unmöglich ist. Demnach haben die Definitionsgleichungen von G die Form $0=0$ und G ist die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene.

Wir haben somit den

Satz I. Enthält eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene charakteristische Functionen von der Form:

$$1+\cdots,\ x+\cdots,\ y+\cdots,\ z-\frac{1}{2}xy+\cdots$$

$$x^2+\cdots,\ xy+\cdots,\ y^2+\cdots$$

und ausserdem noch zwei dritter Stufe von der Form:

$$zx+g_3(x,y)+\cdots,\ zy+h_3(x,y)+\cdots,$$

so ist sie die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene.

Wir kehren jetzt zu den beiden ersten Klassen von Gruppen zurück und zeigen, auf welche Normalformen sie gebracht werden können.

§ 5.

Jede der ersten Klasse angehörige Gruppe enthielt die charakteristischen Functionen:

$$x^i y^k + \cdots \qquad (i, k = 0, 1, 2 \ldots),$$

aber keine charakteristische Function, in deren Gliedern niedrigster Stufe z vorkommt. Die allgemeinste charakteristische Function W der Gruppe wird daher bis auf die Glieder zweiter Stufe genau die Form:

$$\begin{aligned} W = \quad & c_1(1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta x^2 + \varepsilon xy + \vartheta y^2 + \cdots) \\ & + c_2(x + \gamma' z + \delta' x^2 + \varepsilon' xy + \vartheta' y^2 + \cdots) \\ & + c_3(y + \gamma'' z + \delta'' x^2 + \varepsilon'' xy + \vartheta'' y^2 + \cdots) \\ & + c_4(x^2 + \cdots) + c_5(xy + \cdots) + c_6(y^2 + \cdots) + \cdots \end{aligned}$$

besitzen, wo $c_1, c_2, \ldots c_6$ willkürliche Constanten, $\alpha, \beta, \ldots, \gamma', \ldots$ aber bestimmte Zahlen sind.

Hieraus folgt, wenn wir die Substitution: $x = y = z = 0$ durch den Index 0 andeuten:

$$(W)_0 = c_1, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 = c_1\alpha + c_2, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 = c_1\beta + c_3$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 = c_1\gamma + c_2\gamma' + c_3\gamma''$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 = 2c_1\delta + 2c_2\delta' + 2c_3\delta'' + 2c_4$$

und so weiter. Aus den drei ersten dieser Gleichungen lassen sich c_1, c_2, c_3 nicht wegschaffen, also giebt es jedenfalls keine Definitionsgleichung erster Stufe; dagegen kann man $c_1 \ldots c_6$ aus den sechs ersten wegschaffen, es wird nämlich:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 = \gamma'\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 + \gamma''\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 + (\gamma - \alpha\gamma' - \beta\gamma'')(W)_0.$$

Da nun $x = y = z = 0$ ein Werthsystem von allgemeiner Lage ist, so können wir hieraus schliessen, dass unsere Gruppe eine Definitionsgleichung zweiter Stufe von der Form:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = \varphi(x, y, z)\frac{\partial W}{\partial x} + \chi(x, y, z)\frac{\partial W}{\partial y} + \psi(x, y, z)\, W$$

besitzt.

Ausser der Definitionsgleichung (a) treten natürlich auch noch alle die auf, die durch Differentiation nach x, y, z aus ihr entstehen, aber auch keine weiteren. In der That, die allgemeinste Definitionsgleichung n^{ter} Stufe ($n \geqq 2$), die aus (a) durch Differentiation entsteht, hat die Form:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial^{i+k+j+1} W}{\partial x^i \partial y^k \partial z^{j+1}} = \sum_{\mu\nu\pi}^{0,1,2\ldots} \varrho_{\mu\nu\pi}(x, y, z)\, \frac{\partial^{\mu+\nu+\pi} W}{\partial x^\mu \partial y^\nu \partial z^\pi},$$

wo i, k, j alle Werthe annehmen können, für die $i + k + 2j + 2 = n$ ist und wo μ, ν, π der Bedingung

$$\mu + \nu + \pi < i + k + 2j + 2$$

genügen. Diese Definitionsgleichungen sagen aber aus, dass in jeder charakteristischen Function n^{ter} Stufe, die ihnen genügt, die Glieder n^{ter} Stufe von z frei sind. Da nun unsere Gruppe G für jedes n die grösste mögliche Zahl solcher charakteristischer Functionen n^{ter} Stufe enthält, die Glieder n^{ter} Stufe von z frei sind und aus denen sich keine Function $(n+1)^{ter}$ oder höherer Stufe linear ableiten lässt, so ist klar, dass ausser den Definitionsgleichungen (a) keine weiteren von n^{ter} Stufe auftreten können. Also ergeben sich alle Definitionsgleichungen von G aus (a) durch Differentiation.

Um die Form der Definitionsgleichung (a) näher zu bestimmen, führen wir an Stelle von x, y, z durch die Substitution

$$x = x_1, \quad z = x_2, \quad y = -\frac{p_1}{p_2}$$

die neuen Veränderlichen x_1, x_2, p_1, p_2 ein und verwandeln also die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe in homogene infinitesimale Berührungstransformationen. An Stelle der charakteristischen Function W tritt dann die Function:

$$H = -p_2 W,$$

die in p_1, p_2 homogen von erster Ordnung ist (Trfsgr. II, 273) und zwar genügt H entsprechend der Differentialgleichung (a) einer Gleichung von der Form:

$$\lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + \mu_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \mu_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \nu H,$$

wo die λ, μ, ν gewisse Functionen von x_1, x_2, p_1, p_2 sind, und ausserdem noch der Homogenitätsbedingung:

$$p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = H$$

genügen, so dass also in den neuen Veränderlichen die allgemeinste charakteristische Function unserer Gruppe durch die beiden Differentialgleichungen

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + (\mu_1 - \nu p_1) \frac{\partial H}{\partial p_1} + (\mu_2 - \nu p_2) \frac{\partial H}{\partial p_2} = 0 \\ p_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = H \end{cases}$$

definirt wird.

Sind H_1, H_2, H_3 drei von einander unabhängige Lösungen der Differentialgleichungen (c), so lässt sich die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen, also mit andern Worten die allgemeinste charakteristische Function unserer Gruppe in der Form:

$$H_3 . \Omega\left(\frac{H_1}{H_3}, \frac{H_2}{H_3}\right)$$

darstellen, wo Ω eine willkürliche Function seiner Argumente ist. Da nun überdies zugleich mit H_i und H_k stets auch $(H_i H_k)$ die Differentialgleichungen (c) befriedigt, so ergiebt sich, dass alle charakteristischen Functionen unserer Berührungstransformationsgruppe G einer gewissen dreigliedrigen homogenen Functionengruppe angehören, sie bilden nämlich den Inbegriff aller Functionen erster Ordnung dieser Functionengruppe.

Denken wir uns jetzt diese dreigliedrige homogene Functionengruppe auf ihre kanonische Form gebracht, so sind nur zwei Fälle denkbar: entweder hat die kanonische Form die Gestalt: X_1, X_2, P_1 oder die Gestalt: X_1, P_1, P_2. Von diesen beiden Fällen ist aber der erste ausgeschlossen, denn sonst könnte man durch eine homogene Berührungstransformation:

$$x_1' = X_1, \quad x_2' = X_2, \quad p_1' = P_1, \quad p_2' = P_2$$

erreichen, dass alle charakteristischen Functionen von G in der Form:

$$p_1' \Omega(x_1', x_2')$$

enthalten wären, dass also G aus lauter Punkttransformationen bestände, während es doch irreducibel sein soll.

Unsere Functionengruppe besitzt somit die kanonische Form: X_1, P_1, P_2, die charakteristischen Functionen von G lassen sich somit in der Form:

$$H = P_2 \Omega\left(X_1, -\frac{P_1}{P_2}\right)$$

darstellen oder nach Ausführung einer geeigneten Berührungstransformation:

$$p_1' = P_1, \quad p_2' = P_2, \quad x_1' = X_1, \quad x_2' = X_2$$

in der Form:

$$H = p_2' \Omega\left(x_1', -\frac{p_1'}{p_2'}\right),$$

worin schon liegt, dass die hier betrachteten Gruppen alle durch Berührungstransformationen mit einander ähnlich sind.

Wir wollen uns gleich hier noch einmal ausdrücklich davon überzeugen, dass unsere Gruppe G irreducibel ist.

Wäre sie reducibel, so müsste es zwei von einander unabhängige Functionen

$$N_1\left(x_1', x_2', \frac{p_1'}{p_2'}\right), \quad N_2\left(x_1', x_2', \frac{p_1'}{p_2'}\right)$$

geben, die in Involution lägen:

$$(N_1 N_2) = 0$$

und die für jedes H Gleichungen von der Form:

$$(HN_k) = \varphi_k(N_1, N_2) \qquad (k = 1, 2)$$

erfüllten. Dann aber wäre:

$$(p_1' N_k) = \frac{\partial N_k}{\partial x_1'} = \psi_{k1}(N_1, N_2)$$

$$(p_2' N_k) = \frac{\partial N_k}{\partial x_2'} = \psi_{k2}(N_1, N_2)$$

$$\left(\frac{p_1'^2}{p_2'}, N_k\right) = \frac{2p_1'}{p_2'}\frac{\partial N_k}{\partial x_1'} - \frac{p_1'^2}{p_2'^2}\frac{\partial N_k}{\partial x_2'} = \chi_k(N_1, N_2)$$

und da N_1 und N_2 nicht beide von x_1' und x_2' frei sein können, so käme:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \omega(N_1, N_2),$$

wir könnten also

$$N_2 = \frac{p_1'}{p_2'}$$

setzen. Ferner müsste sein:

$$(x_1'^2 p_1', N_2) = -2x_1'\frac{p_1'}{p_2'} = \varphi(N_1 N_2),$$

also könnten wir $N_1 = x_1'$ setzen, dann aber würde folgen:

$$(N_2 N_1) = \frac{1}{p_2'},$$

also gleich einem nicht identisch verschwindenden Ausdruck, womit wir auf einen Widerspruch gestossen sind. Unsere Gruppe G ist also wirklich irreducibel.

Kehren wir jetzt zu den nicht homogenen Veränderlichen z, x, y zurück, so sehen wir, dass die allgemeinste charakteristische Function unserer Gruppe G jetzt die Form:

$$W = \Omega(x, y)$$

besitzt, wo Ω eine willkürliche Function bezeichnet. Also:

Satz 2. Enthält eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene die folgenden charakteristischen Functionen von nullter, erster und zweiter Stufe in den z, x, y:

$$\begin{array}{lll} 1+\cdots, & x+\cdots, & y+\cdots \\ x^2+\cdots, & xy+\cdots, & y^2+\cdots, \end{array}$$

dagegen keine charakteristische Function zweiter Stufe von der Form:

$$z-\frac{1}{2}xy+\cdots,$$

so ist die Gruppe irreducibel und kann durch eine Berührungstransformation der Ebene auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre allgemeinste charakteristische Function die Form:

$$W=\Omega(x, y)$$

besitzt, unter Ω eine willkürliche Function verstanden.

§ 6.

Nunmehr bleiben uns nur noch alle die Gruppen zu bestimmen, deren charakteristische Functionen die Form:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} \qquad 1+\cdots, \quad x+\cdots, \quad y+\cdots \\ x^2+\cdots, \quad xy+\cdots, \quad y^2+\cdots, \quad z-\frac{1}{2}xy+\cdots \\ \qquad x^iy^k+\cdots \quad (i, k=0, 1, 2 \ldots, i+k \gtreqless 3) \end{cases}$$

besitzen, während charakteristische Functionen dritter oder höherer Stufe, in deren Gliedern niedrigster Stufe z wirklich vorkommt, nicht auftreten.

Combiniren wir irgend zwei charakteristische Functionen (d) unserer Gruppe, etwa die beiden U und V von bezüglich m^{ter} und n^{ter} Stufe, so erhalten wir eine der Gruppe angehörige charakteristische Function $\{UV\}$, deren Glieder niedrigster Stufe sich aus den Gliedern niedrigster Stufe gewisser unter den Functionen (d) linear ableiten lassen. Enthält nun die Entwickelung von $\{UV\}$ wirklich Glieder $(m+n-2)^{\text{ter}}$ Stufe, so kommt unter diesen Gliedern augenscheinlich niemals eins von der Form: $z-\frac{1}{2}xy$ vor. Diesen Um-

stand können wir benutzen, um eine wichtige Eigenschaft unserer Gruppe zu beweisen.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$
\text{(e)} \qquad \begin{cases} N = 1 + \cdots, \quad X = x + \cdots, \quad Y = y + \cdots \\ X^2 = x^2 + \cdots, \quad XY = xy + \cdots, \quad Y^2 = y^2 + \cdots \\ \quad X^i Y^k = x^i y^k + \cdots \qquad (i + k > 2), \end{cases}
$$

wo zum Beispiel XY nicht als ein Product, sondern nur als ein *Symbol* aufzufassen ist; ausserdem setzen wir:

$$
Z = z - \frac{1}{2} xy + \cdots .
$$

Ferner wollen wir unter U_k, V_k ... immer solche charakteristische Functionen unserer Gruppe verstehen, deren Reihenentwickelungen mindestens mit Gliedern k^{ter} Stufe beginnen. Endlich wollen wir unter $\bar{U}_k$, $\bar{V}_k$ ... solche charakteristische Functionen k^{ter} Stufe verstehen, die die Form:

$$
\alpha N + \beta X + \gamma Y + \lambda X^2 + \mu XY + \nu Y^2 + U_3
$$

besitzen.

Wir werden jetzt zeigen, dass sich die charakteristischen Functionen (d) immer so wählen lassen, dass je zwei unter den Functionen (d) und Z mit einander combinirt immer eine charakteristische Function von der Form $\bar{U}$ liefern, also eine, die sich schon aus den Functionen (e) linear ableiten lässt, ohne Zuhülfenahme der Function Z.

In der That, es bestehen Relationen von der Form:

$$
\{YZ\} = -\frac{1}{2} Y + \delta Z + \bar{U}_2
$$

$$
\{XZ\} = -\frac{1}{2} X + \varepsilon Z + \bar{V}_2 ;
$$

führen wir daher $Y - 2\delta Z$ als neues Z ein und $X - 2\varepsilon Z$ als neues X, so wird einfach:

$$
\text{(f)} \qquad \{YZ\} = -\frac{1}{2} Y + \bar{U}_2, \quad \{XZ\} = -\frac{1}{2} X + \bar{V}_2 .
$$

Da ferner:

$$
\{YX\} = 1 + \cdots
$$

ist, so können wir hier die rechte Seite als neues N einführen und bekommen:

$$
\text{(g)} \qquad \{YX\} = N .
$$

Nachdem wir die charakteristischen Functionen (e) in dieser Weise gewählt haben, behaupten wir, dass jetzt wirklich zwei beliebige unter den charakteristischen Functionen (e) und Z combinirt stets eine von der Form:

$$\alpha N + \beta X + \gamma Y + \bar{U}_2$$

liefern.

Für zwei solche unter den charakteristischen Functionen (e) und Z, deren Stufensumme > 4 ist, bedarf es gar keines besonderen Beweises, denn die liefern combinirt eine Function von mindestens dritter Stufe. Wir brauchen also unsere Behauptung nur für je zwei solche charakteristische Functionen zu beweisen, deren Stufensumme $\leqq 4$ ist.

Zunächst ist von vornherein:

$$\{Y^2, X^2\} = 4\,YX + U_3$$
$$\{Y^2, XY\} = 2\,Y^2 + V_3$$
$$\{XY, X^2\} = 2\,X^2 + W_3$$

und:

$$\{X^2, Z\}, \quad \{XY, Z\}, \quad \{Y^2, Z\}$$

sind sämmtlich von dritter oder höherer Stufe. Demnach ist ganz allgemein:

$$\text{(h)} \qquad \{U_2 V_2\} = \bar{W}_2 .$$

Ferner ergiebt sich aus der Form der Reihenentwickelungen (e) sofort, dass

$$\text{(k)} \qquad \{Y U_3\} = \bar{V}_2, \quad \{X U_3\} = \bar{W}_2$$

ist. Dagegen wird zunächst:

$$\{Y \bar{U}_2\} = \lambda X + \mu Y + \nu Z + \bar{V}_2,$$

die Identität:

$$\{\{Y\bar{U}_2\}Z\} + \{\{\bar{U}_2 Z\}Y\} + \{\{ZY\}\bar{U}_2\} = 0$$

liefert aber bei Berücksichtigung von (f), (k) und (h):

$$-\frac{\lambda}{2}X - \frac{\mu}{2}Y + \bar{W}_2 + \frac{1}{2}\{Y\bar{U}_2\} = 0,$$

also ist $\nu = 0$. In derselben Weise lässt sich $\{X\bar{U}_2\}$ behandeln. Wir können somit die eben gewonnenen Ergebnisse mit den Formeln (f) in die allgemeine Gleichung:

$$\text{(l)} \qquad \{U_1 V_2\} = \bar{W}_1$$

zusammenfassen.

Die Identität:

$$\{\{YX\}Z\} + \{\{XZ\}Y\} + \{\{ZY\}X\} = 0$$

liefert wegen $\{YX\} = N$ und wegen der Gleichungen (f) und (l) sofort:

$$\{NZ\} = -N + \overline{U}_2 ,$$

es ist also überhaupt:

$$\{ZU_k\} = \overline{V}_k \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots) .$$

Ferner ist offenbar:

$$\{NU_4\} = V_3 ;$$

dagegen wird zunächst:

$$\{NU_3\} = \lambda Z + \overline{V}_2 ,$$

aber die Identität:

$$\{\{YX\}U_3\} = \{\{XU_3\}Y\} + \{\{U_3Y\}X\} = 0$$

zeigt wegen

$$\{XU_3\} = \overline{V}_2 , \quad \{\overline{V}_2 Y\} = \overline{W}_1 , \quad \ldots ,$$

dass $\lambda = 0$ ist. Ebenso liefert die Identität:

$$\{\{YX\}U_2\} + \{\{XU_2\}Y\} + \{\{U_2Y\}X\} = 0$$

bei Berücksichtigung von (g) eine Gleichung von der Form:

$$\{NU_2\} = \overline{V}_0 .$$

Endlich bilden wir noch die Identität:

$$\{\{NZ\}Y\} + \{\{ZY\}N\} + \{\{YN\}Z\}$$

und erkennen aus ihr, dass auch:

$$\{NY\} = \overline{U}_0$$

ist; ebenso wird natürlich auch:

$$\{NX\} = \overline{V}_0 ,$$

so dass nunmehr ganz allgemein die Gleichung:

$$\{U_k V_j\} = \overline{W}_{k+j-2}$$

gilt, wo U_k und V_j irgend zwei unter den charakteristischen Functionen Z und (e) bedeuten, während $\overline{W}_{k+j-2}$ eine charakteristische Function ist, die ohne Zuhülfenahme von Z aus den Functionen (e) allein linear ableitbar ist.

Wir können hieraus schliessen, dass die erste derivirte Gruppe unserer unendlichen Gruppe (d) zwar alle die charakteristischen Functionen (e) enthält, nicht aber eine charakteristische Function von der Form Z und also überhaupt keine charakteristische Function, deren Glieder niedrigster Stufe z wirklich enthalten. Diese erste derivirte Gruppe gehört demnach unter den im vorigen Paragraphen erledigten Fall und kann durch eine Berührungstransformation der Ebene auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre allgemeinste charakteristische Function die Form

$$W(x, y)$$

erhält, unter W eine willkürliche Function von x und y allein verstanden. Es bleibt uns daher nur noch die Form zu bestimmen, die unsere Gruppe in den neuen Veränderlichen erhält.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die unendliche Gruppe $W(x, y)$ wieder in homogener Form, wodurch ihre allgemeine charakteristische Function die Form:

$$H = p_2 W\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right)$$

annimmt, und wir müssen nun entsprechend der charakteristischen Function Z eine charakteristische Function

$$U = p_2 f\left(x_1, x_2, -\frac{p_1}{p_2}\right)$$

bestimmen, die so beschaffen ist, dass für jedes H eine Relation von der Form:

$$(HU) = p_2 V\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right)$$

besteht. Dabei dürfen wir natürlich zu U jede beliebige Function von der Form H addiren.

Zunächst ist:

$$(p_2 U) = \frac{\partial U}{\partial x_2} = p_2 V_1\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right),$$

also wird:

$$U = x_2 p_2 V_1\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right) + p_2 W\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right),$$

wo W ohne Weiteres gleich Null gesetzt werden kann. Ferner muss werden

$$(p_1 U) = \frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2 p_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = p_2 V_2\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right),$$

also ist $V_2 = 0$, und V_1 und somit auch U von x_1 frei. Endlich muss werden:

$$(x_1 p_1, U) = - p_1 \frac{\partial U}{\partial p_1} = - x_2 p_1 V_1'\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = p_2 V_3\left(x_1, -\frac{p_1}{p_2}\right),$$

also ist $V_3 = 0$ und somit V_1 eine blosse Constante.

Die charakteristische Function U kann somit in der Form $x_2 p_2$ angenommen werden, und wirklich wird jetzt:

$$(x_2 p_2, H) = - p_2 W\left(x_1, - \frac{p_1}{p_2}\right) + p_2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\partial W}{\partial\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)}.$$

Kehren wir daher zu den nichthomogenen Veränderlichen z, x, y zurück, so sehen wir, dass zu den charakteristischen Functionen $W(x, y)$ noch die Function z hinzukommt und dass die allgemeine charakteristische Function unserer Gruppe in den neuen Veränderlichen die Form:

$$az + W(x, y)$$

erhält. Diese Gruppe ist natürlich irreducibel, da sie eine irreducible unendliche Untergruppe enthält.

Demnach haben wir den

Satz. Enthält eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene die folgenden charakteristischen Functionen von nullter, erster und zweiter Stufe in den z, x, y:

$$1 + \cdots, \quad x + \cdots, \quad y + \cdots, \quad z - \frac{1}{2} xy + \cdots$$
$$x^2 + \cdots, \quad xy + \cdots, \quad y^2 + \cdots,$$

dagegen keine charakteristische Function dritter Stufe, in deren Gliedern dritter Stufe z wirklich vorkommt, so ist die Gruppe irreducibel und kann durch eine Berührungstransformation der Ebene auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre allgemeine charakteristische Function die Form:

$$az + W(x, y)$$

besitzt, wo a eine willkürliche Constante und W eine willkürliche Function bedeutet.

§ 7.

Wir fassen schliesslich die Ergebnisse der §§ 1—6 noch einmal zusammen:

Theorem. *Soll eine unendliche continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene z, x irreducibel sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass sie in der Umgebung eines Werthsystems von allgemeiner Lage, etwa in der Umgebung des Werthsystems:* $z = x = y = 0$ *charakteristische Functionen nullter, erster und zweiter Stufe von der folgenden Form:*

$$1 + \cdots, \quad x + \cdots, \quad y + \cdots$$
$$x^2 + \cdots, \quad xy + \cdots, \quad y^2 + \cdots$$

enthält, und zwar ist die Gruppe entweder die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene oder sie ist durch eine Berührungstransformation der Ebene ähnlich mit einer unendlichen Gruppe, deren charakteristische Functionen eine der beiden Formen:

$$\Omega(x, y)$$

und:

$$cz + \Omega(x, y)$$

besitzen, wo Ω *eine willkürliche Function seiner Argumente und c eine willkürliche Constante bedeutet.*

Es giebt demnach in der Ebene überhaupt nur sechs irreducible continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen, drei endliche und drei unendliche. Fasst man diese Gruppen als Gruppen von Punkttransformationen des R_3 auf, so giebt es unter ihnen nur zwei, die primitiv sind, nämlich die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen und die zehngliedrige irreducibele endliche Gruppe. Die beiden unendlichen Gruppen: $\Omega(x, y)$ und: $cz + \Omega(x, y)$ lassen nämlich, als Gruppen des Raumes z, x, y aufgefasst, das simultane System: $dx = dy = 0$ invariant und sind daher imprimitiv.

Capitel IV.

Bestimmung einer Klasse von irreducibeln unendlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppen des R_{n+1}.

In Capitel 25 von Trfsgr. II sind alle endlichen continuirlichen Berührungstransformationsgruppen des R_{n+1} bestimmt, die einer gewissen Klasse angehören. Jetzt suchen wir auch alle unendlichen continuirlichen Gruppen, die dieser Klasse angehören.

Benutzen wir, wie damals, die Grössen z, $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$ als Coordinaten der Elemente des R_{n+1}: z, $x_1 \dots x_n$, so erscheint die Bedingung für das Vereinigtliegen zweier unendlich benachbarten Elemente in der Form:

$$dz - \sum_1^n {}^\nu\, y_\nu dx_\nu = 0$$

und die betreffende Klasse von Berührungstransformationsgruppen des R_{n+1} lässt sich nun folgendermassen definiren: Sie besteht aus allen den Berührungstransformationsgruppen des R_{n+1}, die als Gruppen von Punkttransformationen des R_{2n+1}: z, $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$ so beschaffen sind, dass bei Festhaltung eines Punktes: z^0, x_ν^0, y_ν^0 von allgemeiner Lage die ∞^{2n-1} durch diesen Punkt gehenden Linienelemente: $dz : dx_\nu : dy_\nu$, die der Gleichung:

$$dz - \sum_1^n {}^\nu\, y_\nu^0 dx_\nu = 0$$

genügen, in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden.

§ 1.

Wie in den Trfsgr. II, S. 462 denken wir uns das Werthsystem z^0, x_ν^0, y_ν^0 durch eine Berührungstransformation des R_{n+1} in das Werthsystem: $z = x_\nu = y_\nu = 0$ übergeführt. Dann zeigen die damaligen Betrachtungen, dass jede Berührungstransformationsgruppe G von der verlangten Beschaffenheit in der Umgebung des Werthsystems: $z = x_\nu = y_\nu = 0$ die nachstehenden charakteristischen Functionen enthält:

Erstens gewisse von nullter und erster Stufe von der Form:

$$\text{(A)} \qquad 1 + \cdots, \quad x_\nu + \cdots, \quad y_\nu + \cdots \qquad (\nu = 1 \ldots n),$$

zweitens entweder $n(2n+1)$ oder $n(2n+1)+1$ charakteristische Functionen zweiter Stufe, aus denen sich keine Function dritter oder höherer Stufe linear ableiten lässt, und zwar haben diese charakteristischen Functionen im ersten Falle die Form:

$$\text{(B)} \qquad x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots \qquad (\mu, \nu = 1 \cdots n),$$

wozu im zweiten Falle noch eine von der Gestalt:

$$\text{(C)} \qquad z - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu y_\nu + \cdots$$

kommt.

Es fragt sich nun, was für charakteristische Functionen dritter und höherer Stufe eine **unendliche** Berührungstransformationsgruppe G von dieser Beschaffenheit enthalten kann.

§ 2.

Wir benutzen zunächst blos den Umstand, dass G immer $n(2n+1)$ Functionen zweiter Stufe von der Form (B) enthält, und wollen zusehen, was sich aus diesem Umstande für Schlüsse über unsere Gruppe G ziehen lassen.

G enthalte eine charakteristische Function m^{ter} Stufe $(m > 2)$, deren Glieder m^{ter} Stufe von z frei sind. Dann hat diese charakteristische Function die Form:

$$U = \varphi_m(x_1 \ldots x_n, \; y_1 \ldots y_n) + \cdots,$$

wo φ_m eine ganze homogene Function m^{ten} Grades bedeutet und wo die weggelassenen Glieder von $(m+1)^{\text{ter}}$ und höherer Stufe sind.

Ist φ_m nicht schon von allen x frei, so combiniren wir U mit den charakteristischen Functionen:

$$y_1^2 + \cdots, \quad \cdots, \quad y_n^2 + \cdots,$$

mit jeder eine geeignete Anzahl von Malen, und bekommen wir schliesslich eine Function m^{ter} Stufe von der Form U, in der aber φ_m von $x_1 \ldots x_n$ frei ist. Diese neue Function U combiniren wir mit den Functionen:

$$y_1 x_2 + \cdots, \quad y_1 x_3 + \cdots, \quad \cdots, \quad y_1 x_n + \cdots,$$

mit jeder eine geeignete Anzahl von Malen, und finden auf diese Weise zuletzt eine unserer Gruppe angehörige Function von der Form:

$$V = y_1^m + \cdots .$$

Aus dieser endlich können wir durch Combination mit

$$x_1 x_\mu + \cdots, \; x_1 y_\mu + \cdots \quad (\mu = 1 \ldots n)$$

eine charakteristische Function von der Form:

$$W = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \cdots y_n^{\nu_n} + \cdots$$

ableiten, in der $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$ beliebige ganze Zahlen $\geqq 0$ sind, deren Summe den Werth m besitzt.

Ist $m > 3$, so finden wir, indem wir V $(m-3)$-mal mit $x_1 + \cdots$ combiniren, die charakteristische Function

$$y_1^3 + \cdots,$$

mit der nach dem eben Gesagten zugleich auch die Function:

$$x_1 y_1^2 + \cdots$$

auftritt. Combiniren wir aber $y_1^3 + \cdots$ eine genügende Anzahl von Malen mit: $x_1 y^2 + \cdots$, so erhalten wir schliesslich überhaupt für jedes $m > 2$ eine charakteristische Function von der Form: $y_1^m + \cdots$. Demnach können wir sagen:

Enthält eine Berührungstransformationsgruppe des R_{n+1}: $z, x_1 \ldots x_n$ charakteristische Functionen von der Form:

$$1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad y_\nu + \cdots$$
$$x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots$$
$$(\mu, \nu = 1 \ldots n)$$

und enthält sie ausserdem auch nur eine charakteristische Function von dritter oder höherer Stufe, deren Glieder niedrigster Stufe von z frei sind, so ist sie unendlich und enthält, wenn unter $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$ beliebige positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null verstanden werden, stets eine charakteristische Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} + \cdots,$$

wo die Stufenzahl der weggelassenen Glieder grösser ist als $\mu_1 + \cdots + \mu_n + \nu_1 + \cdots + \nu_n$.

§ 3.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass G eine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe enthält, in deren Gliedern niedrigster Stufe z vorkommt.

Eine solche charakteristische Function wird die Form haben:

$$U = \sum_0^l {}^i \varphi_{m-2i}(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) z^i + \cdots,$$

wo φ_{m-2i} eine ganze homogene Function $(m-2i)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet und wo ferner $m > 2$, $0 < l < E\left(\frac{m}{2}\right)$ und $\varphi_{m-2l} \neq 0$ ist, während die weggelassenen Glieder von $(m+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Stufe sind. Ist nun φ_{m-2l} keine blosse Constante, so ist unter den $2n$ Functionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$\{y_\mu + \cdots, U\} = \sum_0^{l-1} {}^i \psi_{m-2i-1}(x, y) z^i + \frac{\partial \varphi_{m-2l}}{\partial x_\mu} z^l + \cdots$$

$$\{x_\mu + \cdots, U\} = \sum_0^{l-1} {}^i \chi_{m-2i-1}(x, y) z^i - \frac{\partial \varphi_{m-2l}}{\partial y_\mu} z^l + \cdots$$

mindestens eine vorhanden, in deren Gliedern $(m-1)^{\text{ter}}$ Stufe der Factor von z^l nicht verschwindet. Wir können daher, indem wir mit gewissen unter den Functionen $y_\mu + \cdots$, $x_\mu + \cdots$ eine geeignete Anzahl von Malen — im Ganzen $(m-2l)$-mal — combiniren, schliesslich eine charakteristische Function $2l^{\text{ter}}$ Stufe von der Form:

$$\sum_0^{l-1} {}^i \omega_{2l-2i}(x, y) z^i + z^l + \cdots$$

ableiten, die unserer Gruppe angehört. Sollte hier noch $l > 1$ sein, so würden wir durch $(l-1)$-malige Combination mit: $1 + \cdots$ eine Function zweiter Stufe von der Form:

$$\vartheta_2(x, y) + z + \cdots$$

bekommen.

Demnach kann der hier betrachtete Fall überhaupt nicht eintreten, wenn G die charakteristische Function: $z - \frac{1}{2} \sum x_\nu y_\nu + \cdots$ nicht enthält, und indem wir dieses Ergebniss mit dem des vorigen Paragraphen verbinden, erhalten wir den

Satz. Enthält eine Berührungstransformationsgruppe des R_{n+1} die folgenden charakteristischen Functionen nullter, erster und zweiter Stufe:

$$1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad y_\mu + \cdots$$
$$x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots$$
$$(\mu, \nu = 1 \dots n),$$

dagegen keine charakteristische Function zweiter Stufe von der Form:

$$z - \frac{1}{2} \sum_1^n {}^\nu x_\nu y_\nu + \cdots,$$

so enthält sie niemals eine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, in deren Gliedern niedrigster Stufe z wirklich vorkommt. Enthält die Gruppe auch nur eine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, so ist sie *unendlich* und ihre charakteristischen Functionen haben die Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \; y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} + \cdots,$$

wo $\mu_1 \dots \mu_n$, $\nu_1 \dots \nu_n$ beliebige positive Zahlen mit Einschluss der Null bedeuten und wo die Stufenzahl der weggelassenen Glieder grösser ist als die Summe dieser $2n$ Zahlen.

§ 4.

Wir brauchen nunmehr blos noch die Gruppen zu berücksichtigen, die folgende charakteristische Functionen nullter, erster und zweiter Stufe enthalten:

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} 1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad y_\mu + \cdots, \\ z - \frac{1}{2} \sum_1^n {}^i x_i y_i + \cdots, \\ x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots \\ (\mu, \nu = 1 \dots n). \end{cases}$$

Enthält eine solche Gruppe keine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, in deren Gliedern niedrigster Stufe z wirklich vorkommt, so sind wir fertig, denn dann enthält die Gruppe entweder überhaupt keine charakteristische Function dritter oder höherer

Stufe und ist also endlich, oder ihre charakteristischen Functionen dritter oder höherer Stufe haben sämmtlich die Form:

(E) $$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \; y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} + \cdots,$$

wo $\mu_1 \dots \mu_\mu$, $\nu_1 \dots \nu_n$ beliebige positive ganze Zahlen, mit Einschluss der Null, bedeuten, deren Summe > 2 ist.

Demnach bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, dass unsere Gruppe G ausser den Functionen (E) noch mindestens eine Function m^{ter} Stufe $(m > 2)$ enthält, deren Glieder m^{ter} Stufe nicht von z frei sind.

Eine solche Function m^{ter} Stufe hat nach S. 129 die Form:

$$U = \sum_0^l {}^i \varphi_{m-2i}(x_1 \dots x_n, \; y_1 \dots y_n) z^i + \cdots,$$

wo $0 < l < E\left(\frac{m}{2}\right)$ und $\varphi_{m-2l} \neq 0$ ist und wo die weggelassenen Glieder von $(m+1)^{\text{ter}}$ oder höherer Stufe sind.

Ist φ_{m-2l} eine blosse Constante, so können wir $\varphi_{m-2l} = 1$ setzen. Da nun $m > 2$ ist, so muss in diesem Falle $l \geqq 2$ sein und wir erhalten durch $(l - 2)$-malige Combination mit: $1 + \cdots$ eine charakteristische Function vierter Stufe von der Form:

$$V = \varphi_4(x, y) + \varphi_2(x, y) z + z^2 + \cdots.$$

Jetzt wird aber:

$$\{y_\nu + \cdots, \; V\} = \psi_3(x, y) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\nu} z + \cdots$$

$$\{x_\nu + \cdots, \; V\} = \chi_3(x, y) - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_\nu} + 2x_\nu\right) z + \cdots$$

und da die $2n$ Ausdrücke:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_\nu} + 2x_\nu \qquad (\nu = 1 \dots n)$$

nicht alle verschwinden können, so haben wir hiermit eine unserer Gruppe angehörige Function dritter Stufe gefunden, deren Glieder dritter Stufe z wirklich enthalten.

Ist andererseits φ_{m-2l} keine blosse Constante, so können wir nach Anleitung von S. 129 durch Combination mit: $y_\nu + \cdots$ und $x_\nu + \cdots$ aus U eine Function von derselben Form ableiten, in der φ_{m-2l} eine nicht verschwindende lineare homogene
x_ν, y_ν ist und durch $(l - 1)$-malige Combinati

kommen wir dann ebenfalls eine charakteristische Function dritter Stufe von der vorhin besprochenen Form.

Demnach enthält G unter den gemachten Voraussetzungen immer eine charakteristische Function dritter Stufe von der Form:

$$W = \varphi_3(x_1 \dots x_n, \; y_1 \dots y_n) + \varphi_1(x, y) z + \cdots,$$

in der die lineare homogene Function φ_1 nicht identisch verschwindet.

Nun ist:

$$\{y_\nu^2 + \cdots, \; W\} = \psi_3(x, y) + 2y_\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\nu} z + \cdots$$

$$\{x_\nu^2 + \cdots, \; W\} = \chi_3(x, y) - 2x_\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_\nu} z + \cdots,$$

und für $\mu \neq \nu$:

$$\{y_\mu y_\nu + \cdots, \; W\} = \omega_3(x, y) + \left(y_\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\nu} + y_\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\mu}\right) z + \cdots,$$

also enthält unsere Gruppe überhaupt $2n$ charakteristische Functionen dritter Stufe von der Form:

$$\varphi_3^{(\nu)}(x, y) + x_\nu z + \cdots, \quad \psi_3^{(\nu)}(x, y) + y_\nu z + \cdots.$$

Jetzt müssen wir zwischen zwei verschiedenen Fällen unterscheiden. Entweder nämlich enthält unsere Gruppe G auch noch mindestens eine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, deren Glieder niedrigster Stufe von z frei sind, oder sie enthält keine solche Function.

Im ersten Falle enthält G nach § 2 bei beliebigen Werthen der ganzen Zahlen $\mu_1 \dots \mu_n$, $\nu_1 \dots \nu_n$ stets eine Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \; y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} + \cdots,$$

demnach können wir schliessen, dass G die $2n$ charakteristischen Functionen dritter Stufe: $\varphi_3^{(\nu)}(x, y) + \cdots$ und $\psi_3^{(\nu)}(x, y) + \cdots$ enthält und also auch die Functionen:

$$x_\nu z + \cdots, \quad y_\nu z + \cdots.$$

Ferner wird:

$$\{x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} + \cdots, \; x_k z\} = \nu_k x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \dots y_{k-1}^{\nu_{k-1}} y_k^{\nu_k - 1} y_{k+1}^{\nu_{k+1}} \dots y_n^{\nu_n} z + \\ + g(x, y) + \cdots,$$

wo $g(x, y)$ eine ganze homogene Function von der Ordnung $\Sigma(\mu_i + \nu_i) + 1$ ist. Folglich enthält unsere Gruppe bei beliebiger

Wahl der μ_k und ν_k stets eine charakteristische Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \, y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} z + \cdots .$$

Combiniren wir aber diese Function mit: $x_\nu z + \cdots$, so ergiebt sich, dass auch stets eine Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \, y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} z^2 + \cdots$$

vorhanden ist, und indem wir dieses Verfahren fortsetzen, gelangen wir schliesslich zu einer charakteristischen Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \, y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} z^\varrho + \cdots,$$

in der $\mu_1 \dots \mu_n$, $\nu_1 \dots \nu_n$, ϱ ganz beliebige positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null bedeuten.

Damit ist dieser Fall offenbar erledigt, denn es hat sich gezeigt, dass bei ihm alle Formen von charakteristischen Functionen, die überhaupt denkbar sind, auftreten. Es bleibt also nur noch der Fall zu behandeln, dass G $2n$ charakteristische Functionen dritter Stufe von der Form:

$$\varphi_3^{(\nu)}(x, y) + x_\nu z + \cdots, \quad \psi_3^{(\nu)}(x, y) + y_\nu z + \cdots$$
$$(\nu = 1 \dots n)$$

enthält, aber keine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, deren Glieder niedrigster Stufe von z frei sind.

In diesem Falle ergiebt sich zunächst:

$$\{x_\mu^2 + \cdots, \quad \varphi_3^{(\nu)}(x, y) + x_\nu z + \cdots\} = -\, 2 x_\mu \frac{\partial \varphi_3^{(\nu)}}{\partial y_\mu} - x_\mu^2 x_\nu + \cdots .$$

Hier müssen rechts die Glieder dritter Stufe identisch verschwinden, da G keine charakteristische Function von dieser Form enthalten kann, also wird:

$$2 \frac{\partial \varphi_3^{(\nu)}}{\partial y_\mu} + x_\mu x_\nu = 0 \qquad (\mu = 1 \dots n)$$

und somit:

$$\varphi_3^{(\nu)} = -\, \frac{1}{2} x_\nu \sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\nu + \omega_3(x_1 \dots x_n) .$$

Andererseits aber finden wir:

$$\left\{ \sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu + \cdots, \ \varphi_3^{(\nu)} + x_\nu z + \cdots \right\} = \sum_1^n {}^\mu \left(x_\mu \frac{\partial \varphi_3^{(\nu)}}{\partial x_\mu} - y_\mu \frac{\partial \varphi_3^{(\nu)}}{\partial y_\mu} \right) + x_\nu z + \cdots ,$$

woraus sofort folgt:

$$\sum_1^n{}^{\mu}\, x_\mu \frac{\partial \omega_3}{\partial x_\mu} = 0\,,$$

und da ω_3 eine ganze homogene Function dritten Grades sein muss, so ist das nur möglich, wenn ω_3 verschwindet.

Demnach enthält unsere Gruppe die n charakteristischen Functionen dritter Stufe:

$$x_\nu\Big(z - \frac{1}{2}\sum_1^n{}^{\mu}\, x_\mu y_\mu\Big) + \cdots \qquad (\nu = 1 \ldots n)$$

und, wie man durch Combination mit $y_\nu^2 + \cdots$ erkennt, auch noch die n folgenden:

$$y_\nu\Big(z - \frac{1}{2}\sum_1^n{}^{\mu}\, x_\mu y_\mu\Big) + \cdots \qquad (\nu = 1 \ldots n),$$

sonst aber augenscheinlich keine weiter von dritter Stufe. Zugleich ergiebt sich, dass G auch noch die Function vierter Stufe:

$$\Big\{y_\nu\Big(z - \frac{1}{2}\sum x_\mu y_\mu\Big) + \cdots,\; x_\nu\Big(z - \frac{1}{2}\sum x_\mu y_\mu\Big) + \cdots\Big\} =$$

$$= \Big(z - \frac{1}{2}\sum x_\mu y_\mu\Big)^2 + \cdots$$

enthält.

Käme in G noch eine andere Function vierter Stufe vor, so könnten wir annehmen, dass sie die Form hätte:

$$U = \varphi_4(x, y) + \varphi_2(x, y)\, z + \cdots,$$

wo die ganze homogene Function zweiten Grades φ_2 nicht identisch verschwände. Durch Combination mit: $y_\nu^2 + \cdots$ $(\nu = 1 \ldots n)$ könnten wir hier erreichen, dass φ_2 von $x_1 \ldots x_n$ frei würde und durch Combination mit: $y_1 x_\mu + \cdots$ $(\mu = 2 \ldots n)$ könnten wir auch $y_2 \ldots y_n$ fortschaffen, so dass U schliesslich die Form:

$$\overline{U} = \overline{\varphi}_4(x, y) + y_1^2 z + \cdots$$

erhielte. Nunmehr aber ergäbe sich:

$$\{y_\nu + \cdots,\; \overline{U}\} = \frac{\partial \overline{\varphi}_4}{\partial x_\nu} + \cdots$$

$$\{x_\nu + \cdots,\; \overline{U}\} = -\frac{\partial \overline{\varphi}_4}{\partial y_\nu} - 2\varepsilon_{1\nu} y_1 z - y_1^2 x_\nu + \cdots,$$

also würde folgen:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}_4}{\partial x_\nu} = 0 \, , \qquad \frac{\partial \overline{\varphi}_4}{\partial y_\nu} = - y_1^2 x_\nu - \varepsilon_{1\nu} y_1 \sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu \, ,$$

Gleichungen, die offenbar nicht mit einander verträglich sind, also kann G keine Function vierter Stufe enthalten, ausser der einen, die wir schon kennen.

Jetzt müssen wir noch feststellen, ob G etwa charakteristische Functionen fünfter oder höherer Stufe enthalten kann.

Enthielte es eine Function fünfter Stufe, so hätte die nothwendig die Form:

$$\varphi_5(x, y) + \varphi_3(x, y) z + \varphi_1(x, y) z^2 + \cdots ,$$

wo φ_3 und φ_1 nicht beide identisch verschwinden. Wäre nun $\varphi_1 \equiv 0$, so bekämen wir durch Combination mit: $1 + \cdots$ sofort eine charakteristische Function dritter Stufe: $\varphi_3(x, y) + \cdots$, die nicht vorkommen kann, also ist $\varphi_1 \neq 0$. Wir können daher annehmen, dass φ_1 etwa mindestens eine der beiden Veränderlichen: x_ν und y_ν enthält und finden so entweder durch Combination mit $y_\nu^2 + \cdots$, oder durch Combination mit $x_\nu y_\nu + \cdots$ eine Function von der Form:

$$V = \psi_5(x, y) + \psi_3(x, y) z + y_\nu z^2 + \cdots .$$

Durch Combination mit: $1 + \cdots$ ergiebt sich jetzt die Function dritter Stufe:

$$\psi_3(x, y) + 2 y_\nu z + \cdots ,$$

also muss:

$$\psi_3(x, y) = - y_\nu \sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu$$

sein. Jetzt aber wird:

$$\{x_\nu + \cdots , V\} = \chi_4(x, y) + \sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu z + x_\nu y_\nu z - z^2 - 2 x_\nu y_\nu z + \cdots$$

und diese Function würde die Form:

$$\left(z - \frac{1}{2} \sum x_\mu y_\mu\right)^2 + \cdots$$

haben, was nicht der Fall ist.

Also kommen wir auf einen Widerspruch und erkennen, dass G überhaupt keine Function fünfter Stufe enthält. Damit ist aber auch das Auftreten von Functionen sechster und höherer Stufe ausgeschlossen. Kurz, unsere Gruppe ist endlich und enthält nur die schon bekannten charakteristischen Functionen.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen, so erhalten wir den

Satz. Enthält eine Berührungstransformationsgruppe des R_{n+1} die charakteristischen Functionen nullter, erster und zweiter Stufe:

$$
\text{(D)} \qquad \left\{
\begin{array}{c}
1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad y_\mu + \cdots \\
z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^i x_i y_i + \cdots \\
x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots \\
(\mu, \nu = 1 \ldots n)
\end{array}
\right.
$$

und enthält sie ausserdem noch charakteristische Functionen höherer Stufe, so sind nur drei Fälle möglich: Entweder *erstens* enthält sie, wenn unter $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$, ϱ beliebige positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null verstanden werden, stets eine charakteristische Function von der Form:

$$
x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} z^\varrho + \cdots
$$

oder sie enthält *zweitens*, wenn $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$ die eben angegebene Bedeutung haben, stets eine charakteristische Function von der Form:

$$
x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} + \cdots,
$$

dagegen keine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, in deren Gliedern niedrigster Stufe z wirklich vorkommt, oder sie ist *drittens* endlich und enthält ausser den Functionen (D) nur noch die folgenden Functionen dritter und vierter Stufe:

$$
\text{(E)} \qquad \left\{
\begin{array}{c}
x_\nu\Big(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu\Big) + \cdots, \quad y_\nu\Big(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu\Big) + \cdots \\
(\nu = 1 \ldots n) \\
\Big(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^\mu x_\mu y_\mu\Big)^2 + \cdots
\end{array}
\right.
$$

§ 5.

Wir kennen nunmehr in jedem der beiden auf S. 127 unterschiedenen Fälle die Anfangsglieder für die Reihenentwickelungen der auftretenden charakteristischen Functionen dritter und höherer Stufe. Es bleibt uns daher nur noch übrig, die betreffenden Gruppen zu bestimmen und auf einfache Normalformen zurückzuführen.

Wir beginnen mit der Bestimmung aller Gruppen, deren charakteristische Functionen nullter, erster und zweiter Stufe die Form:

$$1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad x_\nu + \cdots$$
$$x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots$$

haben, und die überhaupt stets eine charakteristische Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} + \cdots$$

enthält, welche positiven ganzen Zahlen mit Einschluss der Null auch $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$ sein mögen, während niemals eine charakteristische Function auftritt, deren Glieder niedrigster Stufe z wirklich enthalten. Wir suchen zunächst über die Form der Definitionsgleichungen dieser Gruppen einigen Aufschluss zu gewinnen.

Diese Definitionsgleichungen behandeln wir ähnlich wie auf S. 113. Wir fassen jede Differentiation nach einer der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ als eine Differentiation erster Stufe auf, jede Differentiation nach z dagegen als eine Differentiation zweiter Stufe, so dass also

$$\frac{\partial^{\mu_1 + \cdots + \mu_n + \nu_1 + \cdots + \nu_n + \varrho} V}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n} \partial y_1^{\nu_1} \ldots \partial y_n^{\nu_n} \partial z^\varrho}$$

als ein Differentialquotient von der Stufe: $\Sigma(\mu_i + \nu_i) + 2\varrho$ gerechnet wird.

Die Definitionsgleichungen einer Berührungstransformationsgruppe werden nun die allgemeinste charakteristische Function W dieser Gruppe definiren und zwar werden sie linear und homogen sein in W und den Differentialquotienten von W. Eine Gleichung nullter Stufe kann es unter ihnen nicht geben, wir können sie uns daher immer auf eine solche Form gebracht denken, dass wir für $k = 1, 2 \ldots$ jedesmal gerade m_k Differentialgleichungen k^{ter} Stufe haben, die nach m_k Differentialquotienten k^{ter} Stufe von W aufgelöst sind. Dabei wird

und genügt daher erstens der Homogeneitätsbedingung:

$$\text{(G')} \qquad \sum_1^{n+1} {}_i\, p_i' \frac{\partial H}{\partial p_i'} = H$$

und ausserdem noch einer Differentialgleichung, die der Gleichung (F) entspricht und die infolgedessen die Form:

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}'} = \varphi H + \sum_1^n {}_\nu \left(\chi_\nu \frac{\partial H}{\partial x_n'} - p_{n+1}' \psi_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu'} \right)$$

besitzt. Wir können daher auch sagen, dass die allgemeinste charakteristische Function H unserer Gruppe durch eine gewisse lineare homogene partielle Differentialgleichung von der Form:

$$\text{(H)} \qquad \sum_1^{n+1} {}_i \left(\Phi_i(x', p') \frac{\partial H}{\partial x_i'} + p_i' \Psi_i(x', p') \frac{\partial H}{\partial p_i'} \right) = 0$$

zusammen mit der Homogeneitätsbedingung (G') definirt wird; die Φ_i und Ψ_i können hier immer so angenommen werden, dass sie in $p_1' \dots p_{n+1}'$ homogen von nullter Ordnung sind.

Sind jetzt $H_1 \dots H_{2n+1}$ irgend $2n+1$ charakteristische Functionen unserer Gruppe, die als Functionen der x', p' von einander unabhängig sind[1]), so lässt sich die allgemeinste charakteristische Function von G in der Form:

$$H = H_{2n+1} \cdot \Omega \left(\frac{H_1}{H_{2n+1}}, \dots, \frac{H_{2n}}{H_{2n+1}} \right)$$

darstellen, wo Ω eine willkürliche Function seiner Argumente ist. Da überdies jedes $(H_i H_k)$ wieder eine charakteristische Function von G ist und sich also durch $H_1 \dots H_{2n+1}$ allein ausdrücken lässt, so ist klar, dass $H_1 \dots H_{2n+1}$ eine $(2n+1)$-gliedrige homogene Functionengruppe bestimmen, deren homogene Functionen erster Ordnung eben die charakteristischen Functionen der Transformationsgruppe G sind.

Die eben besprochene homogene Functionengruppe lässt sich nun entweder auf die kanonische Form:

$$X_1 \dots X_n, \quad X_{n+1}, \quad P_1 \dots P_n$$

1) Dass es immer $2n+1$ solche charakteristische Functionen der Gruppe giebt, ist klar, denn aus $2n+1$ unabhängigen Lösungen von (F) kann man wegen der Beschaffenheit der Φ_i und Ψ_i immer $2n+1$ solche unabhängige Lösungen von (H) ableiten, die der Gleichung (G') genügen un[d] charakteristische Functionen unserer Gruppe G.

oder auf die kanonische Form:

$$X_1 \dots X_n, \quad P_1 \dots P_n, \quad P_{n+1}$$

bringen. Der erste Fall ist jedoch hier ausgeschlossen. Träte er nämlich ein, so bestände für jede charakteristische Function H von G eine Gleichung:

$$(H X_{n+1}) = 0,$$

in den homogenen Veränderlichen x', p' geschrieben liesse daher G die homogene Function nullter Ordnung:

$$X_{n+1}\left(x_1' \dots x_n', \frac{p_1'}{p_{n+1}'}, \dots, \frac{p_n'}{p_{n+1}'}\right)$$

invariant. Hieraus aber würde folgen, dass G geschrieben in den nicht homogenen Veränderlichen z, x_ν, y_ν die Function:

$$X_{n+1}(x_1 \dots x_n, \quad z, \quad -y_1, \quad \dots, \quad -y_n)$$

invariant liesse, dass es also als Gruppe von Punkttransformationen des R_{2n+1}: z, x_ν, y_ν intransitiv wäre, was doch durch das Auftreten der charakteristischen Functionen:

$$1 + \cdots, \quad x_\nu + \cdots, \quad y_\nu + \cdots$$

ausgeschlossen ist.

Demnach kommt nur die zweite kanonische Form unserer Functionengruppe in Betracht und da wir diese kanonische Form stets durch eine homogene Berührungstransformation in den x', p' auf die Form:

$$x_1' \dots x_n', \quad p_1' \dots p_n', \quad p_{n+1}'$$

bringen können, so sehen wir, dass die allgemeinste charakteristische Function von G durch eine homogene Berührungstransformation in den x', p' die Gestalt

$$H = p_{n+1}' \, \Omega\left(x_1' \dots x_n', \; -\frac{p_1'}{p_{n+1}'}, \dots, -\frac{p_n'}{p_{n+1}'}\right)$$

erhalten kann, wo Ω eine willkürliche Function seiner Argumente ist.

Bevor wir zu den nicht homogenen Veränderlichen zurückkehren, wollen wir uns zum Ueberfluss noch unmittelbar davon überzeugen, dass die gefundene Gruppe wirklich irreducibel ist.

Wäre sie reducibel, so müsste es $n + 1$ von einander unab[illegible] homogene Functionen nullter Ordnung:

$$[illegible]_{+1}, \frac{p_1'}{p_{n+1}'}, \dots, \frac{p_n'}{p_{n+1}'}\Big) \quad (i = 1 \dots n + 1)$$

geben, die paarweise in Involution lägen und überdies so beschaffen wären, dass jedes (HN_i) sich durch $N_1 \dots N_{n+1}$ allein ausdrücken liesse. Dann aber wäre:

$$(p'_\mu,\ N_i) = \frac{\partial N_i}{\partial x'_\mu} = \omega_{\mu i}(N_1 \dots N_{n+1})$$

$$(p'_{n+1},\ N_i) = \frac{\partial N_i}{\partial x'_{n+1}} = \omega_i(N_1 \dots N_{n+1})$$

$$\left(\frac{p'^2_\mu}{p'_{n+1}},\ N_i\right) = \frac{2p'_\mu}{p'_{n+1}}\frac{\partial N_i}{\partial x'_\mu} - \left(\frac{p'_\mu}{p'_{n+1}}\right)^2 \frac{\partial N_i}{\partial x'_{n+1}} = \Omega_{\mu i}(N_1 \dots N_{n+1})$$

$$(\mu = 1 \dots n;\ i = 1 \dots n+1).$$

Da nun $N_1 \dots N_{n+1}$ offenbar nicht alle von $x'_1 \dots x'_{n+1}$ frei sein könnten, so liesse sich mindestens eine der n Grössen: $\frac{p'_\mu}{p'_{n+1}}$ durch $N_1 \dots N_{n+1}$ allein ausdrücken, wir könnten also etwa: $N_1 = \frac{p'_i}{p'_{n+1}}$ setzen. Nunmehr müsste sich jedes:

$$(x'_i x'_\nu p'_{n+1},\ N_1) = -x'_\nu - \varepsilon_{i\nu} x'_i \qquad (\nu = 1 \dots n)$$

durch $N_1 \dots N_{n+1}$ allein ausdrücken lassen, wir könnten also $N_2 \dots N_{n+1}$ der Reihe nach gleich $x'_1, \dots x'_n$ setzen. Damit würden wir aber auf einen Widerspruch stossen, denn die $n+1$ von einander unabhängigen Functionen:

$$\frac{p'_i}{p'_{n+1}},\ x'_1,\ x'_2,\ \dots,\ x'_n$$

liegen augenscheinlich nicht paarweise in Involution.

Die gefundene Gruppe ist also wirklich irreducibel.

Kehren wir nunmehr zu den nichthomogenen Veränderlichen z, x_ν, y_ν zurück, so erkennen wir sofort, dass die allgemeinste charakteristische Function unserer Gruppe bei der oben erwähnten Berührungstransformation die Form:

$$\Omega(x_1 \dots x_n,\ y_1 \dots y_n)$$

erhält, unter Ω eine willkürliche Function verstanden. Wir haben daher den

Satz. Enthält eine unendliche Gruppe von Berührungstransformationen des Raumes z, $x_1 \dots x_n$ in der Umgebung des Werthsystems von allgemeiner Lage: $z = x_\nu = y_\nu = 0$ die folgenden charakteristischen Functionen nullter, erster und zweiter Stufe:

$$1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad y_\mu + \cdots$$
$$x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots$$
$$(\mu, \nu = 1 \dots n),$$

dagegen keine charakteristische Function zweiter Stufe von der Form:

$$z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^i x_i y_i + \cdots,$$

so ist sie irreducibel und kann durch eine Berührungstransformation des Raumes z, $x_1 \dots x_n$ auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre allgemeinste charakteristische Function die Gestalt:

$$\Omega(x_1 \dots x_n, \; y_1 \dots y_n)$$

besitzt, unter Ω eine willkürliche Function seiner Argumente verstanden.

Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation der $\Omega(x, y)$ hat augenscheinlich die Form:

$$Xf = \sum_1^n {}^i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) - \Omega \frac{\partial f}{\partial z}$$

und transformirt also die Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $z_1 \dots y_n$ für sich. Demnach sind die in dem vorstehenden Satze besprochenen Gruppen als Gruppen von Punkttransformationen des R_{2n+1}: z, x_ν, y_ν sämmtlich imprimitiv. Ja sie sind sogar alle systatisch, denn jede infinitesimale Transformation von der Form Xf ist mit der infinitesimalen Transformation $\frac{\partial f}{\partial z}$ vertauschbar.

§ 6.

Die unendlichen Berührungstransformationsgruppen, deren charakteristische Functionen nullter, erster und zweiter Stufe die Form:

$$1 + \cdots, \quad x_\mu + \cdots, \quad y_\mu + \cdots$$
$$z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^i x_i y_i + \cdots$$
$$x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots$$
$$= 1 \dots n)$$

besitzen, zerfallen in zwei Klassen. Eine Gruppe G dieser Art enthält nämlich entweder eine charakteristische Function dritter oder höherer Stufe, in deren Gliedern niedrigster Stufe z wirklich vorkommt, oder sie enthält keine derartige charakteristische Function.

Im ersten Falle enthält G nach § 5 stets eine charakteristische Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \; y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} \; z^\varrho + \cdots,$$

welche positiven ganzen Zahlen, mit Einschluss der Null, auch $\mu_1 \dots \mu_n$, $\nu_1 \dots \nu_n$, ϱ sein mögen. Demnach ist klar, dass unter den Definitionsgleichungen von G niemals eine von s^{ter} Stufe vorkommen kann, welche der Zahlen: 0, 1, 2 ... man auch für s setzen mag. Die Definitionsgleichungen von G können daher nur die Form: $0 = 0$ haben, das heisst, G ist die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen des Raumes z, $x_1 \dots x_n$.

Im zweiten Falle enthält G nach § 5 ausser den oben genannten charakteristischen Functionen noch die folgenden:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} \; y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} + \cdots,$$

wo $\mu_1 \dots \mu_n$, $\nu_1 \dots \nu_n$ beliebige positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null bedeuten und wo $\Sigma(\mu_i + \nu_i) \gtreqless 2$ ist. Dagegen enthält G sonst keine charakteristischen Functionen weiter.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$N = 1 + \cdots, \quad X_\mu = x_\mu + \cdots, \quad Y_\mu = y_\mu + \cdots$$

$$Z = z - \frac{1}{2} \sum_1^n {}^i x_i y_i + \cdots$$

$$X_\mu X_\nu = x_\mu x_\nu + \cdots, \quad X_\mu Y_\nu = x_\mu y_\nu + \cdots, \quad Y_\mu Y_\nu = y_\mu y_\nu + \cdots$$

$$(\mu, \nu = 1 \dots n),$$

wo wiederum $X_\mu X_\nu$, $X_\mu Y_\nu$, $Y_\mu Y_\nu$ nicht als Producte, sondern nur als Symbole anzusehen sind. Ferner wollen wir unter U_i, V_i, W_i, ... stets eine solche charakteristische Function unserer Gruppe verstehen, deren Reihenentwickelung mindestens mit Gliedern i^{ter} Stufe beginnt. Endlich wollen wir unter $\overline{U}_i$, $\overline{V}_i$, $\overline{W}_i$, ... solche charakteristische Functionen verstehen, deren Glieder nullter, erster und zweiter Stufe sich schon aus den Gliedern nullter, erster und zweiter Stufe von N, X_μ, Y_μ, $X_\mu X_\nu$, $X_\mu Y_\nu$, $Y_\mu Y_\nu$ linear ableiten lassen, also mit andern Worten charakteristische Functionen von der Form:

$$aN + \sum_1^n {}^{\mu} (a_\mu X_\mu + b_\mu Y_\mu) +$$
$$+ \sum_{\mu\nu}^{1\dots n} (a_{\mu\nu} X_\mu X_\nu + b_{\mu\nu} X_\mu Y_\nu + c_{\mu\nu} Y_\mu Y_\nu) + U_3 \,.$$

Wir werden jetzt zeigen, dass sich die charakteristischen Functionen unserer Gruppe stets so wählen lassen, dass für je zwei beliebige unter ihnen, etwa für U_i und V_i, stets eine Relation von der Form:

$$\{U_i V_k\} = \overline{W}_{i+k-2}$$

besteht, dass man also durch Combination von je zwei charakteristischen Functionen der Gruppe stets eine charakteristische Function der Gruppe erhält, die sich schon aus allen den charakteristischen Functionen der Gruppe linear ableiten lassen, die übrig bleiben, wenn man Z ausschliesst.

Es bestehen Relationen von der Form:

$$\{X_\mu Z\} = -\frac{1}{2} X_\mu + \alpha_\mu Z + \overline{U}_2^{(\mu)}$$
$$\{Y_\mu Z\} = -\frac{1}{2} Y_\mu + \beta_\mu Z + \overline{V}_2^{(\mu)} \,.$$

Führen wir daher $X_\mu - 2\alpha_\mu Z$ als neues X_μ ein und $Y_\mu - 2\beta_\mu Z$ als neues Y_μ, so erhalten $\{X_\mu Z\}$ und $\{Y_\mu Z\}$ die verlangte Form. Ferner ist:

$$\{Y_1 X_1\} = N + \lambda 2 + \overline{U}_1 \,.$$

Hier führen wir einfach die rechte Seite als neues N ein und erhalten die einfache Relation:

$$\text{(L)} \qquad \{Y_1 X_1\} = N.$$

Damit sind, wie sich zeigen lässt, die charakteristischen Functionen unserer Gruppe schon in der verlangten Weise gewählt.

In der That, es ist zunächst immer dann

$$\{U_i V_k\} = \overline{W}_{i+k-2} \,,$$

wenn $i + k > 3$, denn für $i + k > 4$ ist schon $i + k - 2 > 2$ und für $i + k = 4$ überzeugt man sich sofort, dass die Reihenentwickelung von $\{U_i V_k\}$, die im allgemeinen mit Gliedern zweiter Stufe beginnt, unter ihren Gliedern zweiter Stufe niemals z enthält. Wir brauchen daher nur noch den Fall $i + k \lesseqgtr 3$ zu behandeln.

Zunächst ist:

$$\{Y_\mu U_2\} = V_1 + \varrho Z \,.$$

Bilden wir daher die Identität

$$\{\{Y_\mu Z\} U_2\} + \{\{Z U_2\} Y_\mu\} + \{\{U_2 Y_\mu\} Z\} = 0$$

und berücksichtigen wir, dass

$$\{Y_\mu Z\} = -\frac{1}{2} Y_\mu + \overline{V}_2$$

$$\{Z U_2\} = W_3, \quad \{Y_\mu W_3\} = \overline{W}_2$$

ist, so finden wir, dass $\varrho = 0$ ist. Es wird also:

$$\{Y_\mu U_2\} = \overline{V}_1$$

und natürlich ebenso:

$$\{X_\mu U_2\} = \overline{W}_1 .$$

Wir bilden ferner die Identität:

$$\{\{Y_1 X_1\} Z\} + \{\{X_1 Z\} Y_1\} + \{\{Z Y_1\} X_1\} = 0 ,$$

die offenbar folgende Form annimmt:

$$\{NZ\} - \left\{\frac{1}{2} X_1 + \overline{U}_2,\ Y_1\right\} + \left\{\frac{1}{2} Y_1 + \overline{V}_2,\ X_1\right\} = 0 ,$$

und erkennen daraus, dass

$$\{NZ\} = -N + \overline{U}_1$$

ist. Ebenso geht aus der Identität:

$$\{\{Y_1 X_1\} U_3\} + \{\{X_1 U_3\} Y_1\} + \{\{U_3 Y_1\} X_1\} = 0$$

hervor, dass

$$\{N U_3\} = \overline{V}_2$$

ist, denn erstens beginnt die Reihenentwickelung von $\{N U_3\}$ mit Gliedern zweiter Stufe, zweitens aber ist nach dem Früheren:

$$\{X_1 U_3\} = \overline{U}_2, \quad \{\overline{U}_2,\ Y_1\} = \overline{V}_1$$

und so weiter.

Weiter bilden wir die Identität:

$$\{\{NZ\} U_2\} + \{\{Z U_2\} N\} + \{\{U_2 N\} Z\} = 0 ,$$

und da

$$\{N U_2\} = \overline{U}_0 + \sigma Z$$

ist, während Relationen von der Form:

$$\{Z U_2\} = V_3, \quad \{Z \overline{U}_0\} = V_0$$

bestehen, so muss $\sigma = 0$ sein.

Es ist:

$$\{Y_\mu X_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu} N + \tau Z + \bar{U}_1 ,$$

die Identität:

$$\{\{Y_\mu X_\nu\} Z\} + \{\{X_\nu Z\} Y_\mu\} + \{\{Z Y_\mu\} X_\nu\} = 0$$

ergiebt aber:

$$\{\{Y_\mu X_\nu\} Z\} + \{-\tfrac{1}{2} X_\nu + \bar{U}_2,\ Y_\mu\} + \{\tfrac{1}{2} Y_\mu + \bar{V}_2,\ X_\nu\} = 0,$$

also ist $\sigma = 0$ und:

$$\{Y_\mu X_\nu\} = \epsilon_{\mu\nu} N + \bar{U}_1 .$$

Ebenso zeigen die Identitäten zwischen X_μ, X_ν, Z und zwischen Y_μ, Y_ν, Z, dass

$$\{X_\mu X_\nu\} = \bar{V}_1 , \quad \{Y_\mu Y_\nu\} = \bar{W}_1 .$$

Endlich bilden wir noch die Identität:

$$\{\{N Y_\mu\} Z\} + \{\{Y_\mu Z\} N\} + \{\{Z N\} Y_\mu\} = 0,$$

oder:

$$\{\{N Y_\mu\} Z\} + \{-\tfrac{1}{2} Y_\mu + \bar{U}_2,\ N\} + \{N + \bar{U}_1,\ Y_\mu\} = 0$$

und erkennen aus ihr, dass

$$\{N Y_\mu\} = \bar{U}_0$$

ist. Ebenso ergiebt sich natürlich auch:

$$\{N X_\mu\} = \bar{V}_0 .$$

Damit ist also unsere Behauptung bewiesen.

Die charakteristischen Functionen unserer Gruppe sind demnach jetzt so gewählt, dass je zwei unter ihnen, etwa U_i und V_k bei der Combination eine charakteristische Function von der Form: $\bar{W}_{i+k-2}$ liefern, und zwar besitzt hier W_{i+k-2} die Form:

$$x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} + \cdots ,$$

wo $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$ gewisse positive ganze Zahlen mit Einschluss der Null sind; man kann sogar, indem man zwei geeignete charakteristische Functionen U_i und V_k aussucht, immer erreichen, dass $\mu_1 \ldots \mu_n$, $\nu_1 \ldots \nu_n$ ganz beliebige positive ganze Zahlen werden.

Hieraus folgt, dass die erste derivirte Gruppe unserer Gruppe G

bei beliebiger Wahl von $\mu_1 \dots \mu_n, \nu_1 \dots \nu_n$ stets eine charakteristisch Function von der Form:

$$x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n} y_1^{\nu_1} \dots y_n^{\nu_n} + \cdots$$

enthält, dass sie dagegen keine charakteristische Function enthält, in deren Gliedern niedrigster Stufe z wirklich vorkommt. Diese erste derivirte Gruppe gehört somit zu den in § 6 bestimmten Gruppen und kann durch eine Berührungstransformation des Raumes $z, x_1 \dots x_n$ auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre allgemeinste charakteristische Function die Gestalt:

$$\Omega(x_1 \dots x_n, \; y_1 \dots y_n)$$

erhält, unter Ω eine willkürliche Function verstanden.

Die Gruppe G selbst wird alle charakteristischen Functionen von der Form $\Omega(x, y)$ enthalten, ausserdem aber noch eine charakteristische Function U, die so beschaffen ist, dass für jedes Ω eine Relation von der Form:

$$\{\Omega X\} = \Psi(x_1 \dots x_n, \; y_1 \dots y_n)$$

besteht. Um diese Function X zu bestimmen, setzen wir der Reihe nach $\Omega = 1, x_\mu, y_\mu$, dann muss werden:

$$\{1, U\} = -\frac{\partial U}{\partial z} = \varphi(x, y)$$

$$\{y_\mu, U\} = \frac{\partial U}{\partial x_\mu} - y_\mu \frac{\partial U}{\partial z} = \varphi_\mu(x, y)$$

$$\{x_\mu, U\} = -\frac{\partial U}{\partial y_\mu} - x_\mu \frac{\partial U}{\partial z} = \psi_\mu(x, y),$$

Gleichungen, die offenbar nur bestehen können, wenn U die Form:

$$U = az + \chi(x_1 \dots x_n, \; y_1 \dots y_n)$$

besitzt. Betrachten wir daher a als eine willkürliche Constante und χ als eine willkürliche Function seiner Argumente, so stellt dieser Ausdruck die allgemeinste charakteristische Function von G dar.

Dass G irreducibel ist, versteht sich von selbst, denn G enthält ja eine irreducible unendliche Untergruppe, nämlich die, die im vorigen Paragraphen gefunden worden ist.

Demnach können wir jetzt den Satz aussprechen:

Satz. Enthält eine unendliche continuirliche Berührungstransformationsgruppe des R_{n+1}: $z, x_1 \dots x_n$ die

folgenden charakteristischen Functionen nullter, erster und zweiter Stufe:

$$1 + \cdots, \quad x_\nu + \cdots, \quad y_\nu + \cdots$$

$$z - \frac{1}{2}\sum_1^n{}^i x_i y_i + \cdots$$

$$x_\mu x_\nu + \cdots, \quad x_\mu y_\nu + \cdots, \quad y_\mu y_\nu + \cdots$$

$$(\mu, \nu = 1 \ldots n),$$

so ist sie irreducibel und zwar ist sie entweder die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen dieses Raumes, oder sie kann durch eine Berührungstransformation dieses Raumes auf eine solche Form gebracht werden, dass ihre allgemeinste charakteristische Function die Gestalt:

$$a\left(z - \frac{1}{2}\sum_1^n{}^i x_i y_i\right) + \Omega(x_1 \ldots x_n, \; y_1 \ldots y_n)$$

erhält, unter a eine willkürliche Constante und unter Ω eine willkürliche Function verstanden.

Als Gruppe von Punkttransformationen des R_{2n+1}: z, x_ν, y_ν ist die erste dieser beiden Gruppen natürlich primitiv, die zweite dagegen ist imprimitiv, denn sie transformirt ebenso wie die Gruppe $\Omega(x, y)$ die Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ unter sich.

§ 7.

Wir fassen nunmehr die gewonnenen Ergebnisse noch einmal alle zusammen, nehmen aber gleich den entsprechenden Satz über endliche continuirliche Berührungstransformationsgruppen hinzu (Trfsgr. II, Cap. 25) und erhalten so das

Theorem. *Ist eine continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen des* R_{n+1}: $z, x_1 \ldots x_n$ *als Gruppe von Punkttransformationen des* R_{2n+1}: $z, x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n$ *so beschaffen, dass jedesmal, wenn in diesem* R_{2n+1} *ein Punkt:* z^0, x_ν^0, y_ν^0 *von allgemeiner Lage festgehalten wird, die* ∞^{2n-1} *Linienelemente durch diesen Punkt, die der Pfaff'schen Gleichung:*

$$dz - \sum_1^n{}^\nu y_\nu \, dx_\nu = 0$$

genügen, in möglichst allgemeiner Weise transformirt werden, so sind nur sechs Fälle möglich. Die Gruppe ist nämlich entweder die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen des R_{n+1}: $z, x_1 \dots x_n$ oder sie ist durch eine Berührungstransformation dieses Raumes ähnlich mit einer der beiden unendlichen Gruppen:

$$az + \Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n)$$

und:

$$\Omega(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n),$$

unter a eine willkürliche Constante und unter Ω eine willkürliche Function verstanden, oder sie ist durch eine Berührungstransformation des R_{n+1} ähnlich mit einer der drei endlichen Gruppen:

$$1, \ x_\mu, \ y_\mu, \ x_\mu x_\nu, \ x_\mu y_\nu, \ y_\mu y_\nu \qquad (\mu, \nu = 1 \dots n)$$

und:

$$1, \ x_\mu, \ y_\mu, \ z, \ x_\mu x_\nu, \ x_\mu y_\nu, \ y_\mu y_\nu \qquad (\mu, \nu = 1 \dots n)$$

und:

$$1, \ x_\mu, \ y_\mu, \ z, \ x_\mu x_\nu, \ x_\mu y_\nu, \ y_\mu y_\nu$$

$$x_\mu\left(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^i \, x_i y_i\right), \quad y_\mu\left(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^i \, x_i y_i\right)$$

$$\left(z - \frac{1}{2}\sum_1^n {}^i \, x_i y_i\right)^2$$

$$(\mu, \nu = 1 \dots n).$$

Von diesen sechs Gruppen sind als Gruppen von Punkttransformationen des R_{2n+1}: z, x_ν, y_ν nur zwei primitiv, nämlich die erste und die sechste, die übrigen sind imprimitiv, die dritte und die vierte sind sogar systatisch.

Die Resultate dieser Arbeit fand ich in den Jahren 1883—1886. Die definitive Redaction der Seiten 81—150 wurde von Herrn Prof. Engel unter Zugrundelegung meines alten Manuscripts im Laufe des Winters 1893—1894 ausgearbeitet.

DER

GANG DES MENSCHEN.

I. THEIL:

VERSUCHE AM UNBELASTETEN UND BELASTETEN MENSCHEN

ANGESTELLT

VON

WILHELM BRAUNE †

WEILAND ORDENTLICHEM MITGLIEDE

UND

OTTO FISCHER

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIEDE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit bildet ein weiteres Glied in der Reihe von Untersuchungen, welche ich die Ehre hatte, gemeinsam mit meinem unvergesslichen Lehrer, Herrn Geheimen Medicinalrath Professor Dr. WILHELM BRAUNE anzustellen.

Von dem Gesichtspunkte ausgehend, dass nach den Untersuchungen der Brüder WEBER ein weiterer Fortschritt in der Mechanik des Gehens nur auf empirischem Wege erzielt werden kann, hatten wir uns schon früher durch eine Anzahl von Versuchen Kenntniss von einigen, noch nicht genügend festgestellten, mechanischen Eigenschaften des menschlichen Körpers, als des Objectes der Bewegung, verschafft. So hatten wir an der Leiche die Dimensionen und die Gewichte der einzelnen Körpertheile gemessen, wir hatten die Lage des Schwerpunktes und die Grösse der Trägheitsmomente für die verschiedenen Abschnitte des menschlichen Körpers bestimmt, und wir hatten mit einer Arbeit über das Kniegelenk zu untersuchen angefangen, in welcher Weise am lebenden Menschen die Bewegungen benachbarter Gliederabschnitte durch die Gelenke in gegenseitige Abhängigkeit gebracht werden.

Im Anschluss an diese Arbeiten unternahmen wir es, den Bewegungsvorgang beim Gehen mit allen uns zu Gebote stehenden Mitteln auf photographischem Wege so genau wie möglich festzustellen. Wir gingen an diese letzte Untersuchung erst heran, nachdem wir uns überzeugt hatten, dass die bisherigen Registrirungen der Gehbewegungen, so sehr dieselben auch unsere Kenntniss des menschlichen Ganges erweitert haben, doch nicht vollkommen ausreichen, um das Bewegungsgesetz in allen Einzelheiten mit voller Schärfe erkennen zu lassen.

Nur nach zahlreichen mühevollen, zum Theil vergeblichen Vor-versuchen, bei denen sich Herr Professor BRAUNE wie immer, es eine neue Untersuchungsmethode auszubilden galt, unern

zeigte, glaubten wir eine Anordnung für die Versuche gefunden zu haben, welche genügende Genauigkeit der Resultate erwarten liess. Die Versuche selbst waren sehr zeitraubend und anstrengend. Es machte sich oft eine 10- bis 12stündige ununterbrochene Thätigkeit erforderlich, da der Bekleidung des Versuchsindividuums die äusserste Sorgfalt gewidmet werden musste, sowohl was das genaue Einstellen und Befestigen der verwendeten Geissler'schen Röhren, als was das Isoliren des Stromkreises anlangte. Auch konnten wir aus Mangel an einer Vorrichtung, den Saal zu verdunkeln, die entscheidenden Versuche nur des Nachts anstellen.

Es ist allein der grossen Energie zu verdanken, mit welcher Herr Professor Braune an dem einmal ins Auge gefassten Ziele festhielt, dass schliesslich jedes Hinderniss, welches sich der Arbeit in den Weg stellte, beseitigt worden ist, und dass die Versuche allen störenden Zwischenfällen zum Trotz überhaupt zu Ende geführt werden konnten.

Die aus den Versuchen gewonnenen Daten reichten vollkommen aus, um den Bewegungsvorgang auf ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem beziehen zu können. Die hierzu nöthigen Rechnungen waren sehr umfangreich; sie stellten eine Arbeit dar, welche sich nur in einigen Monaten bei unausgesetzter Thätigkeit bewältigen liess. Durch die Munificenz des Hohen Ministeriums, welches uns schon früher ausserordentliche Mittel zur Einrichtung der Versuche gewährt hatte, waren wir in den Stand gesetzt, die Berechnungen nach den von uns aufgestellten Formeln ausführen zu lassen.

Es ist mir eine ehrenvolle Pflicht, dem Hohen Ministerium für die vielseitige Förderung unserer Bestrebungen ehrfurchtsvollen Dank auszusprechen.

Leider war es Herrn Professor Braune nicht vergönnt, die Resultate der Untersuchung, welcher er sein ganzes Interesse zugewendet hatte, zu erleben und die Früchte seiner Saat zu ernten. Noch bevor die Messung der Coordinaten auf allen photographischen Platten beendet worden war, raffte ihn der Tod mitten aus der Arbeit hinweg. Es fiel mir daher die Aufgabe zu, die Untersuchung allein weiter zu führen.

Ich bin bestrebt gewesen, dies im Braune'schen Sinne zu thun.

Leipzig, im October 1894.

Otto Fischer.

Einleitung.

Die klassischen Untersuchungen der Brüder WEBER über die Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge[1]) haben den Beweis erbracht, dass Bewegungen des Menschen, insbesondere die, welche er beim Gehen und Laufen ausführt, einer exact mechanischen Behandlung zugänglich sind. Diese Thatsache beruht auf der Möglichkeit, sich durch directe Messungen eine genaue Kenntniss der in Frage stehenden Bewegung zu verschaffen. Die empirisch gewonnenen Resultate bilden dann die Grundlage für die weitere Untersuchung. Man hat es dabei in letzter Linie mit dem mechanischen Probleme zu thun: Aus den Bewegungen, welche die einzelnen Theile des menschlichen Körpers ausführen, auf die Kräfte zu schliessen, welche erforderlich sind, um diese Bewegungen hervorzubringen.

Diese Aufgabe lässt sich im Princip immer lösen, wenn man ausser dem Bewegungsvorgang die Grösse der Masse, die Lage des Schwerpunktes und die Grössen der Trägheitsmomente für jeden Körperabschnitt kennt, und wenn man weiss, welchen Bedingungen die Bewegungen der einzelnen Körpertheile durch die Gelenkverbindungen und durch von aussen herrührende Einwirkungen, wie z. B. die Reibung am Boden, unterworfen sind.

Der exacten Lösung des umgekehrten Problems, aus der Kenntniss der Kräfte die Bewegungen abzuleiten, stellen sich dagegen sehr oft unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen.

---

1) Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung von den Brüdern WILHELM WEBER und EDUARD WEBER, Göttingen 1836, und neu herausgegeben in WILHELM WEBER's gesammelten Werken Band VI.

Die Schlüsse, welche man aus den Bewegungen auf die Kräfte zieht, werden naturgemäss um so sicherer sein, je eingehender die Kenntniss ist, welche man von dem Bewegungsvorgang erlangt hat. Daher kommt es vor allen Dingen darauf an, die Bewegung ihrem Umfang und ihrer Art nach so genau als irgend möglich festzustellen. Wie alle Naturerscheinungen in Folge der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Messinstrumente niemals vollständig erforscht werden können, so ist zwar auch unserer Erkenntniss der Bewegungsvorgänge beim Gehen und Laufen und der dabei thätigen Kräfte immer eine Grenze gesteckt. Diese Grenze rückt aber um so weiter hinaus, je grösser die Genauigkeit ist, welche man bei den Messungen erzielen kann.

Die Brüder Weber haben nun durch zahlreiche Messungen über die Neigung und die verticalen Schwankungen des Rumpfes, über die Beinlänge bei verschiedener Streckung, über die Schwingungsdauer des frei pendelnden Beines mit und ohne Bekleidung, über die Geschwindigkeit beim schnellsten Gehen, über das Verhältniss zwischen Schrittdauer und Schrittlänge und über andere für die Fortbewegung des Menschen in Betracht kommende Grössen und Beziehungen ein Beobachtungsmaterial zusammengetragen, welches nicht nur für sie die Grundlage einer Theorie des Gehens und Laufens abgeben konnte, sondern welches auch heute noch wenigstens durch keine in gleichem Sinne angestellte Messungen überholt worden und dadurch überflüssig gemacht ist. Sie hatten eben erreicht, was sich mit den Hülfsmitteln, die ihnen damals zu Gebote standen, überhaupt erreichen liess. Daher besitzen die Schlüsse, welche die beiden Forscher aus ihren directen Messungen ziehen, einen hohen Grad von Sicherheit. So z. B. ist es wohl heute als eine unumstössliche Wahrheit anzusehen, dass der Rumpf beim Gehen eine etwas tiefere Stellung gegen den Boden annimmt als beim Stehen, und dass derselbe um so tiefer gestellt wird, je schneller wir gehen. Oder, um ein anderes Beispiel anzuführen, es ist durch die Messungen der Brüder Weber ausser Zweifel gestellt worden, dass der Zeitraum, in welchem beim Gehen beide Beine den Boden berühren, um so kürzer ist, je schneller wir gehen.

Die Brüder Weber sahen sich aber andererseits auch veranlasst, Schlüsse zu ziehen, welche sich nicht unmittelbar aus den Messungs-

resultaten ergaben, für welche sie aber mit ihren Hülfsmitteln ein genaueres Beobachtungsmaterial nicht beibringen konnten.

Es liegt in der Natur der Sache, dass diese Schlüsse viel weniger sicher sind. So hatten sie z. B. kein Mittel, den Verlauf der Bewegungen und Gestaltsänderungen eines Beines während der Dauer eines Doppelschrittes hinreichend genau auf empirischem Wege festzustellen. Messen konnten sie nur den Grad der abwechselnden Verkürzung und Verlängerung des Beines, die Erhebungen und Senkungen des Rumpfes, und die Länge der Schritte. Daraus construirten sie sich dann die Stellungen und Formänderungen des Beines. Analoges gilt für die Bewegungen der Arme. Auf diesem Wege lassen sich schon aus dem Grunde nur approximative Resultate erzielen, weil eine kleine Ungenauigkeit in den directen Messungen schon eine grosse Abweichung in der Stellung der einzelnen Abschnitte des Beines oder Armes hervorzurufen im Stande ist.

Es kann daher nicht ausbleiben, dass eine von Neuem mit besseren Hülfsmitteln angestellte Messungsreihe zum Theil die auf deductivem Wege gefundenen Resultate der Brüder WEBER corrigiren, zum Theil aber auch neue Erkenntnisse über die beim Gehen und Laufen stattfindenden Gliederbewegungen und über die dabei wirksamen äusseren und inneren Kräfte bringen wird. Dadurch kann aber nicht im Geringsten die Bedeutung der WEBER'schen Leistungen beeinträchtigt werden. Im Grunde werden ja doch alle weitergehenden Ergebnisse nur den Ausbau des Gebäudes darstellen, zu welchem die Brüder WEBER durch ihre classischen Untersuchungen das Fundament gelegt haben.

Die WEBER'sche Mechanik der Gehwerkzeuge hatte das Interesse für die Ortsbewegungen des Menschen hervorgerufen. Während vorher sich nur vereinzelt Anatomen, Mathematiker und Physiker wie GASSENDI, BORELLI, HALLER, BARTHEZ, MAGENDIE, GERDY und POISSON mit dem Gehen und Laufen, und zwar meist nur mit einer Seite dieser Bewegungsvorgänge, beschäftigt hatten, finden sich nach dem Erscheinen der WEBER'schen Untersuchungen in fast allen grösseren Werken anatomisch-physiologischen Inhalts Auseinandersetzungen über den Gehmechanismus vor. Die letzteren geben in vielen Fällen die WEBER'schen Resultate und die daraus abgeleiteten Folgerungen wieder.

Nur wenige bieten neue Gesichtspunkte und neue mit den Weber'schen Theorien in Widerspruch stehende Ideen dar. Noch weniger fördern neue, auf empirischem Wege gefundene Thatsachen über das Gehen und Laufen zu Tage. Wohl finden sich zuweilen Zweifel an der Richtigkeit so mancher Schlüsse und Ansichten der Brüder Weber vor. Empirische Ergebnisse, welche die Unrichtigkeit derselben unabweislich darlegen, ist man in den meisten Fällen nicht in der Lage vorzubringen.

So ist z. B. viel gegen die Weber'sche Ansicht geschrieben worden, dass beim Gehen dasjenige Bein, welches jeweils nicht mit dem Fussboden in Berührung ist, durch seine eigene Schwere getrieben, wie ein Pendel von hinten nach vorn schwingt. Es sind aber immer wieder nur Ansichten, die man vorfindet, keine Thatsachen, welche gebieterisch ein Abgehen von der Weber'schen Theorie fordern. In den meisten Fällen hebt man hervor, dass zwar die Hauptthätigkeit beim Schwingen des Beines der Schwere zufällt, fügt aber gleichzeitig hinzu, dass sich der Wirkung der Schwere die einiger Beinmuskeln hinzugesellt. Man fasst aber den Satz von der Pendelbewegung des Beines zu wörtlich auf, wenn man annimmt, dass die Brüder Weber jede dabei stattfindende active Contraction der Muskeln verneinen. Sagen sie doch ausdrücklich (§ 17): »Das Bein behält, während des Zeitabschnitts, wo es, am Rumpfe hängend, wie ein Pendel nach vorn schwingt, nicht vollkommen seine Gestalt. Es würde, wenn es in dem gestreckten Zustande bliebe, in welchem es sich im Augenblicke der Aufhebung vom Boden befindet, auf dem Fussboden aufstossen und nicht frei unter dem Rumpfe hinweg schwingen können: es wird daher im Knie gebogen und dadurch verkürzt.« — »Auf eine entgegengesetzte Weise verändern wir die Gestalt des schwingenden Beines, wenn der Zeitpunkt kommt, wo seine Schwingung endigen und dasselbe wieder auf den Boden gesetzt werden soll. Wir verlängern es dann, indem wir das Bein im Knie so lange strecken, bis es den Fussboden berührt«, und § 104: »wenn das Bein dagegen, während wir gehen, von hinten nach vorn schwingt, muss es verkürzt werden, um nicht auf dem Boden aufzustossen, um so mehr, da die Hüftgelenke beim Gehen dem Boden etwas näher liegen als beim Stehen.«

Man könnte nun vielleicht annehmen, dass die das Schwingen des Beines begleitende Beugung und Streckung im Kniegelenk gleich-

falls der alleinigen Wirkung der Schwere zuzuschreiben sei. Denn es ist von vornherein klar, dass ein gegliedertes Pendel, wie es das Bein darstellt, sich beim Schwingen nicht so verhalten wird wie ein starrer Körper. Es werden sich im Allgemeinen die beiden durch das Zwischengelenk verbundenen Theile gegen einander verdrehen. Man beachte beispielsweise die Art, wie eine grosse Glocke zum Läuten gebracht wird. Eine solche Glocke stellt im Grunde nichts anderes als ein gegliedertes Pendel oder, wie man es auch nennen könnte, ein Doppelpendel dar. Um die feste Schwingungsaxe ist das Glockengehäuse drehbar, und mit diesem ist wiederum der Klöppel durch ein Gelenk verbunden. Wenn nun die Glocke zum Läuten gebracht werden soll, so wird sie auf dieselbe Weise in Schwingung versetzt wie beispielsweise das Pendel einer Uhr. Sie wird aus ihrer Ruhelage herausgebracht und nun der Wirkung der Schwere überlassen. Würde sich das gegliederte System Glockengehäuse und Klöppel wie ein einziger starrer Körper verhalten, so würde selbst bei den extremsten Schwingungen desselben kein Ton zum Vorschein kommen können, denn der Klöppel würde dann immer seine relative Lage zum Gehäuse beibehalten. Dadurch, dass eine Gelenkbewegung in dem das Gehäuse und den Klöppel verbindenden Gelenke mit dem Schwingen der ganzen Glocke Hand in Hand geht, wird es möglich, dass der Klöppel an das Gehäuse anschlägt.

In ganz ähnlicher Weise wird sich das Bein verhalten, wenn es bei festgestelltem Becken aus seiner Ruhelage herausgebracht und dann der alleinigen Wirkung der Schwere überlassen wird. Der Oberschenkel, welcher mit dem Glockengehäuse, und das System Unterschenkel + Fuss, welches mit dem Klöppel zu vergleichen ist, werden im Allgemeinen verschieden grosse Drehungen ausführen, so dass hieraus eine Beugung oder Streckung im Kniegelenk resultirt. Es wäre nun denkbar, dass diese Gelenkbewegung im Kniegelenk bei der Stellung des hinteren Beines, von welcher aus beim Gehen die Schwingung beginnt, genau in der Weise vor sich geht, wie wir sie beim Gange des Menschen vorfinden, dass also auch die von den Brüdern Weber beobachtete anfängliche Verkürzung und darauf folgende Verlängerung des ganzen Beines nicht der Wirkung von Muskeln, sondern ausschliesslich der der Schwere zuzuschreiben sei. Wenn das die Überzeugung der B[illegible] W[illegible] gewesen wäre, so

hätten sie es bei der ausführlichen Darlegung ihrer Ideen sicherlich ausdrücklich angeführt und wiederholt betont. Dies ist nirgends geschehen. Im Gegentheil reden sie davon, dass wir das Bein im Knie strecken. Sie stellen also willkürliche Contraction von Muskeln bei der Pendelschwingung des Beines nicht ausdrücklich in Abrede, wie von vielen Forschern angenommen wird. Sie lassen gewissermassen die Frage, ob Muskelwirkung zur Verkürzung und Verlängerung des schwingenden Beines nothwendig ist, noch offen, da sie nicht in der Lage sind, mit ihren Hülfsmitteln dieselbe zur endgültigen Entscheidung zu bringen. So lange sie sich nicht eine ganz genaue Kenntniss der successiven Gestaltsänderungen des Beines während des Schwingens verschaffen konnten, und so lange keine Versuche und keine Theorie über die Schwingungen eines Doppelpendels existirten, hatten sie gar keine genügenden Unterlagen für eine Discussion der Frage.

Nun könnte man allerdings einwenden, dass die empirischen Unterlagen auch nicht ausreichten, um die Weber'sche Annahme zur unumstösslichen Wahrheit zu machen, dass das Bein sich beim Schwingen, abgesehen von der Verkürzung und Verlängerung desselben, wie ein allein von der Schwere getriebenes Pendel verhält. Dieser Einwand ist auch berechtigt, und die Brüder Weber wären sicherlich die Ersten gewesen, die Berechtigung desselben anzuerkennen. Die Pendeltheorie tritt bei ihnen nur als eine Hypothese auf, welche alle von ihnen direct beobachteten Vorgänge beim Gehen vollständig erklärt. Sie fanden bei der Messung der Geschwindigkeit beim schnellsten Gehen (§ 101) stets denselben Werth, so oft sie auch den Versuch wiederholten, sie mochten ausgeruht haben oder ermüdet sein. Daraus schlossen sie, »dass, so lange die Muskeln nur noch überhaupt Kraft genug haben, um die Bewegung auszuführen, die Geschwindigkeit nicht von der Stärke der Muskeln, sondern von der Grösse der Beine und von der Kraft, die von aussen auf sie wirkt, abhängt«. »Aus zahlreichen Versuchen (§ 102), sowohl über die Dauer einer einfachen Schwingung des Beines, und über die Schrittdauer beim schnellsten Gehen, ging ferner hervor, dass das Verhältniss beider Zeiträume bei ihnen fast genau 2 : 1 war. Um sich zu überzeugen, dass die Einfachheit dieses Verhältnisses nicht etwas Individuelles sei, haben sie dieselben Versuche

bei vielen Menschen wiederholt«. »Aus dieser Übereinstimmung der Schrittdauer beim schnellsten Gehen mit der halben Dauer einer Pendelschwingung des Beines schlossen sie nun weiter (§ 104), dass die erstere durch die letztere bestimmt werde, indem nämlich das hinten vom Boden erhobene Bein, blos von seiner Schwere getrieben, nach vorn schwingt (§ 17)«. »Wenn nun auch das Bein vor Vollendung seiner Schwingung auf dem Boden aufgesetzt wird, so erleichtert doch die ausschliessliche Wirksamkeit der Schwere, durch die es dahin gebracht wurde, die genaue Wiederholung der Schritte in gleichem Tempo ausserordentlich. Denn ohne dass wir auf unsere Beine Acht haben, können wir sicher darauf rechnen, dass das Bein jeden bestimmten Abschnitt seiner Schwingungsbahn immer in gleicher Zeit zurücklegt, und dass, wenn eine gewisse Zeit vom Beginne seiner Schwingung verflossen ist, es immer eine gewisse Lage gegen den übrigen Körper angenommen haben wird. Die Einrichtung, vermöge deren das am Rumpfe hängende Bein wie ein Pendel von hinten nach vorn schwingt, ist daher sehr nützlich, damit die Schritte mit einer gewissen Gleichmässigkeit ihrer Länge und ihrer Dauer auf einander folgen«.

Die Hypothese der Pendelschwingung des Beines macht es ihnen also vor allen Dingen erklärlich, warum die auf einander folgenden Schritte mit solcher Gleichmässigkeit, sowohl in Bezug auf ihre Länge, als in Bezug auf ihre Dauer ausgeführt werden, ein Umstand, welcher von VIERORDT in seinem Buch: »Ueber das Gehen des Menschen in gesunden und kranken Zuständen«[1]) allerdings gerade gegen die reine Schwingungstheorie angeführt wird: »Ich muss gestehen«, sagt derselbe auf pag. 42, »dass mir die reine Schwingungstheorie, die jegliche Betheiligung der Muskulatur während der Pendelung des Beines ausschliesst, auch nicht sehr plausibel erscheint. Eine so präcis erfolgende Bewegung lediglich der Schwere überlassen!«

Wenn nun auch die Hypothese der Pendelschwingung des einen Beines und die ganze WEBER'sche Theorie des Gehens der damaligen Kenntniss der Bewegungsvorgänge beim Gehen vollständig angepasst sind, so schliesst dies natürlich nicht aus, dass sie einer anderen Hypothese und vielleicht sogar einer anderen Theorie Platz machen

1) Tübingen 1881. pag. 42.

müssen, sobald es gelungen sein sollte, Thatsachen aufzudecken, welche mit jenen in directem Widerspruch stehen. Dies kann allein auf inductivem Wege geschehen, also ausschliesslich dadurch, dass wir durch Messungen mit feineren Hülfsmitteln uns eine genauere Kenntniss der Bewegungsvorgänge verschaffen. Es gehen daher nur diejenigen der späteren Untersuchungen des menschlichen Ganges thatsächlich über die Weber'sche Mechanik der Gehwerkzeuge hinaus und stellen damit einen Fortschritt dar, welche neue auf empirischem Wege gefundene Resultate ergeben.

Da es sich bei der vorliegenden Arbeit zunächst nur um die experimentelle Feststellung des Bewegungsvorganges, ohne Rücksicht auf das Zustandekommen desselben, handelt, so haben vorläufig nur diejenigen Untersuchungen Berücksichtigung zu finden, welche sich ebenfalls nur mit einer genaueren Registrirung der Bewegung beschäftigen. Die Arbeiten, welche die Ermittelung der im Innern und ausserhalb des menschlichen Körpers auftretenden Ursachen für die Locomotion zum Ziele haben, unter Anderen diejenigen von H. von Meyer, Henke, Pettigrew, A. Fick, Strasser, Duchenne, sollen dagegen in einem späteren Theile der mit der vorliegenden Abhandlung begonnenen Reihe von Untersuchungen über den Gang des Menschen in Betracht gezogen werden.

Mit neuen Mitteln hat wohl zuerst Carlet in dem Laboratorium von Marey die beim Gehen stattfindenden Bewegungen registrirt. Die Resultate finden sich in den Annales des Sciences naturelles: Zoologie des Jahres 1872[1]) niedergelegt. Neu ist bei seinen Versuchen vor allen Dingen, dass er die in Betracht kommenden Grössen, wie Länge und Dauer der Schritte, die Dauer des Aufstehens und des Schwingens der Beine, die Schwankungen und Neigungen des Rumpfes u. s. w. selbstthätig auf die Trommel eines Kymographions aufzeichnen lässt. Seine Untersuchungen bilden auch insofern einen Fortschritt, als in denselben zum ersten Male die Raumcurve experimentell festgestellt worden ist, welche ein Punkt des menschlichen Körpers während des Gehens beschreibt. Durch eine sinnreiche Vorrichtung ermöglichte es Carlet, dass gleichzeitig sowohl die verticalen als auch die horizontalen Schwankungen einer Stelle des Kör-

1) Essai expérimental sur la locomotion humaine: Étude de la marche. Tome XV

pers auf dem Kymographion registrirt wurden. Auf diese Weise fand er z. B., dass ein Punkt der Symphysis ossium pubis eine Curve beschreibt, welche man als in eine Rinne mit der Convexität nach unten eingeschrieben ansehen kann. Am Boden dieser Rinne befinden sich die Minima, während die Curve die Ränder derselben mit ihren Maximis berührt. Die Erzeugende dieses Halbcylinders ist parallel der Marschrichtung. Die Minima entsprechen der Mitte des beiderseitigen Aufstützens der Beine und die Maxima der Mitte des einseitigen Aufstützens.

In mehr unmittelbarer Weise hat darauf Vierordt durch eine Reihe mühsamer Versuche die räumlichen und zeitlichen Verhältnisse des Gehens zu registriren gesucht. Er erreicht es durch eine besondere Vorrichtung am Schuh des Gehenden, dass sich beim Aufsetzen des Fusses die Lage und Richtung der Fusslängsaxe von selbst auf dem Fussboden oder ein auf dem Fussboden ausgebreitetes Papier abdrückt. Mittelst dieses »Abdruckverfahrens« ist er in der Lage, mit grosser Genauigkeit zu bestimmen: die Länge des einzelnen Schrittes, die mittlere und grösste Schrittlänge für jedes Bein, die seitliche Spreizweite, den Winkel, welchen die Richtung der Fusslängsaxe mit der Gangrichtung beim Aufsetzen des Fusses bildet, die durchschnittliche seitliche Abweichung der Ferspunkte desselben Fusses im Doppelschritt und andere für die Erkenntnis des Mechanismus der Gehwerkzeuge wichtige Daten. Er kommt dabei zu sehr interessanten Ergebnissen über das verschiedene Verhalten sowohl desselben als auch beider Beine im Verlauf mehrerer Schritte, Ergebnisse, welche die Brüder Weber bei ihrer Methode, die Schrittlänge aus der Länge des ganzen Weges und der Anzahl der Schritte durch Division zu bestimmen, nicht erhalten konnten.

Weiterhin unternimmt es Vierordt, die Bewegungen der Beine und Arme in ihrem ganzen Verlaufe graphisch unmittelbar zu registriren. Die Methode, welche dieses leisten soll, besteht im Wesentlichen darin, dass an verschiedenen Stellen des Körpers kleine Ausflussröhrchen angebracht sind, welche durch einen dünnen Kautschukschlauch mit einem gläsernen, farbige Flüssigkeit aufnehmenden Reservoir in Verbindung stehen, das dem Versuchsindividuum in der Höhe der Schulterblätter auf dem Rücken aufgeheftet wird. Während des Gehens fliesst nun aus den Röhrchen die farbige

Flüssigkeit mit grosser Geschwindigkeit in sehr dünnem Strahle aus und zeichnet auf am Fussboden befindliches oder seitlich vertical angebrachtes Papier Curven auf. Solcher Ausflussröhrchen sind an je einer Stelle des Fusses und Armes und je zwei Stellen des Unter- und Oberschenkels und Rumpfes angebracht, und zwar am Fuss ein Paar zu einander rechtwinklig gestellter, von denen das eine bei gerader Haltung des Körpers vertical und das andere horizontal gerichtet ist. Die anderen Röhrchen sind horizontal und zwar, wie auch das horizontale Fussröhrchen, senkrecht zur Medianebene des Körpers gestellt; nur das eine horizontale Rumpfröhrchen liegt in der Medianebene selbst. Das vertical gestellte Röhrchen am Fusse soll bei der Bewegung eine Horizontalprojection und die horizontal gestellten eine Verticalprojection der von den betreffenden Stellen des Körpers durchlaufenen Raumcurven liefern. Das in der Medianebene gelegene horizontale Rumpfröhrchen soll dagegen die seitlichen Excursionen des Rumpfes auf den horizontalen Fussboden verzeichnen.

Es liegt in der Natur der Sache, und wird auch keineswegs von Vierordt verkannt, dass diese »Spritzmethode« sehr beträchtliche Fehlerquellen in sich birgt. Das verticale Röhrchen wird gerade, da es sich am Fusse befindet, zu grossen Richtungsänderungen ausgesetzt, und die horizontalen Röhrchen, welche ihre Curven mit einer Ausnahme auf vertical gestellte Papierflächen aufspritzen sollen, werden bei den seitlichen Schwankungen des Körpers zu grossen Veränderungen ihres Abstandes von der Projectionsebene ausgesetzt sein, um ein getreues Abbild der Bewegungscurven liefern zu können. Ganz Entsprechendes gilt für das mediane Rumpfröhrchen. Dazu kommt nun vor allen Dingen noch, dass die Röhrchen sich nicht an ruhenden oder durchweg gleichmässig bewegten Körpertheilen, sondern an solchen mit den verschiedenartigsten gleichzeitigen Bewegungen befinden.

Wenn auch später die Vierordt'sche Methode, die beim Gehen von einzelnen Stellen des Körpers beschriebenen Bahnen auf Ebenen zu projiciren, durch andere viel genauere Methoden ersetzt worden ist, so ist derselben doch ein gewisser historischer Werth nicht abzusprechen. Denn sie stellt den ersten Versuch einer gleichzeitigen Registrirung der Bewegungscurven der einzelnen Körpertheile dar. Für den praktischen Arzt dürfte sie unter Umständen auch heute noch ein Mittel darbieten, sich einen ungefähren Ueberblick über die,

bestimmte pathologische Zustände begleitenden Abnormitäten des Gehens und Laufens zu verschaffen, — vorausgesetzt, dass derselbe es nicht vorzieht, sich des ungleich besseren Hülfsmittels zu bedienen, welches die Photographie darbietet. Dem Forscher auf physiologisch-mechanischem Gebiete, welchem es nicht darum zu thun sein kann, schnell und bequem zu arbeiten, sondern welcher keine Zeit und Mühe schonen darf, um eine möglichst genaue Kenntniss der bei der Locomotion befolgten Bewegungsgesetze, und dadurch einen möglichst tiefen Einblick in die dabei thätigen Kräfte zu gewinnen, wird dagegen die Spritzmethode kaum noch bemerkenswerthe Dienste leisten können.

Endlich hat VIERORDT auch »die zeitlichen Verhältnisse der Gehbewegungen« registrirt. Durch eine sehr zweckmässige Einrichtung ermöglicht er es, dass die Dauer der Schritte, die Zeit der Schwingung des Beines, die Zeit des Aufstehens des ganzes Fusses sowohl als der Ferse und die des Ballens allein auf der Trommel eines Kymographions registrirt werden. Während CARLET nach dem Vorgang seines Lehrers MAREY die Luft als Uebertragungsmittel verwendet hatte, bedient sich VIERORDT bei seinen zeitlichen Messungen der Elektricität. Er kommt mit dieser gewiss sehr exact arbeitenden Untersuchungsmethode wieder zu sehr interessanten Ergebnissen über das verschiedene Verhalten sowohl desselben als auch beider Beine im Verlauf mehrerer Schritte. Die Brüder WEBER hatten nur die durchschnittliche Schrittdauer aus der Zeit des Gehens und der Anzahl der Schritte durch Division abgeleitet und ausserdem auf directem Wege die Dauer des Aufstehens des einen Beines auf dem Fussboden gemessen. Hieraus berechneten sie dann die übrigen in Betracht kommenden Zeiten, wie die Dauer der Schwingung eines Beines, die Dauer des beiderseitigen Aufstehens u. s. w., indem sie annahmen, dass nicht nur ein jedes Bein bei jedem späteren Schritte immer wieder seine Bewegung in genau derselben Weise ausführte, sondern dass auch beide Beine sich beim Gehen ganz gleichmässig verhielten. Es mussten ihnen daher die von VIERORDT aufgedeckten Ungleichmässigkeiten, in denen der letztere die Norm des Gehens erblickt, verborgen bleiben.

Einen grossen Fortschritt hat die Mechanik der Gehwerkzeuge dem Pariser Physiologen MAREY zu verdanken. Das Hauptverdienst dieses Gelehrten liegt darin, eine ganz neue Untersuchungsm-

ausgebildet zu haben, indem er in der Chronophotographie der directen Messung von Bewegungsvorgängen ein Hülfsmittel dienstbar machte, welches gestattete, mit grösster Genauigkeit nicht nur die Bewegungen der Körpertheile auf eine Ebene zu projiciren, sondern auch gleichzeitig den zeitlichen Verhältnissen dabei Rechnung zu tragen.

Die Verwendung der Photographie zur Fixirung von Bewegungsphasen ist dem amerikanischen Photographen Muybridge in San Francisco zu verdanken. Demselben ist es zuerst gelungen, eine Serie von successiven Bewegungsphasen eines Pferdes zu photographiren. Er verwendete zu diesem Zwecke eine Reihe nebeneinander stehender photographischer Apparate, welche nacheinander in kurzen Zeitintervallen für einen Moment geöffnet wurden. Die Leistung von Muybridge ist um so bemerkenswerther, als zu jener Zeit die photographischen Platten noch nicht den hohen Grad von Empfindlichkeit besassen, der sie heute so vortrefflich zur Aufnahme von Momentbildern geeignet macht. Die Aufnahme der successiven Bewegungsphasen wurde bei der kurzen Expositionszeit, welche die schnelle Bewegung des Pferdes erforderlich machte, nur dadurch ermöglicht, dass das Thier sich vor einem weissen Schirm bewegte, welcher so geneigt und so orientirt war, dass er die auffallenden Sonnenstrahlen auf die photographischen Apparate zu reflectirte. Infolgedessen hob sich das Pferd als ein dunkler Körper auf dem sehr hellen Hintergrunde scharf ab. Allerdings sind diese ersten Momentbilder noch insofern unvollkommen, als sie nur die Silhouette des Thieres, aber fast gar keine Details geben; sie lassen jedoch schon deutlich die verschiedenen Stellungen der Beine und des Kopfes in den aufeinanderfolgenden Bewegungsphasen erkennen. Die Beschreibung dieser ersten Serienaufnahmen von Momentbildern ist unter den Auspicien von Stanford, Gouverneur von Californien, welcher Muybridge zu den Versuchen veranlasst hatte, im Jahre 1882 von Willmann veröffentlicht worden unter dem Titel: The Horse in Motion, as shown by instantaneous Photography[1]).

Durch das glückliche Gelingen des ersten Versuches ermuthigt, unternahm es dann Muybridge, Momentbilder der Bewegungsphasen von anderen Thieren und vor allen Dingen auch vom Menschen anzufertigen.

1) London, Turner and Co.

Nach der Erfindung der so überaus lichtempfindlichen Bromsilbergelatine-Platten gelang es ihm dann bald, Momentbilder herzustellen, bei denen nicht nur die Umrisse, sondern alle Einzelheiten mit grösster Schärfe hervortreten. Er hat dann die Welt mit einer grossen Zahl vorzüglicher Serienaufnahmen vom Menschen und den verschiedensten Thieren in allen möglichen Fortbewegungsarten bereichert; unter denselben finden sich auch solche, welche gleichzeitig von zwei verschiedenen Seiten aus gewonnen sind.

Nach dem Vorgange von MUYBRIDGE beschäftigen sich auch der Photograph ANSCHÜTZ, früher in Lissa, zur Zeit in Berlin, und LONDE, Directeur du Service Photographique de la Salpétrière [1]) mit der Herstellung von Bewegungsphasen des Menschen und der verschiedensten Thiere von einer Seite; beide haben es dabei zu einem nicht geringeren Grade von Vollkommenheit gebracht. Die Errungenschaften von MUYBRIDGE, ANSCHÜTZ und LONDE sind für Künstler, insbesondere für diejenigen, welche sich mit der Darstellung des Menschen und der Thiere in Bewegung beschäftigen, von der allergrössten Bedeutung.

Die Verwendung der Photographie als wissenschaftliches Untersuchungsmittel und die Vervollkommnung der photographischen Apparate in dieser Richtung ist, wie schon erwähnt, in erster Linie MAREY zu verdanken.

Um bei einer Vergleichung der successiven Momentbilder desselben Bewegungsvorganges zu ganz sicheren Resultaten gelangen zu können, wäre es nöthig, dass die einzelnen Phasenbilder in genau parallelen Richtungen aufgenommen würden und genau dieselbe Verkleinerung aufwiesen. Dies liesse sich auf directem Wege exact nur dadurch erreichen, dass die Axen der nebeneinander stehenden photographischen Apparate seitlich denselben Horizontalabstand besässen wie die Bewegungsphasen, und dass im Uebrigen die einzelnen Apparate in jeder Beziehung optisch gleichwerthig wären. Wenn sich auch die letzte Forderung bis zu einem gewissen Grade realisieren lässt, so gilt das keineswegs von der ersten; denn der nöthige Abstand der einzelnen Apparate hängt von der im Allgemeinen von vornherein unbekannten Geschwindigkeit des bewegten Körpers ab

1) LONDE, La Photographie Médicale. Gauthier, Villars et fils, Paris 1893 und DEBS., La Photochronographie appliquée aux Études Médicales. Internationale medicinische-photographische Monatsschrift Bd. I, pag. 9. 1894.

und müsste für jeden anderen Körper und jede andere Bewegungsart desselben Körpers ein anderer sein. Bei der Versuchsanordnung von Muybridge, Anschütz und Londe besassen die nebeneinander stehenden Apparate einen bestimmten, nicht nach der Geschwindigkeit des aufzunehmenden Körpers bemessenen Abstand. Es wäre daher nöthig, bei einer Vergleichung der Phasenbilder den verschiedenen Richtungen, von denen aus dieselben gewonnen sind, Rechnung zu tragen. Das letztere ist nun bedeutend leichter, wenn die verschiedenen Richtungen alle durch einen Punkt hindurchgehen, d. h. also wenn die Aufnahmen alle von ein und demselben Standpunkte aus gewonnen sind. Abgesehen davon entspricht dies auch viel mehr unserer directen Anschauung, wenn wir einen bewegten Gegenstand mit den Augen verfolgen.

Es bedeutete daher einen entschiedenen Fortschritt in der Verwendung der Photographie zum Analysiren der Bewegungen des menschlichen und thierischen Körpers, dass es Marey gelang, Serienaufnahmen mit Hülfe eines einzigen photographischen Apparates zu machen[1]). Seine Bemühungen waren zunächst darauf gerichtet, eine Serie successiver Bewegungsphasen eines fliegenden Vogels zu fixiren, da es Muybridge mit seiner Einrichtung nur dahin gebracht hatte, einzelne Momentbilder eines solchen zu erlangen. Er construirte zu diesem Zwecke einen photographischen Apparat in Form einer Jagdflinte, mit welchem er einen Vogel einvisiren und in seinem Fluge verfolgen konnte. Die empfindliche Platte dieses Apparates war grösser als die Hinterwand der dunkeln Kammer und konnte um eine ausserhalb der Camera angebrachte, zu der optischen Axe des Apparates parallele Axe in schnelle Rotation versetzt werden, so dass immer andere und andere Stellen derselben die Hinterwand der dunklen Kammer bildeten.

Durch eine besondere Vorrichtung wurde die Platte immer für einen kurzen Moment in ihrer Drehung aufgehalten, während eine Momentaufnahme gemacht wurde. Die dazu erforderliche Expositions-

---

1) Marey, Sur la reproduction, par la photographie, des diverses phases du vol des oiseaux. Comptes rendus, tome 94, p. 683. Naples, 9 mars 1882; ferner: Photographies instantanées d'oiseaux au vol. C. r., tome 94, p. 823. 1882 und: Emploi de la photographie instantanée pour l'analyse des mouvements chez les animaux. C. r., tome 94, p. 1013. 1882.

zeit brauchte nur $\frac{1}{700}$ Secunde zu betragen, da MAREY schon im Besitze der empfindlichen Bromsilbergelatine-Platten war. Die Platte drehte sich in einer Secunde einmal um ihre Axe und wurde dabei zwölfmal arretirt und der Einwirkung des Lichtes ausgesetzt. Dadurch erhielt MAREY in einer Secunde ein Dutzend Bilder eines fliegenden Vogels, welche am Rande der empfindlichen Platte gleichmässig vertheilt waren.

Eine weitere Vervollkommnung der photographischen Untersuchungsmethode erzielte MAREY, indem er auf einer ruhenden Platte mittelst eines gewöhnlichen Apparates verschiedene Phasen eines bewegten Menschen erhielt[1]). Dies ermöglichte er dadurch, dass er einen Menschen ganz hell durch Sonnenstrahlen beleuchtete und vor einem schwarzen Hintergrund, einer dunklen Höhle, gehen liess. In Folge des dunklen Hintergrundes behält die photographische Platte ihre Empfindlichkeit längere Zeit an den Stellen, auf welche nicht schon Bilder gekommen sind. Die verschiedenen Phasen wurden durch eine direct vor dem Objectiv angebrachte rotirende Scheibe mit einem Fenster hervorgebracht. Später[2]) ersetzte MAREY diese Scheibe durch ein Rad mit 10 Speichen, welches sich zehnmal in der Secunde umdrehte, so dass zwischen dem Anfang zweier Bewegungsphasen genau $\frac{1}{100}$ Secunde verflossen war.

Bei dieser Häufung der Phasen verdecken sich nun an vielen Stellen die Bilder so sehr, dass es nur schwer, zuweilen fast unmöglich ist, sie zu entwirren. Diesem Uebelstande kann entweder dadurch abgeholfen werden, dass man die Platte beweglich macht, oder dass man nur einen sehr schmalen Theil des bewegten Körpers durch die Photographie fixiren lässt. Beide Methoden sind von MAREY angewendet und ausgebildet worden.

Bei der photographischen Flinte, wie er seinen oben beschriebenen ersten Apparat mit beweglicher Platte nennt, bestand die empfindliche Platte wie gewöhnlich aus Glas. Das grosse Gewicht

1) MAREY, Analyse du mécanisme de la locomotion au moyen d'une série d'images photographiques recueillis sur une même plaque et représentant les phases successives du mouvement. C. r., tome 95, p. 14. 1882.

2) MAREY, Emploi de la photographie [illegible] déterminer la trajectoire des corps en mouvement, avec leurs vit[illegible] [illegible]ositions rélatives. Application à la Mécanique ani[illegible]

derselben erlaubte nun nicht einen so häufigen Wechsel von Bewegung und Arretirung der Bewegung, wie es bei einer Vergrösserung der Phasenzahl, über 12 in der Secunde, erforderlich wird. Daher verwendete später Marey ein mit der lichtempfindlichen Schicht überzogenes dünnes Häutchen[1]), welches in Form eines langen Bandes zwischen zwei Rollen straff ausgespannt war und durch eine besondere Vorrichtung mit grosser Schnelligkeit von der einen Rolle ab- und auf die andere aufgewickelt werden konnte, in der Weise, dass das Stück zwischen den Rollen immer den Hintergrund der dunklen Kammer bildete. Mit dieser neuen Einrichtung erzielte Marey Serien dicht aufeinander folgender Phasenbilder von der grössten Vollkommenheit. So deutlich dieselben den Wechsel der Haltung des bewegten Körpers wiedergeben, so lassen sie doch nicht unmittelbar die Geschwindigkeit der Fortbewegung in den verschiedenen Momenten erkennen, da sie in der einen Richtung um das Stück zu viel auseinander gezogen sind, um welches das Häutchen während zweier Expositionen verschoben worden ist, und da andererseits bei dieser Einrichtung der ganze Apparat nicht in absoluter Ruhe verharren kann. Um exacte Messungen der Geschwindigkeiten vornehmen zu können, wäre ein absolut gleichmässiger Gang des das Häutchen bewegenden Mechanismus und ein Vermeiden aller, wenn auch noch so geringen Erschütterungen, unerlässlich.

Im Interesse der Genauigkeit der abzuleitenden Resultate liegt es daher, von einer Bewegung der empfindlichen Platte abzusehen, und dafür nur diejenigen Theile des Körpers zu photographiren, welche für die Haltung desselben massgebend sind. Marey erreichte dies beim Menschen dadurch, dass er denselben schwarz bekleidete und auf den Anzug helle Streifen zwischen den Hauptgelenken der Extremitäten anheftete[2]). Bei dieser Einrichtung konnte er eine ganz beträchtliche Anzahl von Bewegungsphasen eines sich in irgend welcher Art fortbewegenden Menschen oder Thieres auf ein und dieselbe Platte durch die Photographie aufzeichnen lassen, ohne dass die Bilder sich gegenseitig störten. Da die sehr kleinen Zeitinter-

---

1) Marey, Appareil photochronographique applicable à l'analyse de toutes sortes de mouvements. C. r., tome 111, p. 626. 1890.

2) Marey, Emploi des photographies partielles pour étudier la locomotion de l'homme et des animaux. C. r., tome 96, p. 1827. 1883.

valle zwischen den einzelnen Phasen gleich gross waren, so hat man in diesen von Marey gewonnenen Serienaufnahmen eine in Bezug auf die räumlichen und zeitlichen Verhältnisse getreue Projection des ganzen Bewegungsvorganges auf eine Ebene.

Würden alle Punkte des menschlichen oder thierischen Körpers sich beim Gehen oder Laufen in einer einzigen Ebene bewegen, so böten diese Serienbilder nicht nur eine einseitige Projection, sondern ein getreues Bild des ganzen Bewegungsvorganges überhaupt dar. Da wir es jedoch hierbei mit einer räumlichen Bewegung zu thun haben, indem alle Gelenkmittelpunkte doppelt gekrümmte Curven beschreiben, so genügt die eine Projection, welche Marey mittelst seiner Methode von dem Bewegungsvorgange erhält, nicht, um die Bewegung im Raume vollständig zu erkennen. Wenn z. B. die Bilder in einer zur Gangebene senkrechten Richtung gewonnen sind, so hat man wohl einen Ueberblick über die Bewegung in der Fortschreitungsrichtung und über die gleichzeitigen Hebungen und Senkungen der einzelnen Körpertheile, man hat aber gar keine Einsicht in die seitlichen Schwankungen, welche der Körper ausführt. Genau genommen bietet aber selbst diese Profilaufnahme nicht einmal ein ganz exactes Mittel zur Bestimmung der Bewegung in den Richtungen nach vorn und oben. Dies würde nur der Fall sein, wenn man eine Parallelprojection auf die Gangebene besässe. Die Photographie liefert aber keine Parallelprojection, sondern eine Centralprojection der äusseren Körper auf eine zur Axe des photographischen Apparates senkrechte Ebene.

Dies lässt sich leicht einsehen.

Die durch das centrirte Linsensystem, welches in dem Objectivkopfe eines photographischen Apparates enthalten ist, hervorgerufene Brechung der Lichtstrahlen findet bekanntlich in der Weise statt, dass ein jeder Strahl, welcher vor der Brechung nach einem bestimmten zum Linsensystem festen Punkte K (vgl. Fig. 1 auf S. 173) hin gerichtet ist, nach erfolgter Brechung im Innern der photographischen Camera eine derartige Richtung besitzt, als käme er von einem anderen, ebenfalls festen Punkte K' her. Diese beiden ausgezeichneten Punkte liegen auf der Axe des Linsensystems und heissen die Knotenpunkte des dioptrischen Systems. Sie liegen bei den zum Photographiren verwendeten Systemen gewöhnlich nahe anein

so dass man sie bei vielen Messungen durch einen einzigen zwischen ihnen liegenden Punkt ersetzen kann, ohne damit eine neue Fehlerquelle zu schaffen, welche im Vergleich zu anderen, bei der Messung nicht zu vermeidenden, Fehlerquellen in Betracht käme. Man bezeichnet dann zweckmässiger Weise den einen Punkt, welcher die beiden Knotenpunkte ersetzt, als optischen Mittelpunkt, wie es ja bei einer einzigen Linse, wenn man deren Dicke vernachlässigen darf, gebräuchlich ist. Bei Annahme eines einzigen optischen Mittelpunktes O würden dann alle Lichtstrahlen, welche die Richtung auf O besitzen, scheinbar ungebrochen und auch unverschoben aus dem Linsensystem wieder austreten.

Sind bei einer Messung alle Fehlerquellen möglichst auf ein Minimum reduciert, so kann es vorkommen, dass der Fehler, welchen die Ersetzung der beiden Knotenpunkte durch den einen optischen Mittelpunkt mit sich bringt, im Vergleich zu den übrigen unvermeidlichen Fehlern zu gross ausfällt, so dass dadurch die Genauigkeit, welche man ohne ihn erreichen würde, illusorisch gemacht wird. In diesen Fällen muss man natürlich die beiden Knotenpunkte beibehalten. Man kann sich dann trotzdem leicht den Verlauf der Lichtstrahlen und das Hervorbringen des Bildes auf der photographischen Platte anschaulich machen, wenn man annimmt, dass das Strahlenbündel der gebrochenen Strahlen von dem der einfallenden losgelöst und um den Abstand der beiden Knotenpunkte in der Richtung der optischen Axe des Systems verschoben worden ist. In dieser Weise sind die beiden Strahlenbündel in Fig. 1 eingezeichnet worden.

Die Strahlen des einfallenden Bündels mögen von Punkten einer doppelt gekrümmten Curve AB herrühren. Dann wird das Bild $A'B'$, welches von den Strahlen des gebrochenen Bündels auf der photographischen Platte verzeichnet wird, im Allgemeinen wieder eine Curve sein. Diese Bildcurve $A'B'$ ist nun gewöhnlich keineswegs der Raumcurve AB ähnlich, was schon daraus hervorgeht, dass jede andere Curve $A''B''$, welche auf der durch die einfallenden Strahlen gebildeten Fläche liegt, dasselbe Bild ergeben muss, und auch daraus, dass die Bildcurve $A'B'$ in einer Ebene liegt. Selbst wenn AB eine ebene Curve wäre, brauchte die Curve $A'B'$ nicht die wahre Gestalt jener erkennen zu lassen. So bildet sich z. B. ein Kreis auf der photographischen Platte im Allgemeinen als Ellipse ab. Die Bild-

curve kann nur dann die genaue Form der Curve AB wiedergeben, wenn die letztere in einer Ebene liegt, welche auf der optischen Axe des Linsensystems senkrecht steht. Denkt man sich also z. B. die Strahlen des einfallenden Bündels über die Curve AB hinaus nach rückwärts verlängert bis zum Schnitt mit einer auf der optischen Axe senkrecht stehenden Ebene E, so erhält man in dieser Ebene eine Curve $A'''B'''$, welcher die Bildcurve $A'B'$ ähnlich ist. Es ist dabei ganz gleichgültig, in welcher Entfernung von dem photographischen Apparat sich diese Ebene befindet. Rückt man die Ebene weiter fort,

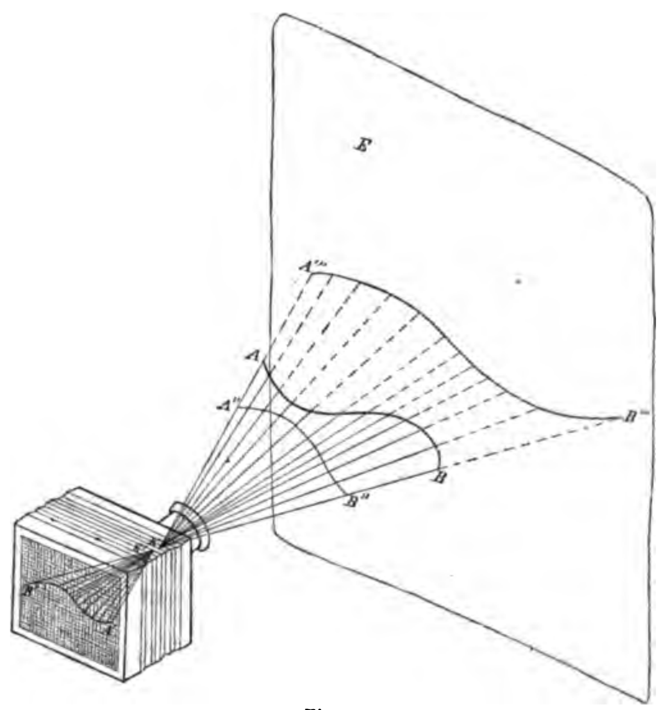


Fig. 1.

oder bringt sie näher an den Apparat heran, so bleibt die Bildcurve trotzdem der Schnittcurve $A'''B'''$ ähnlich, es ändert sich nur dabei das Grössenverhältniss der beiden Curven $A'''B'''$ und $A'B'$.

Die Curve $A'''B'''$ ist nun nichts anderes als eine Centralprojection der Raumcurve AB auf die Ebene E, bei welcher der erste Knotenpunkt K die Rolle des Projectionscentrums spielt. Man erhält daher durch die Photographie ein getreues, im Allgemeinen verkleinertes Abbild der Centralprojection der Körper der Aussenwelt auf irgend eine zur optischen Axe des Apparates senkrecht stehende Ebene.

Es werden infolge dessen die photographischen Bilder von Bewegungscurven, wie sie von MAREY auf einer Platte gewonnen worden sind, dieselben Mängel aufweisen, welche der Centralprojection derselben anhaften.

Bewegen sich beispielsweise zwei Punkte A_1, A_2 mit derselben Geschwindigkeit und in derselben Richtung parallel der Projectionsebene E, so wird die gleiche Geschwindigkeit in der Centralprojection nur dann zu erkennen sein, wenn die Punkte gleich weit von der Projectionsebene entfernt sind. Besitzt dagegen der eine, z. B. A_2, eine grössere Entfernung von E wie der andere, A_1, so wird A_2 in der Projection in derselben Zeit einen grösseren Weg zurücklegen als A_1. Dies lässt sich ohne Weiteres aus Figur 2 erkennen, welche so zu verstehen ist, dass die Projectionsebene auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht und dieselbe in EE durchschneidet. K ist das Projectionscentrum und $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_2 B_2}$ die von A_1 und A_2 zurückgelegten gleich grossen Wege. Die Projectionen der einzelnen Punkte sind mit Strichen versehen worden. Man bestätigt sofort, dass $\overline{A'_2 B'_2}$ grösser wie $\overline{A'_1 B'_1}$ ist.

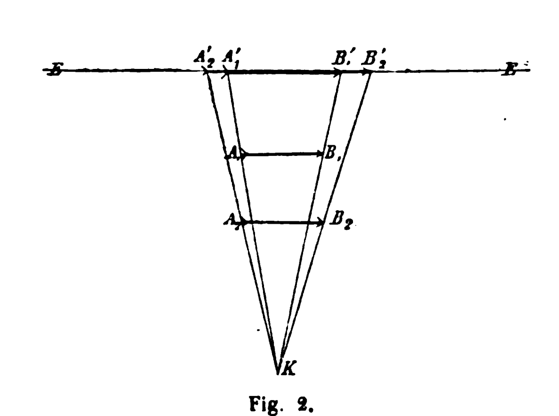


Fig. 2.

Es lässt sich daher aus der photographischen Aufnahme eines Bewegungsvorganges kein genauer Vergleich der Geschwindigkeiten von zwei verschiedenen Körperstellen gewinnen, selbst wenn man weiss, dass die Bewegung beider senkrecht zur optischen Axe des Apparates stattfindet. Wenn man z. B. in der chronophotographischen Profilaufnahme des Ganges eines Menschen findet, dass zu einer gewissen Zeit das Hüftgelenk und das Handgelenk sich mit gleicher Geschwindigkeit nach vorn verschieben, so wäre man nicht berechtigt anzunehmen, dass nun thatsächlich in dem Moment beide Gelenke sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegt haben. Es würde im Gegentheil aus den obigen Betrachtungen hervorgehen, dass in diesem Falle das Handgelenk sich ein wenig langsamer bewegt hat.

Der Fehler, welchem man hierbei ausgesetzt ist, hängt einerseits von der in der Richtung der optischen Axe des photographischen Apparates geschätzten Entfernung der beiden bewegten Punkte, und andererseits von der Entfernung des photographischen Apparates von dem aufzunehmenden Bewegungsobject ab. Er wird um so grösser, je grösser jene und je kleiner diese Entfernung ist, und umgekehrt. Man kann daher sagen, der Fehler ändert sich nahezu proportional dem Verhältniss der beiden Entfernungen. Bei sehr grosser Entfernung des Apparates und verhältnissmässig kleinem Abstande der beiden Punkte kann er so gering ausfallen, dass er keinen bemerkenswerthen Einfluss auf die Richtigkeit der Messung ausübt. Man hat aber zu beachten, dass dann infolge der grossen Entfernung des Apparates die Bilder sehr klein ausfallen, so dass dadurch auf der anderen Seite die Genauigkeit der Messungsresultate verringert wird. Handelt es sich um möglichst exacte Messungen, so darf man nicht zu weit mit dem photographischen Apparat fortgehen. Dann macht sich aber auch die aus der verschiedenen Entfernung der einzelnen Punkte hervorgehende Fehlerquelle geltend. Grosse Genauigkeit muss man aber immer anstreben, wenn man aus den directen Messungen nicht nur die verschiedenen Lagen eines bewegten Punktes, sondern auch die Geschwindigkeiten, mit denen er durch seine Orte hindurchgeht, bestimmen will.

Man ist nun nicht nur beim Vergleich der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte uncontrolirbaren Fehlern ausgesetzt, sondern man kann sich auch sehr täuschen, wenn man aus der Photographie der Bewegungscurve eines einzigen Punktes Schlüsse auf die Geschwindigkeit desselben an den verschiedenen Stellen ziehen will.

In Figur 3 (auf Seite 176) soll die Curve AB die Bahn eines Punktes darstellen, der sich in horizontaler Ebene bewegt. Die auf derselben abgegrenzten kleinen Strecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ mögen in gleichen Zeiten zurückgelegt sein. Es is dann aus der Figur ersichtlich, dass der Punkt an den Stellen A_1 und A_3 nahezu gleich grosse, dagegen an der Stelle A_2 eine merklich kleinere Geschwindigkeit besitzt. Aus der Centralprojection würde man dagegen zu schliessen haben, dass die Geschwindigkeit an den Stellen A_1 und A_2 gleich, dagegen bei A_3 grösser sei.

Selbst über die gegenseitige Lagerung von Punkten einer ruhenden Figur erlaubt die Centralprojection keine absolut gültigen Schlüsse.

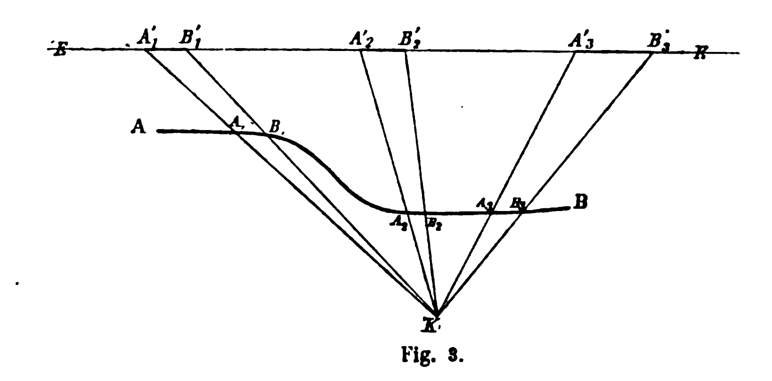


Fig. 3.

In Fig. 4 (auf Seite 177) wird ein in verticaler Ebene befindliches Viereck projicirt. Im Gegensatz zu den Figuren 2 und 3, welche den Vorgang in der Ansicht von oben zeigen, stellt diese Figur eine Ansicht von der Seite dar. Während nun in Wirklichkeit der Eckpunkt *R* höher liegt als *S*, erscheint in der Projection auf der Ebene *E* der letztere Eckpunkt als der weiter vom Fussboden entfernte, und während die beiden Eckpunkte *P* und *Q* in Wirklicheit horizontal neben einander liegen, scheint *P* in der Projection dem horizontalen Fussboden näher zu sein.

Man sieht also, die eine Centralprojection reicht im Allgemeinen auch dann zur Analyse der Bewegungsvorgänge nicht aus, wenn man sich allein auf die Untersuchung der Bewegung in einer bestimmten Richtung oder parallel einer bestimmten Ebene beschränkt.

So werthvoll daher auch die von Marey zuerst gewonnenen chronophotographischen Serienaufnahmen des gehenden und laufenden Menschen sind, und einen so grossen Fortschritt sie für die Untersuchung des menschlichen Ganges darstellen, so genügen sie doch nicht zu einer exacten Feststellung des Bewegungsgesetzes.

Zur vollständigen Registrirung einer räumlichen Bewegung sind mindestens zwei in möglichst von einander abweichenden Richtungen gleichzeitig gewonnene Projectionen erforderlich. Es ist dabei im Princip gleichgültig, ob diese Projectionen Central- oder Parallelprojectionen darstellen, und in welchen Richtungen sie gewonnen sind. Für die Discussion und die weitere Auswerthung der Projectionen würden

sich dagegen besonders rechtwinklige Parallelprojectionen auf zwei zu einander senkrechte Ebenen eignen, da dieselben unmittelbar die Beziehung der Bewegung auf ein festes rechtwinkliges, räumliches Coordinatensystem ergeben. Der Umstand, dass man mittelst der Photographie nur Centralprojectionen erlangen kann, macht die Beziehung auf ein Coordinatensystem nur unbequemer, keineswegs aber unmöglich.

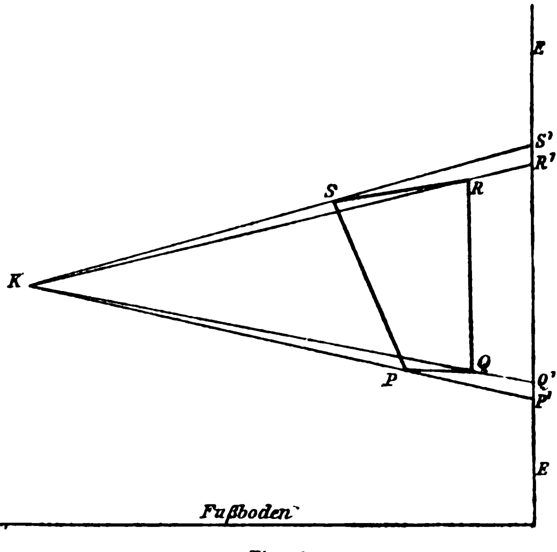


Fig. 4.

Es reichen nun zwei gleichzeitige photographische Aufnahmen desselben Bewegungsvorganges vollständig aus, um die Bewegung im Raume nach jeder beliebigen Richtung hin zu bestimmen. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, haben wir vor Jahren die »zweiseitige Chronophotographie«, wie man sie nennen könnte, verwendet, um die relative Bewegung des Unterschenkels gegen den Oberschenkel am lebenden Menschen zu messen[1]). Die Methode, welche wir dabei anwendeten, war folgende:

Die zweiseitige Chronophotographie setzt voraus, dass die Apparate in kurzen Intervallen zu absolut gleicher Zeit geöffnet und geschlossen werden. Diese Forderung würde sich nur durch eine verwickelte

1) W. BRAUNE und O. FISCHER, Die Bewegungen des Kniegelenkes nach einer neuen Methode am lebenden Menschen gemessen. Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Bd. XVII, Nr. II. Leipzig 1891.

Einrichtung verwirklichen lassen. Aus diesem Grunde verlegten wir die Unterbrechung der Exposition nicht in den Verschluss der photographischen Apparate, sondern in das photographische Object selbst, so dass es gar nicht nöthig war, besondere Einrichtungen des Verschlusses an den Apparaten anzubringen.

Wir erreichten dies dadurch, dass wir die auf dem Unterschenkel befindlichen, oder fest mit demselben verbundenen Punkte, deren Bewegungscurven photographirt werden sollten, mittelst des elektrischen Stromes intermittirend selbstleuchtend machten. Wir leiteten zu diesem Zwecke durch eine geeignete Vorrichtung den secundären Strom eines RUHMKORFF'schen Funkeninductors an der betreffenden Stelle vorbei und unterbrachen daselbst den Stromkreis in der Weise, dass die beiden Enden des unterbrochenen Drahtes sich als feine Spitzen in kurzer Entfernung gegenüber standen. Infolge dessen sprangen, wenn der Inductor in Thätigkeit gesetzt wurde, in kurzen Intervallen zwischen den beiden Spitzen helle Funken über Diese Funken hinterliessen, trotz ihrer kurzen Dauer, einen sehr intensiven Eindruck auf der photographischen Platte, und sie gaben ferner, gerade infolge ihrer kurzen Dauer, ein sehr scharf begrenztes, nicht durch die Bewegung des Unterschenkels in die Länge gezogenes Bild.

Da die Dauer des elektrischen Funkens nach Messungen von WHEATSTONE noch nicht den 1152000sten Theil einer Secunde beträgt, so wird selbst bei den schnellsten Bewegungen, welche starre Körper auf der Erdoberfläche ausführen, der Körper während des Ablaufes des elektrischen Funkens nicht für uns wahrnehmbar und messbar seinen Ort verändern.

Der elektrische Funke besitzt also zwei Eigenschaften, welche ihn in ganz hervorragendem Maasse zur Hervorbringung von Momentbildern befähigen, seine grosse Helligkeit und seine geringe Dauer. Ausserdem eignet er sich endlich ganz besonders für die zweiseitige Chronophotographie, weil er nach allen Richtungen hin Strahlen von gleicher Intensität aussendet. MAREY bringt seine Serienaufnahmen des menschlichen Ganges nur dadurch zu Stande, dass er die weissen Streifen am schwarzen Tricotanzuge des Mannes durch directes Sonnenlicht grell in der Weise beleuchtet, dass der grösste Theil der reflectirten Strahlen die Richtung nach dem photographischen Apparat einschlägt. Es ist also bei ihm das photographische

Object beleuchtet, nicht aber selbstleuchtend. Ein von der Sonne beleuchteter Körper sendet aber nicht nach allen Richtungen gleichviel Strahlen aus. Wenn MAREY sich daher in ähnlicher Weise wie MUYBRIDGE mit seinem photographischen Apparat so aufstellt, dass er möglichst viel von den reflectirten Lichtstrahlen in denselben hineinbekommt, so wird jede andere Richtung für die photographische Aufnahme ungünstiger sein. Die Folge davon ist dann, dass man zur Erzeugung gleich guter Bilder längere Zeit exponieren muss. Die grössere Expositionszeit bringt aber andererseits den Nachtheil mit sich, dass die Bilder bewegter Objecte weniger scharf erscheinen. Es werden daher im Allgemeinen die von verschiedenen Seiten gleichzeitig gewonnenen Serienaufnahmen von der Sonne beleuchteter Körper ungleich scharf ausfallen und sich in ungleichem Maasse zur Messung eignen.

Es liesse sich vielleicht durch Anwendung von Spiegeln dieser Uebelstand beseitigen. Dann bliebe aber immer noch eine andere Fehlerquelle zurück, die darin zu suchen ist, dass die aufgehefteten weissen Streifen nicht von allen Seiten in gleicher Breite sichtbar sind.

Von untergeordneter, aber für die praktische Ausführung der Versuche doch nicht zu unterschätzender Bedeutung ist der Vortheil, den man bei Anwendung des elektrischen Funkens besitzt, von dem Stand der Sonne und der Witterung unabhängig zu sein, und die Aufnahmen im geschlossenen Raume bewirken zu können.

Wir hatten uns in unserer Schätzung des elektrischen Funkens als sehr brauchbares Hülfsmittel für die Untersuchung der Gelenkbewegungen am Lebenden nicht getäuscht. Die aus den zweiseitigen chronophotographischen Aufnahmen der Bewegung des Unterschenkels gewonnenen Resultate von vier zu verschiedenen Zeiten und an zwei verschiedenen Individuen angestellten Versuchen zeigten eine ganz überraschende Uebereinstimmung[1]).

Dieses Ergebniss veranlasste uns nun, die Bewegung des menschlichen Ganges durch die zweiseitige Chronophotographie zu registrieren und dadurch die Beziehung des ganzen Bewegungsvorganges auf ein räumliches Coordinatensystem zu ermöglichen, welche aus keiner der bisherigen Serienaufnahmen gewonnen werden konnte. MUYBRIDGE hatte zwar schon gleichzeitige Aufnahmen von verschiedenen Seiten erlangt.

---

1) l. c. p. 70.

Seine Serienbilder sind aber, wie schon früher erwähnt, von verschiedenen Standpunkten aus aufgenommen worden. Ausserdem zerlegen die Aufnahmen von Muybridge den Schritt in zu wenig Phasen, als dass man aus ihnen alle Einzelheiten der Bewegung zu erkennen vermöchte; insbesondere ist es nicht möglich, die Geschwindigkeiten aus denselben mit genügender Genauigkeit abzuleiten. Das Bewegungsgesetz eines Körpers ist aber erst dann vollständig bekannt, wenn man nicht nur die Bewegungsbahnen der einzelnen Punkte des Körpers kennt, sondern auch weiss, mit welcher Geschwindigkeit diese Bahnen an jeder Stelle durchlaufen werden, und welche Beschleunigungen der Körper im Verlaufe der Bewegung erfährt.

Um aus den Coordinatenangaben die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Glieder des gehenden Menschen mit Sicherheit ableiten zu können, müssen dieselben aber sehr genau sein. Man muss daher alle nur denkbare Vorsicht bei der Anstellung der Versuche anwenden, — man muss ferner eine jede Messung so weit treiben, wie es die zu messenden Grössen und die zur Verfügung stehenden Messinstrumente erlauben, — man darf keine Arbeit scheuen, welche irgend welche Fehlerquelle zu vermeiden verspricht, die nicht mehr innerhalb der Grenzen liegt, welche der Genauigkeit der Resultate in Folge der bei allen derartigen Untersuchungen am lebenden Körper nothwendigen vereinfachenden Annahmen gesteckt sind, — und man darf nicht mit unzureichenden Hülfsmitteln Resultate ableiten wollen, welche sich nur unter Anwendung exacter Methoden und mit den Mitteln, welche uns die Mathematik an die Hand giebt, gewinnen lassen.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, haben wir die folgende Methode der Untersuchung ausgebildet.

Beschreibung der Versuche.

Die Methode, welche wir zur Messung der Kniegelenkbewegung angewendet hatten, änderten wir für die Untersuchung des Ganges in der Weise ab, dass wir nicht durch elektrische Funken, sondern durch GEISSLER'sche Röhren einzelne Stellen des menschlichen Körpers selbstleuchtend machten. Diese Röhren waren mit verdünntem Stickstoffgas gefüllt, weil dasselbe im glühenden Zustande verhältnissmässig viel chemisch wirksame Strahlen aussendet. Um die aufeinander folgenden Stellungen des menschlichen Körpers beim Gehen zu registrieren, ohne den etwaigen Deformationen der Hand und des Fusses Rechnung zu tragen, hätte es genügt, an allen grösseren Gelenken solche Röhren von geringen Dimensionen anzubringen. Um aber einen leichteren Ueberblick über die Veränderungen der Körperhaltung und eine sichere Bestimmung der zu einander gehörigen Phasen auf den verschiedenen Bewegungscurven zu ermöglichen, verwendeten wir lange, geradlinig ausgestreckte Capillarröhren, welche sich an einigen Körpertheilen, z. B. am Oberarm und Oberschenkel, zwischen den beiden das Glied begrenzenden Gelenken erstreckten, an anderen, z. B. am Unterarm, Unterschenkel und Fuss, von einem der beiden Gelenke bis über die Mitte des Gliedes hinausragten.

Das Versuchsindividuum war, wie bei MAREY, mit einem schwarzen Tricotanzuge bekleidet (vgl. Taf. I), einerseits um einen dunklen Hintergrund für die Röhren zu bekommen, andererseits um eine bessere Befestigung derselben an den einzelnen Körpertheilen zu ermöglichen. Die Röhren konnten nun nicht direct an den Tricot angebunden werden, weil sonst der Mann Gefahr lief, mit dem elektrischen Strom in unangenehme Berührung zu kommen. Wir verfertigten uns aus diesem Grunde lange Streifen aus dicken Platten von Guttapercha, verdickten dieselben an den Enden durch eine mehrfache Lage von

Scheibchen desselben Stoffes, und nähten sie dann in der Richtung der Längsaxen der einzelnen Körpertheile auf den Tricot in ähnlicher Lage, wie Marey seine weissen Streifen. Um ihre Verbindung mit den betreffenden Abschnitten des menschlichen Körpers zu einer unverrückbaren zu machen, befestigten wir sie ausserdem noch mit Gummischnallen in der Weise, wie es aus der Figur auf Tafel I deutlich zu erkennen ist.

Vor allen Dingen wurde bei der Bemessung der Dimensionen der Guttapercha-Streifen und bei ihrer Befestigung am Körper dafür Sorge getragen, dass nicht etwa durch dieselben die Bewegung in irgend einem Gelenk, welches nicht, wie z. B. das Handgelenk, absichtlich festgestellt werden sollte, gehindert oder auch nur beeinflusst würde.

Zwischen den verdickten Stellen eines isolierenden Streifens zog sich nun die geradlinige Geissler'sche Röhre hin, so dass sie nur an ihren Enden fest auflag, im Uebrigen aber gar nicht mit dem Körper in Berührung kommen konnte. Dadurch war einerseits eine vollkommene Isolierung der Röhren erreicht, andererseits waren dieselben in Folge dessen viel weniger der Gefahr des Zerbrechens ausgesetzt. Um die nothwendigerweise etwas erweiterten Enden der Geissler-schen Röhren unsichtbar zu machen, wurden dieselben mit dickem Kautschukschlauch überzogen. Der letztere erfüllte ausserdem noch den Zweck, die Befestigungsstellen der dünnen Leitungsschnuren, welche die Verbindung der Röhren der verschiedenen Körpertheile herstellten, besonders zu isolieren und an den Gelenken diese Leitungsschnuren zu zwingen, sich in weitem, nach aussen convexen Bogen an dem Gelenk vorbei zu ziehen, sowie es z. B. auf Tafel I am rechten Kniegelenk deutlich zu erkennen ist. Daher war es auch nicht nöthig, diese kurzen Verbindungsschnuren noch besonders zu isolieren, wodurch vielleicht die Bewegung im Gelenk etwas gehindert worden wäre. Diejenigen Leitungsschnuren, welche nicht über Gelenke hinweg zogen, dagegen sich aber über einen ganzen Körpertheil erstreckten, waren natürlich durch Einlagerung in sehr dicken Kautschukschlauch noch besonders isoliert worden. Vielleicht sind wir mit der Isolierung der Strombahn etwas zu peinlich gewesen, vielleicht hätten wir uns manche Mühe sparen können, denn die Bekleidung des Versuchsindividuums nahm gewöhnlich 6 bis 8 Stunden

Zeit in Anspruch. Wir sagten uns aber, dass nur dann der Mann seinen natürlichen Gang annehmen wird, wenn er das Bewusstsein hat, dass der von vielen Menschen so gefürchtete elektrische Strom in gar keine Berührung mit seinem Körper gelangen kann. Natürlich haben wir vor den Versuchen nicht verabsäumt, ihm dieses Bewusstsein dadurch zu einem ganz sicheren zu machen, dass wir ihn lange Zeit hindurch Probe gehen liessen, während der Inductor in Thätigkeit war. Wir hatten dabei gleichzeitig den Genuss, den ganzen Bewegungsvorgang in seinen einzelnen Phasen mit dem Auge direct verfolgen zu können, ähnlich wie man bei dem bekannten GASSIOT-schen Stern die aufeinanderfolgenden Bewegungsphasen der um eine Axe gedrehten GEISSLER'schen Röhre scheinbar momentan zur Anschauung bekommt. Man hat in dieser Einrichtung des Versuchs ein vorzügliches Demonstrationsmittel, einem ganzen Auditorium den Ablauf einer Bewegung, die man sonst wegen ihrer Schnelligkeit nicht genau mit dem Auge verfolgen kann, sichtbar zu machen.

Es wurden im Ganzen 11 Röhren verwendet, je eine für den Kopf, jeden der beiden Oberschenkel, Unterschenkel, Füsse, Oberarme und Unterarme. Die Hände wurden während des Gehens zu den Unterarmen festgestellt. Diese 11 Röhren waren in der Weise mit einander leitend verbunden, dass sie hintereinander in denselben secundären Stromkreis eines grossen RUHMKORFF'schen Inductors eingeschaltet waren. Damit die Zuleitung von dem Inductor nicht die freie Beweglichkeit des Mannes beeinflussen konnte, trug derselbe quer über den Schultern einen leichten Holzstab (siehe Tafel I), ausserhalb dessen beiderseits die Zuleitungsschnuren mit den Enden des am Körper befindlichen Theiles des Stromkreises zusammengefügt waren. Diese Zuleitungsschnuren waren vom RUHMKORFF'schen Apparat aus zunächst auf beiden Seiten nach je einem von der Gangebene möglichst weit entfernten Punkte der Decke gezogen worden, und traten dann erst von oben herab in grossem Bogen seitlich an die beiden Enden des Holzstabes heran. Dadurch wurde es ermöglicht, dass der Gehende die ganze, ca. 10 Meter lange, Abtheilung des Saales, welche zu den Versuchen benutzt wurde, durchschreiten konnte, ohne durch die Zuleitungsschnuren an der freien Bewegung gehindert zu sein.

Auf den GEISSLER'schen Röhren waren einige Stellen mit schmalen

Ringen von Asphaltlack umgeben worden, die sich dann auf den Photographien als kurze Unterbrechungen der hellen Linie kund gaben. Es war dies einmal in der Nähe derjenigen Enden der Röhren geschehen, welche sich in gleicher Höhe mit einem Gelenkmittelpunkte befanden; dadurch markirten sich die den Gelenken entsprechenden Stellen auf den Photographien als isolirte leuchtende Punkte, wie ein Blick auf Tafel I bestätigt. Ferner befanden sich solche schwarze Ringe an den Stellen, welche den Schwerpunkten einzelner Gliederabschnitte entsprachen, so dass auf den Bildern die Einzelschwerpunkte durch schwarze Punkte auf den weissen Linien hervorgehoben wurden. In gleicher Weise war an dem kleinen Kopfröhrchen eine Stelle markirt worden, um einen sicheren Anhaltepunkt für die Messung der Bewegung des Kopfscheitelpunktes zu haben. Endlich waren noch auf den Oberschenkelröhren durch je drei nebeneinanderliegende Ringe, von denen der mittelste besonders dünn aufgetragen war, die zwei Punkte ausgezeichnet worden, welche die ganze Röhre in drei gleiche Theile zerlegten. Dadurch sollte es ermöglicht werden, für die Stellungen des ganzen Körpers, bei welchen der Hüftgelenkpunkt durch den Unterarm verdeckt wurde, durch Construction oder Rechnung den Ort des Hüftgelenkmittelpunktes hinterher festzustellen.

Die an den Enden der Geissler'schen Röhren abgegrenzten Punkte können natürlich nicht unmittelbar den Ort der zugeordneten Gelenkmittelpunkte für die verschiedenen Bewegungsphasen angeben. Ebensowenig entspricht die Lage der Endpunkte der von Marey verwendeten weissen Streifen genau der Lage der zugehörigen Gelenkmittelpunkte. Man kann überhaupt durch die photographische Aufnahme niemals den Ort eines Gelenkmittelpunktes unmittelbar erhalten, sondern immer nur den eines Punktes, auf welchen sich der Gelenkmittelpunkt in irgend einer Richtung nach aussen, auf die Körperoberfläche projicirt. Die Geissler'schen Röhrenpunkte waren daher nur als Hülfspunkte aufzufassen, welche uns die wahre Lage der Gelenkmittelpunkte vermitteln sollten. Dies erforderte natürlich, dass dieselben in ganz bestimmter Weise zu den Gelenken orientirt waren.

Für die Hüftgelenke und Schultergelenke stellten wir daher auf beiden Seiten die Röhrenpunkte so genau in die Verbindungslinie der Hüftgelenke bezüglich Schultergelenke ein, als dies durch Abtasten

am Lebenden möglich ist. Bei den Hüftgelenken wird diese Orientirung dadurch erleichtert, dass bei gerader Haltung des Körpers die Hüftaxe, d. h. also die Verbindungslinie der beiden Hüftgelenkmittelpunkte, verlängert, auf jeder Seite die Körperoberfläche an der Stelle durchschneidet, an welcher die Spitze des Trochanter major zu fühlen ist. Doch ist es auch an den Schultergelenken nicht schwer, mit ziemlicher Genauigkeit die in der Richtung der Schulterlinie gewonnene Projection eines jeden Gelenkmittelpunktes auf die Oberfläche des Körpers zu bestimmen. Nach erfolgter Einstellung der Röhrenendpunkte massen wir dann die Entfernung derselben von den zugehörigen Gelenkmittelpunkten. Auch diese Messung kann durch Abtasten der Projection der Gelenkmittelpunkte auf die Oberfläche in sagittaler Richtung und durch Vergleich mit einem Präparat von denselben Dimensionen mit ziemlicher Genauigkeit ausgeführt werden. Diese Angaben genügen, um hinterher aus den ermittelten räumlichen Coordinaten der den beiden Hüftgelenken bezüglich Schultergelenken zugeordneten Punkte der GEISSLER'schen Röhren die Coordinaten der Mittelpunkte der Hüft- bezüglich Schultergelenke auf dem Wege der Construction oder der Rechnung abzuleiten. Es kommt dann, geometrisch gesprochen, nur darauf hinaus, zwei Punkte, deren Lage im Raume man kennt, durch eine gerade Linie zu verbinden, und auf dieser Verbindungslinie auf jeder Seite vom Endpunkte aus eine bekannte Länge abzutragen.

Um nicht für's Erste die Untersuchung allzusehr zu compliciren, begnügten wir uns damit, an den Ellbogen-, Knie- und Fussgelenken die entsprechenden Punkte der GEISSLER'schen Röhren so einzustellen, dass sie bei gerader Haltung des Körpers mit den zugehörigen Gelenkmittelpunkten in einer horizontalen, zur Gangebene senkrechten Linie lagen, und massen dann ihre Entfernung von den Gelenkmittelpunkten. Genau genommen reicht diese Methode nicht vollkommen aus, um aus der Lage des Röhrenpunktes den Ort des zugeordneten Gelenkmittelpunktes zu bestimmen. Das würde nur dann der Fall sein, wenn man sicher wäre, dass bei allen Stellungen, welche der menschliche Körper während des Gehens einnimmt, diese Verbindungslinien von Röhrenpunkt und entsprechendem Gelenkmittelpunkt eine zur Gangebene senkrechte Richtung beibehalten und sich nur parallel im Raume verschieben. Dies findet nun beim Ge [illegible] hlich

nur annähernd statt. Die Abweichungen dieser Linie von ihrer Richtung bei gerader Haltung werden jedoch nicht viel grösser ausfallen als z. B. die Richtungsänderungen, welche die Beugeaxe im Ellbogengelenk während der Beugung relativ zu den beiden durch das Gelenk verbundenen Knochen erfährt. Wie man aber diese Axenschwankungen bei der Untersuchung des Ganges unberücksichtigt lassen und daher die Existenz einer zu den beiden Knochen festen Axe annehmen muss, um das Problem überhaupt einmal greifbar zu machen, so ist es auch geboten, zunächst von den Schwankungen der Verbindungslinien von Röhrenpunkten und Gelenkmittelpunkten abzusehen. Bei Bewegungen des menschlichen Körpers, welche nicht, wie beim Gehen, mit Bevorzugung einer bestimmten Richtung, der Gangrichtung, geschehen, muss man dagegen eine Einrichtung treffen, welche die genaue Bestimmung der Lage des Gelenkmittelpunktes ermöglicht. Man wird zu diesem Zwecke noch eine zweite Geissler'sche Röhre an der Innenseite der Extremität anzubringen und das Ende derselben in die Verlängerung der Gelenkaxe nach innen zu stellen haben. Dann erhält man wieder wie bei den Hüft- und Schultergelenken die Coordinaten zweier Punkte, auf deren Verbindungslinie in bestimmter Entfernung von dem einen Punkte der betreffende Gelenkmittelpunkt liegt. Wenn die Anbringung einer Geissler'schen Röhre an der Innenseite die freie Bewegung des Gliedes stören würde, so kann man auch die beiden Geissler'schen Röhrenpunkte so anbringen, dass sie auf einer in anderer Richtung, z. B. von vorn nach hinten, durch den Gelenkmittelpunkt hindurchgehenden Linie liegen. Bei Specialuntersuchungen über die Bewegungen in einem einzigen Gelenk wird man sicher mit Vortheil von dieser Einrichtung Gebrauch machen. Für die Untersuchung des menschlichen Ganges würde der Gewinn, welchen man mit derselben erzielt, in Anbetracht der sonstigen, vorläufig unvermeidlichen Fehlerquellen, sehr gering sein.

Die Kopfröhre befand sich in der Medianebene etwas vor dem Scheitelpunkte des Kopfes, und die Fussröhre war so angebracht worden, dass ihr vorderes Ende nahezu bis an die Fussspitze und di[e] Fusslängsaxe heranreichte. Auf der letzteren war, wie bei de[n] meisten anderen Röhren, der Schwerpunkt des Gliedes, d. h. al[so] des Fusses allein, markirt worden. —

Um die einzelnen Bewegungsphasen in genau gleichen Zeitintervallen zu erhalten, wurde die Unterbrechung des primären Stromes im Inductionsapparat durch eine grosse Stimmgabel regulirt. Bei der photographischen Registrirung der Bewegung im Kniegelenk hatten wir seiner Zeit die gewöhnliche Unterbrechungsvorrichtung beibehalten, weil es uns bei jener Untersuchung nur um den geometrischen Vorgang der relativen Bewegung des Unterschenkels gegen den Oberschenkel zu thun war, und wir keine Rücksicht auf die Geschwindigkeit nahmen, mit welcher diese Bewegung vor sich ging. Bei der Analysirung der Gehbewegung des Menschen hatten wir uns dagegen das Ziel gesteckt, dieselbe nicht nur in Bezug auf die räumlichen Verhältnisse, sondern auch in Rücksicht auf die zeitlichen Verhältnisse so genau zu bestimmen, dass man aus den Ergebnissen unserer Messung nicht allein die räumlichen Bewegungscurven der einzelnen Gelenkmittelpunkte, sondern auch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ableiten könne, mit denen diese Punkte ihre Bahn durchlaufen. Deshalb mussten wir jetzt auf eine genaue Registrirung der Zeit bedacht sein.

Die Anzahl der Schwingungen, welche die Stimmgabel bei ihrer Einschaltung in den primären Stromkreis ausführte, war natürlich kleiner als die Schwingungszahl, welche ihr bei vollständig freier Beweglichkeit zukommt. Wir bestimmten dieselbe durch Aufzeichnen der Schwingungen auf die rotirende Trommel eines Kymographions, indem wir gleichzeitig durch ein Secundenpendel die verflossene Zeit registrieren liessen. Diese Messung wurde kurz nach den Versuchen gemacht, während die Stimmgabel in den primären und die sämmtlichen Geissler'schen Röhren noch in den secundären Stromkreis eingeschaltet waren. Es stellte sich heraus, dass die Stimmgabel in 10 Secunden 260,9 Schwingungen ausführte, so dass also die Schwingungszahl 26,09 betrug. Daraus folgt, dass zwischen zwei aufeinander folgenden, durch die Photographie aufgezeichneten Bewegungsphasen eine Zeit von $\frac{1}{26,09}$ oder 0,0383 Secunde, und allgemein zwischen der ersten und n-ten einer Reihe auf einanderfolgender Bewegungsphasen $\frac{n-1}{26,09}$ Secunden verflossen.

Um die Beziehung der Bewegungscurven auf ein räumliches

des räumlichen Coordinatensystems, die Z-Axe, wurde daher durch die Verticale von O gebildet. Der von O nach oben zeigende Theil stellte die positive Z-Axe dar. Die vier photographischen Apparate waren nun so aufgestellt worden, dass ihre optischen Axen sich alle in der durch O gelegten Horizontalebene befanden, und dass

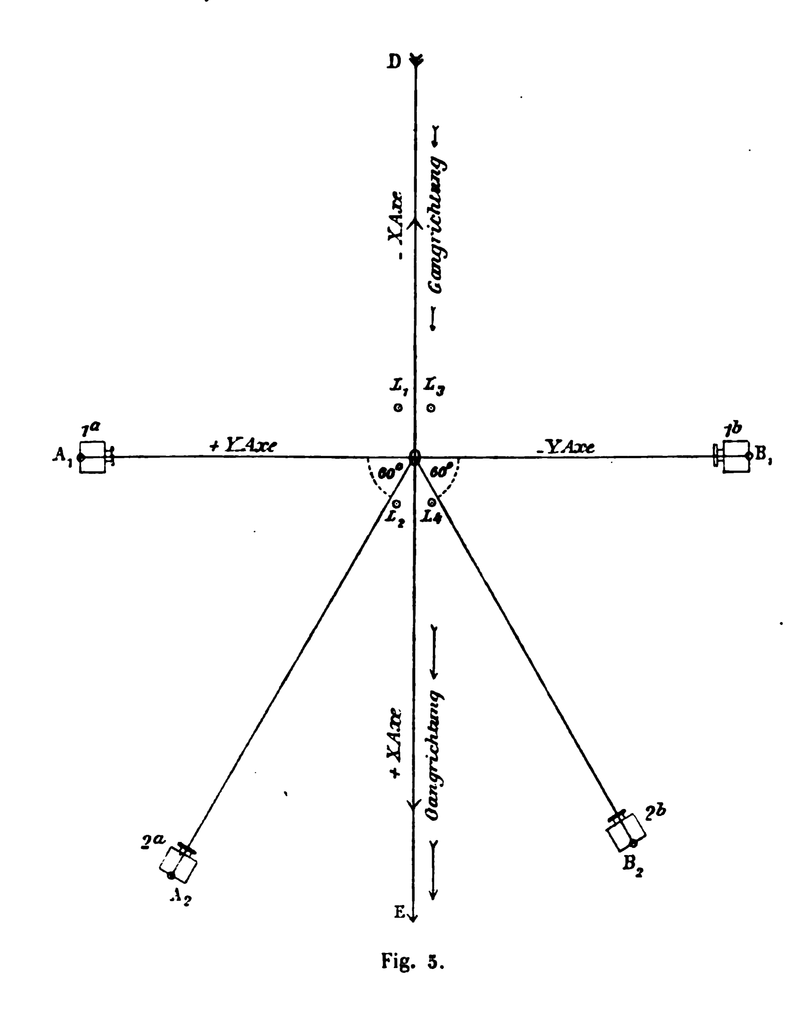


Fig. 5.

sie sich in ein und demselben Punkte, nämlich im Coordinatenanfangspunkte O, kreuzten. Die Apparate wurden zu dem Zwecke alle so hoch gestellt, dass die in der Figur mit A_1, B_1, A_2 und B_2 bezeichneten Mitten der empfindlichen Platten 90 cm über dem Fussboden sich befanden, und sie wurden vor dem Versuch so eingestellt, dass in diesen Mittelpunkten der Platten ein scharfes Bild des auf der Coordinatentafel besonders markierten Anfangspunktes O erschien. Die

Entfernungen, in welchen sich die vier Punkte A, B vom Coordinatenanfangspunkte befanden, waren

$$\overline{OA_1} = 438\,\text{cm},\ \overline{OB_1} = 446\,\text{cm},\ \overline{OA_2} = 634{,}5\,\text{cm und } \overline{OB_2} = 588{,}5\,\text{cm}.$$

Die vier photographischen Apparate und die durch sie gleichzeitig gewonnenen vier Aufnahmen desselben Bewegungsvorganges wurden bezüglich mit den Nummern 1^a, 1^b, 2^a und 2^b versehen, wie dies auch in Fig. 5 geschehen ist. Die Apparate 1^a und 2^a lieferten die beiden Centralprojectionen für die Punkte der rechten Körperseite und entsprechend die Apparate 1^b und 2^b die für die linke Seite. Von dem unpaaren Röhrenpunkte am Kopf erhielt man von beiden Seiten brauchbare Projectionen. Daraus ergab sich dann später ein werthvolles Mittel, sich über die bei den Messungen erzielte Genauigkeit zu orientieren.

Das Einstellen der photographischen Apparate und das Entwickeln der Bilder hatte Herr Photograph SCHLEICHER in Leipzig gütigst übernommen. Wir sind demselben zu grossem Danke verpflichtet, dass er uns in so aufopfernder Weise sein Können und seine Zeit für die Vorversuche und die des Nachts ausgeführten entscheidenden Versuche zur Verfügung gestellt hat.

Auf Tafel II finden sich die vier zu gleicher Zeit im halbdunklen Saal aufgenommenen Ansichten niedergelegt, welche das mit den GEISSLER'schen Röhren versehene Versuchsindividuum in der Ruhe von den vier verschiedenen Standpunkten der Apparate aus darbot. Der Mann stand dabei in der Mitte der vier Lagerpunkte, so dass seine Längsaxe ungefähr mit der Z-Axe des Coordinatensystems zusammenfiel, und hatte das Gesicht nach der Richtung des Ganges gewendet. Nach der Aufnahme des stehenden Mannes ist auf alle vier Platten noch die an ihren Platz gestellte und von hinten mit Magnesiumlicht beleuchtete Coordinatentafel photographiert worden, und zwar in der Weise, dass dieselbe jedesmal auf der Richtung der optischen Axe des betreffenden Apparates senkrecht stand. Um durch das Coordinatennetz nicht zu viel zu verdecken, war dabei, wie schon früher bei der Kniegelenkuntersuchung, der grösste Theil der Tafel mit schwarzem Papier überkleidet worden, so dass nur in der Mitte ein kleines quadratisches Feld mit dem Coordinatenanfangspunkt im Innern, und am Rande ein 5 bis 6 cm breiter Streifen zu sehen ist. Wäh-

rend die Bilder des Coordinatennetzes, welche die Nummern 1^b, 2^a und 2^b tragen, scharf sind, findet man das Tafelbild von Nummer 1^a zum Theil verwischt. Dies liegt nicht etwa an einer weniger scharfen Einstellung des Apparates 1^a, sondern an einem unglücklichen Versehen, welches bei der Aufnahme passiert und hinterher nicht mehr gut zu machen war. Es war nämlich dazu eine Platte eingeschoben worden, welche schon früher einmal bei einem der zahlreichen Vorversuche zur Aufnahme einer Serie von Bewegungsphasen verwendet worden war. Daher finden sich auf diesem Bilde, wenn auch etwas abgeblasst, gleichzeitig die Serien eines Gangversuches und zum zweiten Mal die Coordinatentafel verzeichnet. Vielleicht hat dieser unglückliche Zufall auch seine gute Seite. Ist er doch geeignet, besser als es eine Beschreibung vermag, die Serienbilder verständlich zu machen! Diesem Zwecke dienen überhaupt ausschliesslich die auf Tafel II niedergelegten Aufnahmen des stehenden Mannes. Sie sollen es erleichtern, sich in den Serienbildern, namentlich in den mit 2^a und 2^b bezeichneten, auf welchen zum Theil auch die Röhren der anderen Seite zu sehen sind, zurecht zu finden. Für die Messung selbst sind sie nicht weiter verwendet worden.

Was nun die entscheidenden Versuche selbst anlangt, so wurden dieselben im verdunkelten Saal angestellt. Da wir keine Vorrichtung hatten, den ganzen Präparirsaal zu verdunkeln, so mussten wir, wie schon erwähnt, die Nacht zu unseren Versuchen zu Hülfe nehmen. Es war im Hochsommer. Daher wurde es nie so dunkel, dass das Versuchsindividuum den Weg, den es vorher sehr oft gemacht hatte, nicht ganz sicher wie am Tage hätte zurücklegen können. Erforderlichenfalls erleuchteten wir den Saal durch eine Gasflamme. In Folge der Dunkelheit konnten wir alle vier photographischen Apparate öffnen, ohne fürchten zu müssen, dass die lichtempfindlichen Platten angegriffen würden.

Nachdem noch einmal die richtige Stellung der Geissler'schen Röhren controliert worden war, setzte sich nun das Versuchsindividuum von einer ungefähr noch 5 Meter vom Coordinatenanfangspunkt entfernten Stelle aus in die Bewegung des natürlichen, nicht zu langsamen Ganges. Nachdem er ca. fünf Schritte gemacht hatte, wurde der Ruhmkorff'sche Inductionsapparat geschlossen und nach ungefähr weiteren drei bis vier Schritten wieder geöffnet. Das Versuchs-

individuum setzte aber unbekümmert seinen Gang noch einige Schritte fort. Die Ausgangsstelle war nun so gewählt worden, dass der Mann in der Mitte der photographierten Schritte gerade die *Z*-Axe des räumlichen Coordinatensystems passierte, damit die zur Messung herausgegriffenen Schritte auch durch die Photographie registriert werden konnten. Darauf wurden nun zunächst die vier photographischen Apparate verschlossen, der Saal ganz erhellt, und der Rahmen mit der Coordinatentafel, welcher natürlich während des Versuchs abseits gestanden hatte, an seinen Platz gebracht, der ihm durch die vier in den Fussboden eingelassenen Lager vorgeschrieben war. Die Coordinatentafel wurde dann zu einer der vier optischen Axen senkrecht eingestellt und, nachdem der betreffende photographische Apparat wieder geöffnet worden war, mit Hülfe einer hinter der Tafel vorbeigeführten Magnesiumlampe photographiert. Dann wurde der erste Apparat wieder verschlossen und ein zweiter geöffnet, nachdem die Tafel zu der optischen Axe dieses senkrecht eingestellt worden war. Dies Verfahren wurde fortgesetzt, bis das Coordinatennetz auf allen vier Platten durch die Photographie eingetragen worden war.

Von den vielen, in verschiedenen Nächten aufgenommenen Serien wurden schliesslich drei, in der Nacht vom 24. auf den 25. Juli des Jahres 1891 gewonnene zur weiteren Discussion herausgegriffen. Die Versuche, welchen die beiden ersten Serien entstammen, sind in ganz gleicher Weise ohne Belastung des Mannes angestellt worden. Um den Einfluss einer verhältnissmässig grossen Belastung auf die Bewegungen des Gehens zu ermitteln, war vor dem dritten Versuche der Mann mit dem vom Königlichen 8. Infanterieregiment Prinz Johann Georg Nr. 107 gütigst zur Verfügung gestellten, vorschriftsmässig gepackten Tornister, den drei mit scharfen Patronen gefüllten Patronentaschen und dem Gewehr 88 in der Haltung »Gewehr über« belastet worden. Der Helm musste in Wegfall kommen, da sonst das Kopfröhrchen nicht hätte seine Stellung beibehalten können. Die Serienaufnahmen und die zugehörigen Coordinatentabellen, die daraus gewonnenen rechtwinkligen Projectionen u. s. w. sind stets zur Unterscheidung mit der Bemerkung I. Versuch, II. Versuch oder III. Versuch (mit Belastung) versehen worden.

Die zum I. Versuch gehörenden Serienaufnahmen sind auf

Tafel III und IV, die dem II. bezüglich III. Versuche entsprechenden auf den Tafeln V und VI bezüglich VII und VIII niedergelegt worden.

Ableitung der räumlichen rechtwinkligen Coordinaten aus den Serienbildern.

Durch die zweiseitige Chronophotographie sind die Bewegungscurven der einzelnen, den verschiedenen Gelenken des menschlichen Körpers zugeordneten Punkte der Geissler'schen Röhren auf zwei durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Verticalebenen projiciert worden. Diese Ebenen sind senkrecht zu den optischen Axen der beiden photographischen Apparate; sie waren bei dem Versuch durch die Vorderfläche der Coordinatentafel festgelegt. Die den zusammengehörenden Apparaten 1^a und 2^a entsprechenden Projectionsebenen sollen mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die zu den beiden anderen Apparaten, 1^b und 2^b, gehörenden mit $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ bezeichnet sein. Infolge der Orientierung der Apparate bildete die Ebene $\mathfrak{B}_1$ die Rückseite von $\mathfrak{A}_1$, während die beiden Ebenen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ um einen Winkel von 60° zu einander geneigt waren. Die vier zusammengehörenden Aufnahmen eines jeden Versuches liefern verkleinerte Bilder dieser Projectionsebenen mit den in ihnen liegenden Projectionscurven.

Um die Lage der einzelnen Punkte dieser Projectionscurven genau feststellen zu können, ist es nöthig, in jeder Projectionsebene ein Coordinatensystem einzuführen. Es wurde ein rechtwinkliges Coordinatensystem gewählt, dessen Anfangspunkt mit dem in allen vier Projectionsebenen gelegenen Coordinatenanfangspunkt O des räumlichen Coordinatensystems zusammenfiel, und dessen eine Axe horizontal, die andere vertical gerichtet war. Die horizontalen Coordinaten der Ebenen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ wurden mit ξ_1 und die verticalen mit ζ_1 bezeichnet. In beiden wurden die in der Gangrichtung verlaufenden ξ_1-Coordinaten, welche dieselbe Axe wie die räumlichen x-Coordinaten besassen, und die nach oben gerichteten ζ_1-Coordinaten, deren Axe mit der Axe der z-Coordinaten zusammenfiel, positiv und daher die entgegengesetzt gerichteten negativ gerechnet. Die

horizontalen Coordinaten der Ebenen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ wurden mit η_2, und die verticalen, welche keineswegs mit den ζ_1 identisch sind, durch ζ_2 bezeichnet. Als positive Richtung der η_2-Coordinaten wurde in $\mathfrak{A}_2$ die Richtung nach links, in $\mathfrak{B}_2$ dagegen die nach rechts genommen. Endlich erhielten in beiden Ebenen wieder die nach oben gerichteten ζ_2-Coordinaten das positive Vorzeichen.

Was nun zunächst die Ableitung der räumlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes P der rechten Körperseite anlangt, so müssen sich dieselben aus den ebenen Coordinatenpaaren ξ_1, ζ_1 und η_2, ζ_2 der beiden in den Ebenen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gelegenen Projectionspunkte P_1 und P_2 berechnen lassen.

In Figur 6 (Seite 196) mögen K_1 und K_2 die den Projectionsebenen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zunächst liegenden Knotenpunkte der optischen Systeme der beiden photographischen Apparate 1[a] und 2[a] darstellen. Dann entstehen die Projectionspunkte P_1 und P_2 eines Punktes P durch den Schnitt der beiden von K_1 und K_2 aus durch den Punkt P hindurchgehenden Projectionsstrahlen mit den Ebenen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Die ebenen Coordinaten ξ_1, ζ_1 von P_1 sind in der Figur durch die beiden Strecken $\overline{OQ_1}$ und $\overline{Q_1P_1}$ und die ebenen Coordinaten η_2, ζ_2 von P_2 durch die Strecken $\overline{OQ_2}$ und $\overline{Q_2P_2}$ dargestellt. Denkt man sich durch O die (in der Figur nicht gezeichnete) Horizontalebene gelegt, welche die XY-Ebene des räumlichen Coordinatensystems darstellt, so wird das Loth PQ von P auf diese Ebene die nach oben positiv zu rechnende z-Coordinate, und das Loth QR_1 von Q auf die in $\mathfrak{A}_1$ liegende X-Axe die in der Richtung R_1Q positiv zu rechnende y-Coordinate, und endlich der durch den Fusspunkt R_1 dieses letzteren Lothes auf der X-Axe gebildete Abschnitt OR_1 die x-Coordinate des Punktes P darstellen. Figur 7 (Seite 197) stellt die durch O gehende Horizontalebene von oben gesehen dar. In dieser Ebene liegen die ersten Knotenpunkte K_1, K_2 und die optischen Axen OK_1 und OK_2 der beiden photographischen Apparate. Die optische Axe OK_1 fällt mit der in der Richtung OK_1 positiv zu rechnenden Y-Axe des räumlichen Coordinatensystems zusammen, während die optische Axe OK_2 mit der X-Axe einen Winkel α bildet, welcher bei unserer Aufstellung der Apparte 30^0 betrug. Mit der X-Axe fällt die Axe der ξ_1-Coordinaten der Projectionsebene $\mathfrak{A}_1$ zusammen, während die in $\mathfrak{A}_2$ gelegene ebenfalls horizon-

tale Axe der η_2 mit der Y-Axe den Winkel α (30°) bildet. Die Strahlen K_1QQ_1 und K_2QQ_2 stellen die rechtwinkligen Projectionen der beiden Strahlen K_1PP_1 und K_2PP_2 auf die Horizontalebene dar. Sie treffen die Axe der ξ_1- bezüglich η_2-Coordinaten in den beiden Punkten Q_1 und Q_2, welche auf diesen Axen die ξ_1- und η_2-Co-

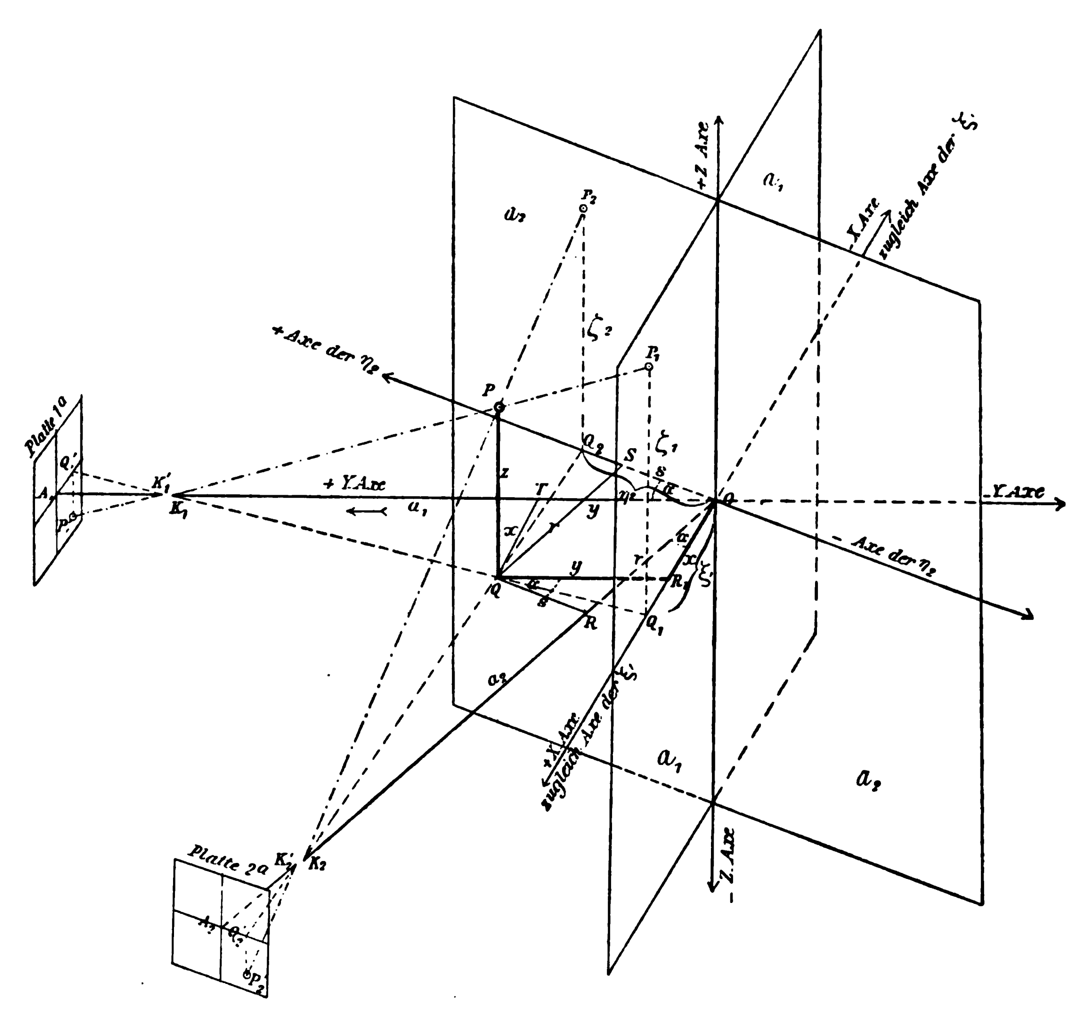


Fig. 6.

ordinaten ausschneiden. Demnach finden sich in der Figur 7 nicht nur die räumlichen Coordinaten x, y, sondern auch die ebenen Coordinaten ξ_1 und η_2 unverkürzt vor. Fällt man endlich von Q auf die optische Axe OK_2 und die Axe der η_2-Coordinaten Lothe, so schneiden dieselben auf den Axen Stücke $\overline{OR}$ und $\overline{OS}$ ab, welche kurz mit r und s bezeichnet sein mögen. Da $QROS$ ein Rechteck

ist, so besitzt auch QS die Länge r und QR die Länge s. Da ferner $QR \perp OK_2$ und $QR_1 \perp OQ_1$, so bilden die Geraden QR und QR_1 ebenfalls den Winkel α mit einander. Fällt man endlich noch von Q das Loth QT auf OK_1, so entsteht ein Rechteck QR_1OT, und es ist in Folge dessen $\overline{TQ} = x$ und $\overline{OT} = y$.

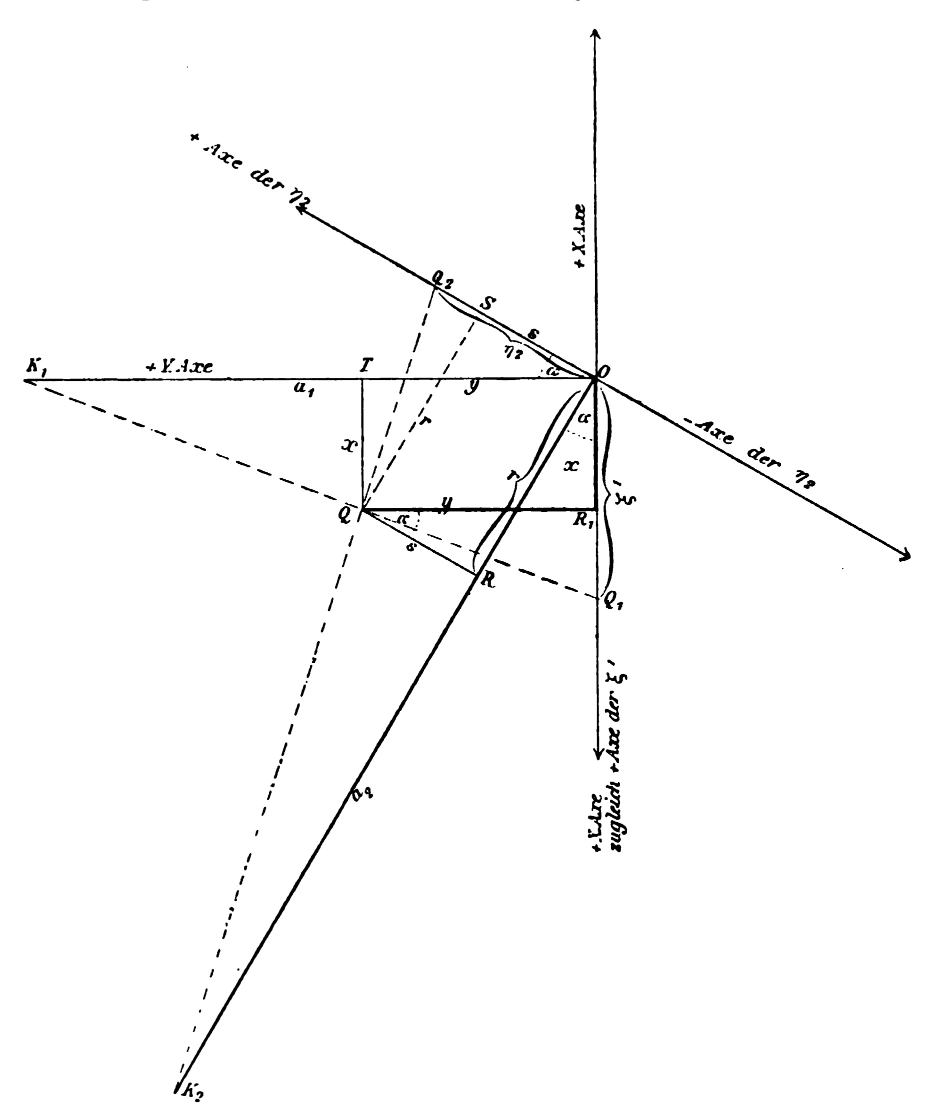


Fig. 7.

Aus Figur 7 erkennt man nun die Richtigkeit der Proportionen:

$$\overline{OQ_1} : \overline{TQ} = \overline{OK_1} : \overline{TK_1} \quad \text{und}$$
$$\overline{OQ_2} : \overline{RQ} = \overline{OK_2} : \overline{RK_2}\,.$$

Bezeichnet man die Abstände $\overline{OK_1}$ und $\overline{OK_2}$ der Knotenpunkte K_1, K_2 von O mit a_1 und a_2, so kann man diese beiden Proportionen, wie man leicht bestätigt, auch in der Form schreiben:

$$\xi_1 : x = a_1 : (a_1 - y) \tag{1}$$

$$\eta_2 : s = a_2 : (a_2 - r)\,. \tag{2}$$

Ferner folgen aus Figur 6 die Proportionen:

$$\overline{Q_1P_1} : \overline{QP} = \overline{Q_1K_1} : \overline{QK_1}$$

$$\overline{Q_2P_2} : \overline{QP} = \overline{Q_2K_2} : \overline{QK_2}\,.$$

Da nach Figur 7

$$\overline{Q_1K_1} : \overline{QK_1} = \overline{OK_1} : \overline{TK_1}$$

$$\overline{Q_2K_2} : \overline{QK_2} = \overline{OK_2} : \overline{RK_2}\,,$$

so folgen aus den obigen Proportionen ferner die neuen:

$$\overline{Q_1P_1} : \overline{QP} = \overline{OK_1} : \overline{TK_1}$$

$$\overline{Q_2P_2} : \overline{QP} = \overline{OK_2} : \overline{RK_2}\,,$$

welche sich in der Form schreiben lassen:

$$\zeta_1 : z = a_1 : (a_1 - y) \tag{3}$$

$$\zeta_2 : z = a_2 : (a_2 - r)\,. \tag{4}$$

Denkt man sich in Figur 7 den aus x und y zusammengesetzten gebrochenen Linienzug OR_1Q einmal auf die Richtung der optischen Axe OK_2 und das andere Mal auf die Richtung der Axe der η_2-Coordinaten projiciert, so erhält man r und s durch x, y und den Winkel α ausgedrückt, denn es sind r und s die Projectionen der Schlussstrecke OQ dieses gebrochenen Linienzuges auf die genannten beiden Richtungen. Man erhält nämlich, wie man leicht bestätigt:

$$r = x \cos \alpha + y \sin \alpha \qquad \text{und}$$

$$s = y \cos \alpha - x \sin \alpha\,.$$

Setzt man diese Werthe in die Proportionen (2) und (4) ein, so folgt aus diesen:

$$\eta_2 : (y \cos \alpha - x \sin \alpha) = a_2 : (a_2 - x \cos \alpha - y \sin \alpha) \tag{5}$$

$$\zeta_2 : z = a_2 : (a_2 - x \cos \alpha - y \sin \alpha)\,. \tag{6}$$

Die Proportionen (4) und (5) dienen zur Bestimmung von x und y und die Proportionen (3) und (6) liefern zwei sich gegenseitig controlierende Werthe der Coordinate z.

Es ergiebt sich durch Auflösen der betreffenden Gleichungen:

$$x = \frac{a_1 a_2 \cos\alpha \,.\, \xi_1 - (a_2 - a_1 \sin\alpha) \,.\, \xi_1 \eta_2}{a_1 a_2 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha \,.\, \xi_1 + a_1 \sin\alpha \,.\, \eta_2 - \cos\alpha \,.\, \xi_1 \eta_2}, \qquad (7)$$

$$y = \frac{a_1 a_2 \sin\alpha \,.\, \xi_1 + a_1 a_2 \,.\, \eta_2 - a_1 \cos\alpha \,.\, \xi_1 \eta_2}{a_1 a_2 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha \,.\, \xi_1 + a_1 \sin\alpha \,.\, \eta_2 - \cos\alpha \,.\, \xi_1 \eta_2}, \qquad (8)$$

$$z = \frac{(a_1 - y) \,.\, \zeta_1}{a_1} \quad \text{und} \quad z = \frac{(a_2 - x \cos\alpha - y \sin\alpha) \,.\, \zeta_2}{a_2}. \qquad (9)$$

In den Ausdrücken für z kommen die beiden anderen Coordinaten x und y vor. Um auch z durch die ebenen Coordinaten ξ_1, η_2, ζ_1 und ζ_2 allein auszudrücken, müsste man die Werthe von x und y in die Formeln für z einsetzen. Es ist zweckmässiger, dies nicht zu thun und infolge dessen die Berechnung von z erst vorzunehmen, nachdem die Werthe von x und y mit Hülfe der ersten Formeln gefunden worden sind. Alle anderen in den Formeln auftretenden Grössen, also a_1, a_2 und der Winkel α sind Constante, welche vor der Berechnung der drei räumlichen Coordinaten x, y, z ein für allemal bestimmt werden müssen.

Diese Formeln gelten zunächst nur für die Punkte der rechten Körperseite. Sie bringen die räumlichen Coordinaten x, y, z in Abhängigkeit von den aus den Photographien 1^a und 2^a durch directe Messung zu gewinnenden ebenen Coordinatenpaaren ξ_1, ζ_1 und η_2, ζ_2. Dieselben können aber auch auf die Punkte der linken Körperseite angewendet werden. Es ist dabei nur zu beachten, dass nach den früheren Vereinbarungen von den auf den Photographien 1^b und 2^b zu messenden Coordinaten ξ_1, ζ_1, η_2 und ζ_2 die Coordinate ξ_1 auf 1^b nach links und η_2 auf 2^b nach rechts positiv zu rechnen ist, während für die aus 1^a und 2^a abzuleitenden ξ_1- und η_2-Coordinaten gerade das Umgekehrte der Fall war. Berücksichtigt man dies, so erhält man durch die erste Formel den positiven Werth von x und durch die dritten Formeln den positiven Werth von z auch für die linke Körperseite; dagegen muss man nach der Berechnung mittelst der zweiten Formel erst das Vorzeichen umkehren, um den positiven Werth von y zu gewinnen.

Was nun die drei Constanten a_1, a_2 und α anlangt, so ist der Winkel α ohne Weiteres durch die verwendete Aufstellung der photographischen Apparate gegeben; derselbe hat eine Grösse von 30^0. Zur Bestimmung der beiden anderen Grössen a_1 und a_2, welche die Entfernung der den Projectionsebenen zunächst liegenden Knotenpunkte K_1, K_2 von dem Coordinatenanfangspunkt O darstellen, muss man etwas näher auf die optischen Verhältnisse der Linsensysteme eingehen.

Ist bei einem optischen System, welches aus drei oder mehr durch sphärische Flächen begrenzten Mitteln besteht, das erste und letzte Mittel dasselbe, so fallen bekanntlich die Knotenpunkte mit zwei anderen für das System wichtigen Punkten, den Hauptpunkten, zusammen. Die Knotenpunkte übernehmen daher zugleich die Eigenschaften dieser Hauptpunkte. Ausserdem werden die beiden Brennweiten, d. h. die Entfernungen der beiden Brennpunkte von ihren Hauptpunkten, gleich.

Dieser Fall tritt nun stets bei dem Linsensystem eines photographischen Apparates ein, denn das erste und letzte Medium ist die Luft.

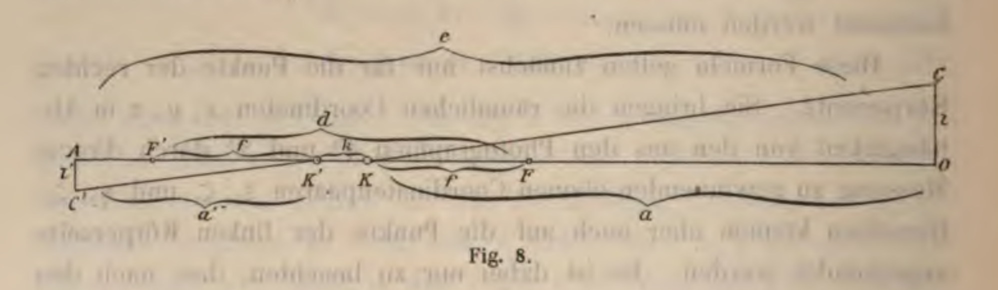


Fig. 8.

In Figur 8 seien K und K' die beiden Knotenpunkte und F, F' die beiden Brennpunkte des optischen Systems eines der photographischen Apparate. O sei der Coordinatenanfangspunkt und A sein Bild in der Mitte der empfindlichen Platte. Bezieht man die Lage der Brennpunkte und der beiden zusammengehörenden Punkte O und A auf die Knotenpunkte, so werden die Beziehungen zwischen ihren Entfernungen aus dem Grunde besonders einfach, weil die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammenfallen. Bezeichnet man den Abstand KO mit a, den Abstand $K'A$ mit a', die beiden gleichen

Brennweiten KF und $K'F'$ mit f, so besteht zwischen diesen drei Grössen die Relation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} . \tag{10}$$

Ist ferner C ein Punkt der Coordinatentafel und C' sein Bild auf der photographischen Platte, so wird der Strahl KC dem Strahl $K'C'$ parallel laufen, infolge der früher erwähnten Eigenschaft der Knotenpunkte. Besitzt nun die Strecke $\overline{OC}$ die Länge l und ihr Bild $\overline{AC'}$ die Länge l', so wird ferner zwischen diesen beiden Längen und den Grössen a, a' die Beziehung bestehen

$$\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'} . \tag{11}$$

Endlich sei e die Entfernung $\overline{OA}$ der photographischen Platte von der Coordinatentafel, k der Abstand der beiden Knotenpunkte und d der Abstand der beiden Brennpunkte, dann bestehen zwischen diesen drei Längen und den Grössen a, a' und f folgende aus der Figur 8 direct abzulesende Beziehungen:

$$a + a' + k = e , \tag{12}$$

$$2f + k = d . \tag{13}$$

Von den in den Relationen (10) bis (13) auftretenden acht Grössen konnten wir nun vier durch directe Messung bestimmen, nämlich l, l', e und d.

Was insbesondere die Messung des Abstandes d der beiden Brennpunkte anlangt, so wurde dieselbe in folgender Weise für alle vier verwendeten photographischen Apparate vorgenommen. Es wurde der Objectivkopf abgenommen und so den directen Sonnenstrahlen ausgesetzt, dass die letzteren in der Richtung der optischen Axe auf der einen Seite einfielen. Dieselben convergieren dann bei ihrem Austritt auf der anderen Seite nach dem einen Brennpunkt hin, dessen Lage und Entfernung von irgend einer am Objectivkopf angebrachten Marke sich mittelst eines zur optischen Axe senkrecht gestellten und in der Richtung dieser Axe verschiebbaren Papierschirmes mit grosser Annäherung bestimmen liess. Darauf wurde der Objectivkopf herumgedreht, so dass nunmehr die Sonnenstrahlen auf der anderen Seite parallel der optischen Axe einfielen und bei ihrem Austritt durch den anderen Brennpunkt hindurchgingen. Es liess

sich sonach leicht auch die Entfernung dieses zweiten Brennpunktes von der schon vorher verwendeten Marke am Objectivkopf bestimmen. Genau genommen wurden dabei nicht die wirklichen Abstände der Brennpunkte von der Marke, sondern die Projectionen derselben auf die optische Axe gemessen. Die Summe beider Abstände ist dann die Grösse d. Die Messung an den Objectivköpfen der vier photographischen Apparate ergab für Apparat 1^a $d = 52$ cm, für 2^a $d = 69$ cm, für 1^b $d = 55{,}5$ cm und für 2^b $d = 67$ cm.

Die Entfernung e der photographischen Platte von der Coordinatentafel war, wie schon früher angegeben, gleich nach der Aufstellung der Apparate gemessen worden. Was endlich die beiden Grössen l und l' anlangt, so kommt es, wie die auf Seite 203 befindliche Formel (17) für a zeigt, nur auf das Verhältniss derselben, nicht auf ihre absolute Länge an. Das Verhältniss $\frac{l}{l'}$ ist dasjenige, in welchem eine jede Länge auf der Coordinatentafel grösser ist, als ihr Bild auf der photographischen Platte. Es ist daher nicht nöthig, dass man zur Bestimmung von l und l' eine vom Coordinatenanfangspunkt O ausgehende Strecke und ihr Bild verwendet, sondern man kann irgend welche Länge auf der Coordinatentafel herausgreifen und sowohl sie selbst als ihr Bild messen. Dadurch ist man in der Lage, eine möglichst grosse Strecke l auf der Tafel zu wählen, was für die Genauigkeit der Bestimmung von Vortheil ist.

Für unsere Untersuchung hatte nun allein die Entfernung a des Knotenpunktes K vom Coordinatenanfangspunkt O Bedeutung. Dieselbe lässt sich durch die vier Grössen l, l', e und d in folgender Weise ausdrücken. Aus (10) und (11) folgt durch Elimination von a'

$$\frac{l+l'}{l'} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{f} \tag{14}$$

und aus (11), (12) und (13) durch Elimination von a' und k

$$\frac{l+l'}{l} a - 2f = e - d\,. \tag{15}$$

Eliminiert man noch aus (14) und (15) die Brennweite f, so erhält man

$$\frac{l+l'}{l} a - \frac{2l'}{l+l'} a = e - d\,,$$

und hieraus folgt endlich

$$a = \frac{l(l+l')}{l^2+l'^2}(e-d). \tag{16}$$

Dass der Ausdruck für a in der That nur von dem Verhältniss der beiden Grössen l und l' abhängt, erkennt man, wenn man Zähler und Nenner desselben durch l'^2 dividirt. Bezeichnet man das Verhältniss $\frac{l}{l'}$ kurz mit λ, so ergiebt sich dann

$$a = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda^2+1}(e-d). \tag{17}$$

Bei der Kniegelenkarbeit hatten wir insofern eine Vereinfachung in der Bestimmung von a eintreten lassen, als wir den Abstand der beiden Knotenpunkte vernachlässigten und die letzteren in einen einzigen Punkt, den optischen Mittelpunkt, zusammenfallen liessen. Es dürfte hier der Ort sein, zu zeigen, wie gering der Fehler ist, den man dadurch in die Bestimmung von a hereinbringt. Denkt man sich in Figur 8 die beiden Knotenpunkte K und K' zusammengerückt, so erhält man neben der dann immer noch geltenden Relation (11)

$$\frac{l}{a} = \frac{l'}{a'}$$

die nur annähernd richtige Beziehung

$$a + a' = e.$$

Aus beiden folgt durch Elimination von a' die bei jener Untersuchung verwendete Näherungsformel:

$$a = \frac{l}{l+l'} \cdot e \quad \text{oder} \quad a = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot e.$$

Bei dem I. Versuch hatten sich nun beispielsweise für die Grössen l, l', e und d die Werthe herausgestellt

$l = 86$ cm, $l' = 5{,}8979$[1] cm, $e = 438$ cm und $d = 52$ cm.

Setzt man diese Werthe in die genaue Formel (16) ein, so ergiebt sich für a der Werth 410,54 cm. Verwendet man dagegen die zuletzt angeführte Näherungsformel, so liefert die Rechnung den Werth

1) Mittelwerth aus 10 Messungen.

409,89 cm für a. Es ist also nur eine Differenz von 0,65 cm zwischen den beiden Werthen vorhanden. Beachtet man, dass die Grösse a eine Länge von mehr als 4 m besitzt, so erkennt man daraus, dass man berechtigt ist, die Näherungsformel an Stelle der exacten zu verwenden, ohne damit die Fehlerquellen beträchtlich zu vermehren. Denn man darf nicht vergessen, dass die directe Messung einer so grossen Länge wie e sehr wohl selbst einen Fehler von einigen Millimetern enthalten kann, wenn man nicht ganz besonders exacte Messinstrumente zur Verfügung hat.

Wenn es daher auch zweifelhaft sein konnte, ob wir durch Berücksichtigung der Knotenpunkte die Genauigkeit der Bestimmung von a vergrössern würden, so haben wir doch uns der ungleich grösseren Mühe unterzogen, um nichts zu verabsäumen, was vielleicht die Exactheit der Resultate erhöhen könnte.

Ausser von dem Winkel $\alpha = 30^0$ und den Knotenpunktsentfernungen a, deren Berechnung in dem Voraufgehenden auseinandergesetzt worden ist, hängen nun die drei räumlichen Coordinaten x, y, z der den einzelnen Gelenken zugeordneten Punkte der Geissler'schen Röhren nur von den ebenen Coordinatenpaaren ξ_1, ζ_1 und η_2, ζ_2 ab. Diese letzteren Coordinaten müssen auf den Photographien gemessen werden. In der Kniegelenkarbeit hatten wir zum Zwecke dieser Messung auf den Bildern das Coordinatennetz durch Ausziehen der nur theilweise durch die Photographie eingezeichneten Parallelen zu den beiden Coordinatenaxen vervollständigt. Da diese Parallelen einen Abstand von 1 cm von einander besassen, so konnte man durch Schätzen der Zehntel dieser Abstände die Coordinaten bis auf nahezu 1 mm genau ablesen. Die damit erzielte Genauigkeit entsprach ungefähr der Grösse der Funkenbilder und reichte für den damaligen Zweck, nur den geometrischen Verlauf der Bewegung zu bestimmen, aus.

Bei der vorliegenden Untersuchung hatten wir nun, entsprechend den höher gesteckten Zielen, von vorn herein eine grössere Genauigkeit angestrebt. Wir hatten uns durch Verwendung von Geissler'schen Capillarröhren und Abschnüren von ganz kleinen Strecken derselben Punkte auf den photographischen Platten verschafft, welche viel geringere Dimensionen besassen als die Funkenbilder bei der Kniegelenkuntersuchung. Infolge der kleineren Dimensionen vertrugen diese Punkte eine viel genauere Coordinatenbestimmung, als durch

über dem Ringe innerhalb enger Grenzen verändern, so dass dadurch die Möglichkeit gegeben ist, die empfindliche Seite der photographischen Platte trotz der verschiedenen Dicke der Glasplatten in eine ganz bestimmte Höhe im Apparat zu bringen. Durch zwei Klemmen *Kl*, mittelst welcher der Ring festgehalten werden kann, und welche mit Mikrometerschrauben zur feineren Einstellung des Ringes versehen sind, wird die Stellung der Platte gesichert.

Der Maassstab *M* ist an einem Schlitten *Sch* verschiebbar befestigt; letzterem ist durch eine Prismenführung *P*, *P* eine genau



Fig. 9.

geradlinige Bewegung vorgeschrieben. Die Richtung dieser Bewegung steht senkrecht auf der Längsrichtung des Maassstabes. Der Maassstab selbst kann in seiner Längsrichtung gegen den Schlitten *Sch* mittels einer Mikrometerschraube *Mi* noch etwas verschoben werden. Er ist aus Silber gefertigt und durch feine, nur unter dem Mikroskop deutlich sichtbare Striche in Millimeter eingetheilt. Der Mittelpunkt der Theilung liegt in der Mitte; von da an sind nach beiden Seiten hin die Millimeterstriche fortlaufend numeriert.

An dem Schlitten *Sch* befindet sich nun weiterhin in der zur Richtung seiner geradlinigen Bewegung senkrechten Richtung eine Führung für ein Prisma *Q*. Dieses letztere Prisma giebt die Basis für ein genügend starkes Stativ *H* zum Halten des Schraubenmikroskopes *Sm* ab. Auf diese Weise ist dem Mikroskop von jeder Stellung aus geradlinige Bewegung in zwei zu einander senkrechten Richtungen ermöglicht. Denn es macht einerseits die Bewegung des Schlittens *Sch* mit, andererseits kann es in der Längsrichtung dieses Schlittens mit dem Prisma *Q* verschoben werden. Dadurch ist man in der Lage, das Mikroskop parallel mit sich an jede Stelle

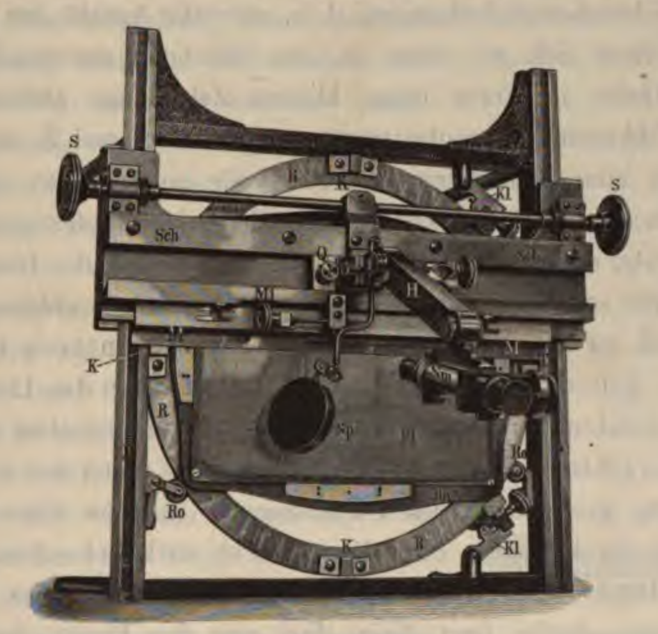


Fig. 10.

über der photographischen Platte zu führen und dabei immer ein scharfes Bild der empfindlichen Schicht zu behalten. Da es hauptsächlich auf eine genaue Einstellung des Mikroskops in der Längsrichtung des Maassstabes *M* ankommt, so ist das Prisma *Q* mit einer Mikrometerschraube versehen.

Das Mikroskop *Sm* ist, wie schon erwähnt, ein sogenanntes Schraubenmikroskop. Das Objectiv desselben giebt ein nur schwach vergrössertes reelles Bild der Theilung des Maassstabes einerseits und der Zeichnung auf der photographischen Platte andererseits. In der Ebene dieses Bildes befindet sich ein Doppelfaden, welcher

auf einem kleinen Rahmen ausgespannt ist. Dieser Rahmen lässt sich mittelst einer sehr genau gearbeiteten Mikrometerschraube von geringer Ganghöhe in der Bildebene senkrecht zu der Richtung des Doppelfadens seitlich verschieben. Das Verhältniss zwischen Vergrösserung des reellen Bildes und Ganghöhe der Mikrometerschraube ist so abgemessen, dass zehn Schraubenumdrehungen dazu gehören, um bei feststehendem Mikroskop den Doppelfaden von einem Strich der Millimetertheilung des Maassstabes bis an den folgenden zu bewegen. Es entspricht daher einer Umdrehung der Mikrometerschraube eine seitliche Verschiebung des Doppelfadens von 0,1 mm. Die Anzahl der Schraubenumdrehungen, d. h. also die Anzahl der Zehntel-Millimeter lässt sich an einem in der Bildebene unverrückbar befestigten Theile in Form einer kleinen Zahnstange ablesen. Der Kopf der Mikrometerschraube trägt nun eine Trommel *T*, auf derem Rande sich eine Eintheilung in 100 Theile befindet, so dass man mittelst einer an der Aussenseite des Mikroskops befestigten Marke die Hunderstel einer Schraubenumdrehung, d. h. also die Tausendstel-Millimeter der seitlichen Verschiebung des Doppelfadens ablesen kann[1]).

Endlich ist an dem Stativ *H* für das Mikroskop noch ein Hohlspiegel *Sp* befestigt, welcher das Tageslicht oder das Licht einer seitlich stehenden Lampe auf die Theilung des Maassstabes reflectirt. Die photographische Platte wird dagegen von unten her mit Hülfe eines schräg gestellten grossen Planspiegels (in den Figuren nicht angegeben) durch Tages- oder Lampenlicht stark beleuchtet.

Der Hauptvortheil, welchen dieser Coordinatenmesser vor anderen besitzen dürfte, liegt darin, dass man den Punkt, dessen Coordinaten man messen will, und die Theilung des Maassstabes in ein und demselben Gesichtsfeld eines Mikroskopes hat. Dies ist dadurch erreicht worden, dass die mit der Theilung versehene Fläche des Maassstabes schräg gegen die Oberfläche der photographischen Platte gestellt ist, so dass es möglich wird, den Punkt, für welchen man die Messung vornehmen will, in die Ebene der Theilung des Maass-

1) Wäre die Höhe der Mikrometerschraube so abgemessen, dass schon nach fünf Umdrehungen der Doppelfaden um die Entfernung zweier Millimeterstriche im Ocular seitlich verschoben erschien, so müsste natürlich die Trommel in doppelt so viel, also 200 Theile getheilt worden sein, um eine directe Ablesung von 0,001 mm zu gestatten.

stabes zu verlegen (Fig. 11). Infolge dessen muss auch das Mikroskop schräg gestellt werden und zwar so, dass seine optische Axe auf der Theilungsfläche des Maassstabes senkrecht steht. Man kann auf diese Weise in dem Gesichtsfelde des Mikroskopes gleichzeitig ein scharfes Bild der Theilung und des Punktes erhalten, dessen Coordinaten man messen will.

Bei der Messung hat man nun folgendermassen zu verfahren.

Man stellt zunächst die photographische Platte durch Drehen des Ringes *R* so ein, dass die auf ihr markierte verticale ζ-Axe (mittelste Verticallinie der Coordinatentafel) genau parallel der Richtung verläuft, in welcher der Schlitten *Sch* bewegt werden kann. Diese Stellung lässt sich mit Hülfe des Mikroskopes leicht controlieren, denn es muss dann bei der Bewegung des Schlittens die mittelste Verticallinie der Coordinatentafel immer zwischen dem Doppelfaden bleiben. Darauf wird der Maassstab mit Hülfe der Mikrometerschraube *Mi* so lange seitlich verschoben, bis der Nullstrich der Theilung mit der ζ-Axe in eine verticale Ebene fällt, so dass dann an jeder Stelle der Nullstrich der Theilung und das im Mikroskop sichtbare Stück der ζ-Axe gleichzeitig zwischen dem Doppelfaden erscheinen.

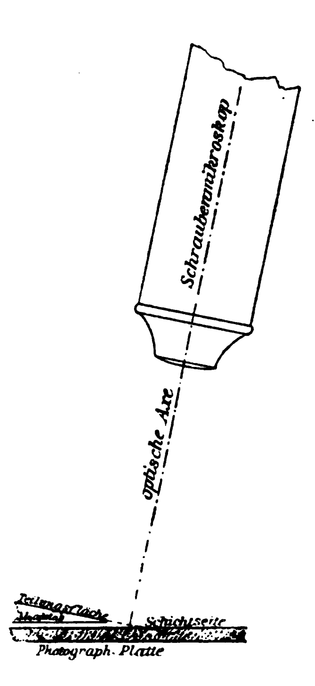


Fig. 11.

Nachdem man diese Einstellung der photographischen Platte und des Maassstabes mit genügender Genauigkeit erreicht hat, ist man in der Lage, die zur ζ-Axe senkrechte Coordinate (also auf den Platten 1^a und 1^b die ξ-Coordinate und auf 2^a und 2^b die η-Coordinate) für alle Punkte der photographischen Platte bis auf 0,001 mm zu messen, vorausgesetzt, dass die Grösse und Form des Punktes eine Einstellung des Doppelfadens bis auf diese Genauigkeit gestattet, und dass man die hierzu erforderliche Uebung erlangt hat. Man bewegt zu diesem Zwecke den Schlitten *Sch* und gleichzeitig das Mikroskop mittelst des Prismas *Q* auf dem Schlitten so lange, bis der

Punkt, dessen Coordinate man messen will, im Gesichtsfeld erscheint. Durch die eine Mikrometerschraube, welche die Feineinstellung des ganzen Mikroskopes gestattet, bringt man dann Doppelfaden und Punkt zu einander im Gesichtsfeld in eine solche Lage, wie es Figur 12 andeutet. Selbst wenn der Punkt einen etwas grösseren Durchmesser besitzt, als die Entfernung der beiden parallelen Fäden beträgt, lässt sich diese Einstellung noch sicher bewirken, da man leicht abschätzen kann, ob auf beiden Seiten gleich viel über den Doppelfaden hinausragt. Im Allgemeinen wird nun der Doppelfaden nicht auch gleichzeitig einen Millimeterstrich bedecken. Befindet sich derselbe z. B. zwischen dem 12ten und 13ten Theilstrich, wie in Figur 12 angenommen ist, so hat man als Ganze des in Millimeter ausgedrückten Coordinatenwerthes die Zahl 12. Um den Bruchtheil eines Millimeters zu messen, um welchen die wahre Zahl über die Zahl 12 hinausgeht, verschiebt man darauf bei feststehendem Mikroskop den Doppelfaden durch Drehen der Trommel *T* so weit nach rechts, bis der mit der Nummer 12 versehene Millimeterstrich genau eingestellt ist. An der Trommel liest man dann, unter Berücksichtigung der Anzahl der nöthigen ganzen Schraubenumdrehungen, direct bis auf 0,001 mm den gesuchten Abstand ab. Derselbe betrage 0,317 mm, dann hat man als Coordinatenwerth des betreffenden Punktes 12,317 mm. Durch wiederholte, zu verschiedenen Zeiten angestellte Messung an demselben Punkte konnte man sich überzeugen, dass die Einstellung sich bei den meisten Punkten unserer photographischen Platten bis auf wenige Tausendstel-Millimeter genau bewirken liess, so dass man sich wenigstens auf die absolute Richtigkeit der Hundertstel-Millimeter bei der Einstellung verlassen konnte.



Fig. 12.

Ob nun auch thatsächlich der Coordinatenwerth diese Genauigkeit besitzt, hängt dann nur noch von der Güte der Mikrometerschraube im Mikroskop und der Genauigkeit und der Feinheit der Theilung des Maassstabes ab. Um in dieser Beziehung ganz sicher zu gehen, liessen wir sowohl das Mikroskop als die Theilung des

Silbermaassstabes von Herrn Präcisionsmechaniker Wanschaff in Berlin (Elisabethufer 1) herstellen, welchem die physikalisch-technische Reichsanstalt eine Reihe sehr genau arbeitender Instrumente, z. B. Theilmaschinen für Längen- und Winkeltheilung u. s. w., verdankt.

Nachdem für alle Punkte auf der photographischen Platte die eine Coordinate gemessen worden ist, dreht man den Ring *R*, auf welchem die Platte befestigt ist, um 90° herum und ist dann im Stande, auf ganz entsprechende Weise die andere Coordinate (ζ-Codinate) zu messen. Um auch die Drehung des Ringes mit genügender Genauigkeit ausführen zu können, hatten wir auf den Ring *R* in gleichen Abständen vier silberne Klötzchen *K* aufgesetzt und auf denselben durch Herrn Wanschaff je einen nach dem Centrum des Ringes gerichteten feinen Strich in der Weise anbringen lassen, dass diese Striche Theile von genau auf einander senkrecht stehenden Radien des Ringes darstellen. Vor der Drehung wurde dann das Mikroskop in eine solche Stellung gebracht, dass der eine Strich im Doppelfaden lag; darauf wurde, während das Mikroskop fest stand, der Ring so lange gedreht, bis der nächste Strich an dieselbe Stelle im Mikroskop gekommen war. Bevor nun in der neuen Stellung der Platte die Coordinatenmessung vorgenommen werden konnte, musste der Maassstab mit Hülfe der Mikrometerschraube *Mi* von Neuem so weit seitlich verschoben werden, bis der Nullstrich der Theilung mit dem auf der photographischen Platte in der Mitte der Coordinatentafel besonders markierten Coordinatenanfangspunkt in eine verticale Ebene zu liegen kam. Im Uebrigen gestaltete sich dann die Messung genau so wie früher.

Durch die Messung auf den photographischen Platten erhält man noch nicht die richtigen Werthe von ξ_1, ζ_1, η_2 und ζ_2. Denn unter diesen Grössen sind ja die Coordinaten der Projectionen auf die zur optischen Axe des Apparates senkrecht gestellte und im Raume durch den Coordinatenanfangspunkt *O* hindurch gehende Coordinatentafel zu verstehen. Die Photographien geben aber nur ein verkleinertes Bild dieser Coordinatentafel mit den in ihr liegenden Projectionen. Bezeichnet man die auf den photographischen Platten gemessenen Coordinaten beziehungsweise mit ξ_1', ζ_1', η_2' und ζ_2', so müssen dieselben in jedem einzelnen Falle noch mit der Zahl multipliciert werden, welche angiebt, um wie viel eine jede Länge auf der Coordinaten-

tafel grösser ist als ihr photographisches Bild. Diese Verhältnisszahl ist aber nichts anderes als die schon früher angeführte Grösse $\frac{l}{l'}$ oder λ.

Die Angaben des Coordinatenmessers beziehen sich auf Millimeter als Maasseinheit. Man erhält daher durch Multiplication mit λ aus den direct gemessenen Coordinaten die ebenen Coordinaten auf der Coordinatentafel ebenfalls in Millimetern ausgedrückt. Nun empfiehlt es sich, als Maasseinheit für die Längen beim Gehen des Menschen das Centimeter zu verwenden, damit die Maasszahlen nicht zu gross ausfallen. Will man daher die Coordinaten ξ_1, ζ_1, η_2, ζ_2 in Centimetern aus den in Millimetern ausgedrückten direct gemessenen Coordinaten ξ_1', ζ_1', η_2', ζ_2' erhalten, so muss man nach der Multiplication mit λ noch durch 10 dividiren. Man hat demnach, wenn man an Stelle von λ wieder seinen Werth $\frac{l}{l'}$ einsetzt und diese Grössen, wenn sie zu dem photographischen Apparat 1^a oder 1^b gehören, mit dem Index 1, und wenn sie dem Apparat 2^a oder 2^b angehören, mit dem Index 2 versieht:

$$\xi_1 = \frac{l_1}{10 l_1'} \xi_1', \quad \zeta_1 = \frac{l_1}{10 l_1'} \zeta_1', \quad \eta_2 = \frac{l_2}{10 l_2'} \eta_2', \quad \zeta_2 = \frac{l_2}{10 l_2'} \zeta_2'. \quad (17)$$

Dabei ist nicht ausser Acht zu lassen, dass die Grössen l und l' in den beiden ersten Formeln andere Werthe besitzen als in den beiden letzten, denn die ersteren beziehen sich ja auf einen anderen photographischen Apparat als die letzteren. Ferner gehören für die rechte Körperseite die in den beiden ersten Formeln vorkommenden Grössen l und l' auch einem anderen Apparat (1^a) an als für die linke Körperseite (1^b). Entsprechend sind die in den beiden letzten Formeln auftretenden Grössen l und l' für die rechte Körperseite aus einem anderen Apparat (1^a) abzuleiten als die für die linke (1^b).

In den folgenden Tabellen sind nun die durch directe Messung ermittelten Werthe der vier Grössen ξ_1', ζ_1', η_2' und ζ_2' für alle drei Versuche niedergelegt. Da zu der rechten Körperseite andere Constanten gehören als zur linken, so sind am Ende einer jeden zu ein und derselben Körperseite gehörenden Tabelle die Werthe der Constanten und die aus ihnen folgenden Formeln für die Berechnung angegeben. Genau genommen müssten ja nun die zu derselben

Körperseite gehörenden Constanten für alle drei Versuche übereinstimmen. Es haben sich jedoch bei den drei Versuchen kleine Abweichungen in der Grösse von l' herausgestellt, welche zu der beliebig angenommenen Länge $l = 86$ cm gehören. Diese geringen Differenzen haben darin ihren Grund, dass beim verschiedenen Einschieben der Cassette die empfindliche Schicht der photographischen Platte nicht immer genau wieder an dieselbe Stelle gekommen ist. Daraus resultieren nun allerdings auch etwas verschiedene Werthe der Entfernung e zwischen Coordinatentafel und photographischer Platte. Die Unterschiede sind aber im Verhältniss zu der Grösse von e so gering, dass sie vernachlässigt werden können.

Es wurden von jedem Versuch nur 31 aufeinanderfolgende Phasen, welche gleichmässig um die Mitte der Coordinatentafel gruppiert waren, herausgegriffen. Um die Messungen nicht ins Unbegrenzte zu häufen, wurden ausserdem nur die Coordinaten der Gelenkpunkte, des Scheitelpunktes vom Kopfe, des Schwerpunktes und des Punktes an der Spitze des Fusses gemessen und die Schwerpunkte der einzelnen Glieder zunächst ausser Betracht gelassen. Da die Coordinaten des Kopfscheitels von beiden Seiten gemessen wurden, so waren ohnedies für jede Seite bei einem Versuch $9 \cdot 4 \cdot 31 = 1116$, für den ganzen Versuch also $2 \cdot 1116 = 2232$, und für alle drei Versuche insgesammt 6696 Messungen auszuführen. Hiervon kommen allerdings einige in Wegfall. An manchen Stellen waren die Punkte so undeutlich, dass eine Coordinatenmessung nicht mit genügender Genauigkeit durchführbar war, so z. B. beim III. Versuch die Stellungen vom Schwerpunkt des Fusses und der Fussspitze und auch zum grossen Theil vom Handgelenk der linken Seite. Bei einigen Phasen war ferner das Hüftgelenk durch den Unterarm verdeckt worden, so dass auch dadurch die Anzahl der Messungen sich etwas verringerte. Dafür waren aber beim III. Versuch die Coordinaten eines Punktes im Innern der zum Oberschenkel gehörenden GEISSLER'schen Röhre bestimmt worden.

Die Resultate dieser directen Messungen sind in den folgenden Tabellen niedergelegt worden.

Tabelle 1.

I. Versuch, rechts (Tafel 1ª und 2ª).

Nr.	Schultergelenk rechts				Ellbogengelenk rechts				Handgelenk rechts			
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2
1	−59,437	+32,529	+28,626	+22,872	−56,797	+35,340	+10,342	+ 8,100	−43,553	+31,854	− 6,695	−5,394
2	−55,366	+31,127	+29,735	+23,950	−53,831	+34,005	+11,068	+ 8,760	−44,704	+32,872	− 7,892	−6,310
3	−51,271	+29,727	+30,731	+	−51,852	+33,186	+11,824	+ 9,409	−46,125	+34,139	− 7,938	−6,356
4	−47,211	+28,347	+31,370	+25,601	−50,211	+32,697	+12,615	+10,050	−47,333	+35,290	− 7,517	−6,060
5	−43,109	+27,003	+31,604	+25,961	−48,255	+32,176	+13,242	+10,590	−47,573	+35,960	− 7,014	−5,440
6	−39,078	+25,634	+31,391	+25,981	−45,744	+31,465	+13,512	+10,833	−46,714	+36,010	− 6,721	−5,460
7	−34,966	+24,237	+30,762	+25,664	−42,562	+30,552	+13,235	+10,640	−45,075	+36,050	− 6,683	−5,530
8	−30,496	+22,750	+29,753	+24,982	−38,456	+29,291	+12,373	+10,000	−42,358	+35,767	− 7,104	−5,730
9	−26,116	+21,272	+28,763	+24,360	−33,941	+27,800	+11,304	+ 9,240	−38,502	+34,963	− 7,776	−6,340
10	−21,821	+19,926	+28,143	+24,000	−29,156	+26,348	+10,454	+ 8,630	−33,318	+33,482	− 8,573	−7,100
11	−16,889	+18,423	+27,870	+23,960	−23,512	+24,555	+ 9,893	+ 8,240	−26,076	+31,050	− 9,629	−8,100
12	−11,887	+16,812	+27,979	+24,290	−17,331	+22,617	+ 9,614	+ 8,090	−17,626	+27,970	−10,413	
13	− 7,014	+15,114	+28,421	+24,920	−10,611	+20,419	+ 9,695	+ 8,230	− 7,767	+24,180	−10,545	−8,990
14	− 2,825	+13,528	+29,291	+25,900	− 4,302	+18,250	+10,340	+ 8,960	+ 2,224	+19,940	− 9,511	−8,300
15	+ 1,671	+11,739	+30,678	+27,430	+ 2,047	+16,060	+11,802	+10,200	+12,934	+14,943	− 6,683	−5,912
16	+ 5,603	+10,146	+31,721	+28,230	+ 7,189	+14,369	+13,037	+11,560	+21,470	+10,625	− 3,417	−3,040
17	+10,146	+ 8,283	+32,350	+29,450	+13,251	+12,465	+14,084	+12,680	+30,669	+ 5,660	+ 0,645	+0,750
18	+14,185	+ 6,550	+32,260	+29,490	+18,833	+10,680	+14,577	+13,300	+38,134	+ 1,140	+ 4,050	+4,030
19	+18,451	+ 4,570	+31,678	+29,320	+24,819	+ 8,500	+14,682	+13,600	+44,986	− 2,935	+ 6,852	+6,790
20	+22,882	+ 2,490	+30,880	+28,880	+30,521	+ 6,150	+14,376	+13,330	+50,939	− 6,850	+ 8,432	+8,300
21	+27,469	+ 0,250	+29,979	+28,330	+35,742	+ 3,570	+13,662	+12,800	+56,269	− 9,540	+ 8,662	+8,650
22	+31,957	− 2,100	+29,154	+27,860	+40,366	+ 0,950	+12,730	+11,620	+60,916	−11,870	+ 7,588	+8,030
23	+36,362	− 4,420	+28,653	+27,560	+44,281	− 1,300	+11,871	+11,200	+64,701	−13,700	+ 5,392	+5,660
24	+40,804	− 6,820	+28,409	+27,750	+47,786	− 3,540	+11,168	+10,800	+67,614	−15,270	+ 2,321	+2,270
25	+45,205	− 9,270	+28,614	+28,240	+50,812	− 5,470	+10,794	+10,600	+69,399	−15,620	− 1,123	−1,430
26	+49,964	−11,800	+28,997	+28,855	+54,230	− 7,842	+10,739	+10,700	+70,102	−15,100	− 4,851	−4,750
27	+53,915	−13,800	+29,550	+29,500	+57,424	−10,060	+10,961	+10,840	+69,701	−14,000	− 7,395	−7,370
28	+57,843	−15,870	+30,441	+30,830	+60,015	−12,090	+11,453	+11,464	+68,752	−12,560	− 8,146	−8,050
29	+61,360	−17,640	+31,197	+31,830	+61,615	−13,300	+12,031	+12,100	+67,824	−11,300	− 7,962	−8,020
30	+65,119	−19,520	+31,691	+32,460	+63,177	−14,270	+12,633	+12,740	+67,153	−10,470	− 7,532	−7,160
31	+68,888	−21,500	+31,812	+32,960	+65,047	−15,230	+13,068	+13,165	+67,484	−10,000	− 7,153	−6,770

Nr.	Hüftgelenk rechts				Kniegelenk rechts				I. Fussgelenk rechts				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−58,332		−5,793		−58,330	+31,672	−33,384	−26,885	−79,137	+35,487	−46,956	−36,855	1
2	−53,410	+29,490	−4,680	−3,876	−50,024	+28,637	−32,029	−26,200	−69,702	+32,342	−47,499	−37,943	2
3		+27,990			−42,324	+25,787	−30,467	−25,243	−59,243	+28,689	−48,942	−39,861	3
4	−43,987	+26,285	−2,947	−2,457	−35,445	+23,072	−29,164	−24,500	−48,220	+24,713	−50,766	−42,211	4
5	−39,643	+24,805	−2,875	−2,393	−29,249	+20,487	−28,387	−24,142	−36,577	+20,306	−52,430	−44,558	5
6	−35,723	+23,370	−3,471	−2,915	−24,130	+18,329	−28,434	−24,416	−24,963	+15,854	−53,401	−46,391	6
7	−31,979	+22,020	−4,744	−3,980	−19,955	+16,327	−29,424	−25,530	−14,163	+11,734	−53,328	−47,260	7
8	−27,801	+20,630	−6,289	−5,331	−15,677	+14,130	−30,800	−27,000	− 4,681	+ 8,162	−52,447	−47,351	8
9	−23,197	+19,083	−7,101	−6,072	−10,611	+12,100	−31,310	−27,770	+ 1,020	+ 5,617	−52,595	−48,037	9
10	−18,461	+17,360	−7,219	−6,240	− 4,792	+10,165	−30,954	−27,770	+ 3,695	+ 4,008	−54,006	−49,697	10
11	−12,891	+15,560	−7,071	−6,168	− 0,121	+ 8,640	−31,324	−28,240	+ 6,567	+ 2,771	−54,577	−50,521	11
12	− 8,077	+14,116	−6,345	−5,530	+ 4,702	+ 7,615	−30,703	−27,890	+ 7,652	+ 2,336	−54,966	−50,984	12
13	− 3,927	+12,827	−5,792	−5,095	+ 8,291	+ 6,310	−30,530	−27,880	+ 8,111	+ 2,049	−55,060	−51,209	13
14		+11,576		−4,413	+ 9,472	+ 5,870	−30,708	−28,110	+ 8,202	+ 1,985	−55,049	−51,127	14
15	+ 3,751	+ 9,756	−3,972	−3,600	+10,043	+ 5,410	−30,834	−28,210	+ 8,213	+ 1,920	−54,945	−51,050	15
16	+ 6,663		−3,622		+10,474	+ 4,770	−30,845	−28,290	+ 8,242	+ 1,850	−54,863	−51,000	16
17	+10,257	+ 7,139	−3,532	−3,229	+11,134	+ 4,120	−30,890	−28,470	+ 8,276	+ 1,780	−54,809	−50,970	17
18	+13,749	+ 5,500	−3,631	−3,374	+11,927	+ 3,500	−30,907	−28,620	+ 8,297	+ 1,700	−54,804	−50,980	18
19	+17,670	+ 3,700	−4,069	−3,840	+13,214	+ 2,820	−31,025	−28,860	+ 8,394	+ 1,623	−54,798	−50,990	19
20	+21,543	+ 1,930	−4,797	−4,523	+15,106	+ 1,720	−31,243	−29,270	+ 8,581	+ 1,511	−54,733	−50,997	20
21	+25,418	+ 0,140	−5,342	−5,110	+17,216	+ 0,748	−31,355	−29,470	+ 8,978	+ 1,303	−54,409	−50,764	21
22	+29,570	− 1,992	−5,608	−5,420	+20,273	− 0,500	−31,350	−29,650	+ 9,743	+ 1,071	−53,763	−50,202	22
23	+34,173	− 4,401	−5,808	−5,640	+24,418	− 2,130	−31,574	−30,120	+11,056	+ 0,635	−52,734	−49,366	23
24	+39,118	− 7,100	−5,873	−5,750	+29,717	− 4,120	−31,900	−30,840	+13,492	− 0,444	−51,210	−48,223	24
25	+44,080	−10,010	−5,912	−5,840	+36,888	− 6,840	−32,733	−31,920	+17,377	− 2,153	−49,349	−46,843	25
26	+49,451	−13,100	−6,133		+46,004	−11,120	−33,721	−33,482	+23,822	− 4,990	−47,364	−45,587	26
27	+54,342		−5,674		+54,664	−15,890	−33,457	−33,834	+31,850	− 8,869	−47,067	−46,086	27
28	+59,098	−18,470	−4,635	−4,730	+62,802	−20,410	−32,188	−33,154	+41,315	−13,895	−47,826	−47,832	28
29		−20,680		−3,750	+69,805	−24,470	−30,799	−32,180	+50,892	−19,126	−49,270	−50,366	29
30	+68,082	−23,030	−3,076	−3,120	+76,433	−28,250	−29,588	−31,400	+61,630	−25,091	−51,183	−53,584	30
31	+72,028	−25,000	−3,080	−3,170	+82,137	−31,610	−28,964	−31,107	+72,616	−31,234	−52,901	−56,771	31

abelle 1.

Schwerpunkt des Fusses rechts				Fussspitze rechts				Kopfpunkt von rechts				Nr.
ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	
−80,828	+35,705	−51,246	−40,057	−75,818	+32,010	−57,623	−45,695	−52,678	+20,183	+52,166	+43,537	1
−70,761	+32,410	−51,950	−41,341	−64,849	+28,300	−57,602	−46,617	−48,195	+18,417	+53,035	+44,653	2
−59,356	+28,553	−53,488	−43,509	−52,224	+24,084	−57,932	−48,021	−43,891	+16,750	+53,806	+45,684	3
−47,307	+28,287	−55,195	−45,939	−39,314	+19,479	−58,120	−49,333	−39,844	+15,235	+54,215	+46,383	4
−34,568	+19,531	−56,498	−48,206	−26,061	+14,459	−57,425	−50,053	−35,766	+13,721	+54,159	+46,713	5
−22,019	+14,679	−56,886	−49,798	−13,536	+ 9,180	−55,746	−49,930	−31,739	+12,210	+53,733	+46,704	6
−10,352	+10,238	−56,147	−50,251	− 2,269	+ 5,170	−53,097	−48,656	−27,670	+10,683	+52,975	+46,389	7
− 0,307	+ 6,604	−54,450	−49,722	+ 7,097	+ 2,130	−49,808	−46,490	−23,326	+ 9,047	+52,074	+45,996	8
+ 5,396	+ 4,212	−54,434	−50,275	+12,694	+ 0,380	−49,554	−46,800	−19,173	+ 7,491	+51,406	+45,767	9
+ 7,799	+ 2,646	−56,231	−52,266	+15,534	− 1,487	−52,137	−49,573	−15,174	+ 6,050	+51,049	+45,787	10
+10,248	+ 1,267	−57,734	−54,000	+18,602	− 3,825	−55,703	−53,257	−10,990	+ 4,479	+51,084	+46,189	11
+10,858	+ 0,846	−58,421	−54,680	+19,343	− 4,210	−57,666	−55,108	− 7,048	+ 3,031	+51,514	+46,947	12
+11,018	+ 0,824	−58,497	−54,760	+19,542	− 4,444	−58,171	−55,600	− 3,109	+ 1,556	+52,245	+47,953	13
+11,025	+ 0,801	−58,477		+19,551	− 4,490	−58,206	−55,660	+ 0,738	+ 0,006	+53,192	+49,181	14
+11,032	+ 0,770	−58,460		+19,559	− 4,520	−58,240	−55,720	+ 4,898	− 1,821	+54,232	+50,605	15
+11,039	+ 0,750	−58,439		+19,569	− 4,560	−58,275	−55,780	+ 8,384	− 3,431	+54,882	+51,572	16
+11,046	+ 0,720	−58,418		+19,578	− 4,610	−58,310	−55,840	+12,518	− 5,403	+55,152	+52,287	17
+11,053	+ 0,680	−58,396		+19,587	− 4,660	−58,343	−55,900	+16,397	− 7,267	+54,931	+52,523	18
+11,062	+ 0,650	−58,378	−54,580	+19,598	− 4,700	−58,377	−55,960	+20,599	− 9,346	+54,330	+52,431	19
+11,081	+ 0,610	−58,357	−54,500	+19,622	− 4,750	−58,485	−56,030	+24,863	−11,447	+53,507	+52,116	20
+11,283	+ 0,532	−58,149	−54,420	+19,768	− 4,800	−58,655	−56,100	+29,122	−13,666	+52,680	+51,813	21
+11,670	+ 0,445	−57,760	−54,100	+20,043	− 4,900	−58,898	−56,360	+33,388	−16,035	+52,027	+51,665	22
+12,322	+ 0,257	−57,153	−53,580	+20,418	− 5,070	−59,230	−56,660	+37,625	−18,509	+51,584	+51,782	23
+13,614	− 0,419	−55,832	−52,160	+21,050	− 5,380	−59,675	−57,200	+41,885	−21,175	+51,502	+52,244	24
+16,205	− 1,658	−53,933	−50,970	+21,815	− 5,667	−60,092	−57,580	+45,824	−23,664	+51,746	+53,014	25
+21,944	− 4,394	−51,693	−49,430	+25,688	− 8,150	−58,791	−56,914	+50,141	−26,375	+52,284	+54,151	26
+30,017	− 8,569	−51,410	−50,060	+33,789	−13,770	−57,465	−56,877	+54,376	−28,892	+53,043	+55,506	27
+40,156	−13,885	−52,302	−52,070	+44,845	−19,880	−57,532	−58,442	+58,963	−31,570	+53,901	+57,004	28
+50,706	−19,460	−53,816	−54,957	+56,655	−25,930	−57,092	−60,457	+63,086	−33,940	+54,557	+58,261	29
+62,560	−25,848	−55,646	−58,320	+69,595	−32,770	−58,364	−62,666	+67,229	−36,183	+54,896	+59,139	30
+74,642	−32,468	−57,064	−61,517	+82,294	−39,700	−58,079	−64,210	+71,207	−38,343	+54,787	+59,557	31

Für den photographischen Apparat 1ª ergaben sich beim I. Versuch die Constanten

$$e = 438 \text{ cm}; \quad d = 52 \text{ cm}; \quad l_1 = 86 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l_1' = 5,8979 \text{ cm}.$$

Daraus berechnet sich mit Hülfe der Formel (16), wie schon oben angeführt, als Werth der Entfernung des einen Knotenpunktes vom Coordinatenanfangspunkt

$$a_1 = 410,54 \text{ cm}.$$

Zu dem photographischen Apparat 2ª gehörten beim I. Versuch die Constanten

$$e = 634,5 \text{ cm}; \quad d = 69 \text{ cm}; \quad l_2 = 86 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l_2' = 5,4618 \text{ cm}.$$

Daraus folgt mit Hülfe der Formel (16) für die entsprechende Knotenpunktsentfernung

$$a_2 = 599,00 \text{ cm}.$$

Ferner erhält man aus diesen Constanten nach den Formeln (17)

$$\xi_1 = 1{,}45815 \,.\, \xi_1'; \qquad \zeta_1 = 1{,}45815 \,.\, \zeta_1';$$

$$\eta_2 = 1{,}5746 \,.\, \eta_2' \quad \text{und} \quad \zeta_2 = 1{,}5746 \,.\, \zeta_2'.$$

Setzt man diese Werthe in die Hauptformeln (7), (8) und (9) auf Seite 199 ein und berücksichtigt dabei, dass $\alpha = 30^\circ$ war, so erhält man die Formeln für die Berechnung der räumlichen Coordinaten x, y, z aus den in den voraufgehenden Tabellen niedergelegten Werthen der ebenen Coordinaten ξ_1', ζ_1', η_2' und ζ_2'.

Man kann diese Formeln dadurch von vornherein etwas bequemer für die Rechnung gestalten, dass man die beiden ersten durch den Zahlenfactor von $\xi_1'\eta_2'$ im Nenner, und die letzte durch den Zahlenfactor von y im Zähler kürzt. Dann gehen dieselben über in:

$$x = \frac{156175 \,.\, \xi_1' - 454{,}64 \,.\, \xi_1'\eta_2'}{107105 + 219{,}63 \,.\, \xi_1' + 162{,}55 \,.\, \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}, \tag{18}$$

$$y = \frac{90168 \,.\, \xi_1' + 194737 \,.\, \eta_2' - 410{,}54 \,.\, \xi_1'\eta_2'}{107105 + 219{,}63 \,.\, \xi_1' + 162{,}55 \,.\, \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}, \tag{19}$$

$$z_1 = \frac{(410{,}54 - y) \,.\, \zeta_1}{281{,}55} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{(1198 - 1{,}732 \,.\, x - y) \,.\, \zeta_2'}{760{,}84}, \tag{20}$$

wobei die beiden sich controlierenden Werthe von z zur Unterscheidung mit den Indices 1 und 2 versehen worden sind.

In dieser Gestalt sind die Formeln zur Rechnung verwendet worden. —

Für die Punkte auf der linken Körperseite hatte die Messung auf den Photographien folgende ebene Coordinaten ergeben:

Tabelle 2.

I. Versuch, (Tafel 1b und 2b).

Nr.	Schultergelenk links				Ellbogengelenk links				Handgelenk links				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−66,794	+36,615	+31,864	+22,633	−67,769	+41,202	+11,637	+ 8,099	−60,143	+44,908	− 9,579	−7,372	1
2	−62,066	+35,265	+33,233	+23,764	−61,296	+39,286	+13,062	+ 9,191	−50,072	+41,080	− 6,968	−6,628	2
3	−57,258	+33,838	+34,522	+24,872	−55,128	+37,460	+14,515	+10,304	−40,441	+36,996	− 3,580	−4,905	3
4	−52,585	+32,436	+35,244	+25,577	−49,396	+35,870	+15,471	+11,096	−31,828	+32,869	− 0,157	−2,547	4
5	−47,722	+30,862	+35,296	+25,811	−43,656	+34,245	+15,838	+11,456	−24,026	+28,943	+ 3,031	−0,041	5
6	−42,817	+29,205	+34,808	+25,633	−37,986	+32,571	+15,653	+11,402	−17,236	+25,208	+ 5,538	+2,334	6
7	−37,819	+27,404	+33,025	+25,218	−32,395	+30,752	+14,992	+11,039	−11,192	+21,943	+ 6,973	+4,257	7
8	−32,463	+25,405	+32,733	+24,566	−26,629	+28,728	+13,913	+10,315	− 5,313	+19,125	+ 7,230	+5,431	8
8	−27,316	+23,388	+31,741	+24,043	−21,416	+26,689	+12,829	+ 9,603	− 0,237	+16,516	+ 6,095	+5,698	9
10	−22,309	+21,311	+31,150	+23,818	−16,691	+24,642	+12,046	+ 9,126	+ 4,093	+14,346	+ 3,941	+4,849	10
11	−17,171	+19,047	+30,853	+23,841	−11,857	+22,445	+11,616	+ 8,857	+ 8,033	+12,774	+ 0,652	+3,151	11
12	−12,256	+16,926	+31,189	+24,230	− 7,431	+20,342	+11,588	+ 8,914	+10,697	+11,552	− 2,931	+0,558	12
13	− 7,375	+14,888	+31,558	+24,849	− 2,858	+18,167	+11,810	+ 9,193	+11,999	+11,129	− 6,060	−2,328	13
14	− 3,127	+13,209	+32,254	+25,614	+ 0,832	+16,383	+12,269	+ 9,593	+12,349	+11,563	− 7,755	−4,941	14
15	+ 1,318	+11,441	+33,388	+26,737	+ 3,691	+15,116	+13,103	+10,291	+12,207	+12,530	− 7,860	−6,264	15
16	+ 5,055	+ 9,950	+34,225	+27,573	+ 5,659	+14,482	+13,906	+10,958	+12,127	+13,817	− 7,420	−6,353	16
17	+ 9,571	+ 8,171	+34,717	+28,179	+ 8,106	+13,841	+14,641	+11,557	+12,531	+14,850	− 7,022	−6,040	17
18	+13,726	+ 6,455	+34,675	+28,338	+10,755	+13,014	+14,899	+11,778	+13,767	+15,667	− 6,889	−5,734	18
19	+18,165	+ 4,526	+34,170	+28,165	+14,267	+11,851	+14,753	+11,704	+15,951	+15,585	− 7,034	−5,754	19
20	+22,722	+ 2,645	+33,324	+27,684	+18,361	+10,354	+14,140	+11,276	+19,041	+14,964	− 7,472	−6,100	20
21	+27,461	+ 0,679	+32,324	+27,103	+23,078	+ 8,601	+13,158	+10,553	+23,101	+13,960	− 8,152	−6,745	21
22	+32,432	− 1,325	+31,465	+26,666	+28,374	+ 6,568	+12,187	+ 9,884	+28,347	+12,192	− 8,946	−7,509	22
23	+37,521	− 3,297	+30,947	+26,490	+34,041	+ 4,371	+11,465	+ 9,367	+34,786	+ 9,625	− 9,854	−8,315	23
24	+43,015	− 5,425	+30,750	+26,553	+40,361	+ 1,951	+11,043	+ 9,109	+42,574	+ 6,162	−10,574	−9,064	24
25	+48,439	− 7,656	+30,930	+27,063	+46,964	− 0,771	+10,995	+ 9,243	+51,012	+ 2,100	−10,832	−9,530	25
26	+54,049	−10,150	+31,466	+27,820	+54,319	− 3,871	+11,318	+ 9,626	+61,027	− 3,119	−10,385	−9,247	26
27	+58,763	−12,157	+32,315	+28,910	+60,985	− 6,820	+12,167	+10,569	+70,441	− 8,723	− 9,001	−8,148	27
28	+63,649	−14,536	+33,665	+30,488	+67,543	− 9,981	+13,631	+12,037	+79,717	−14,625	− 6,222	−5,837	28
29	+68,158	−16,830	+34,790	+31,851	+73,291	−12,736	+14,990	+13,503	+87,704	−20,227	− 3,137	−3,016	29
30	+72,818	−19,289	+35,388	+32,760	+79,115	−15,456	+15,922	+14,559	+95,320	−25,962	+ 0,019	−0,063	30
31	+77,299	−21,776	+35,319	+33,068	+84,542	−18,001	+16,214	+15,029	+101,758	−31,312	+ 2,802	+2,786	31

Nr.	Hüftgelenk links				Kniegelenk links				I. Fussgelenk links				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1		+34,732		−1,932	−54,303	+30,693	−32,017	−23,117	−52,072	+26,263	−61,379	−45,135	1
2	−58,957	+33,428	−1,923	−1,309	−53,078	+30,309	−31,797	−23,014	−52,077	+26,240	−61,306	−45,010	2
3	−55,148		−1,362		−52,027	+29,764	−31,548	−22,881	−52,105	+26,220	−61,190	−44,960	3
4	−51,346	+30,948	−1,063	−0,760	−51,031	+29,194	−31,343	−22,806	−52,073	+26,210	−61,100	−44,890	4
5	−47,320	+29,634	−1,180	−0,853	−49,694	+28,484	−31,224	−22,810	−51,988	+26,135	−60,970	−44,840	5
6	−43,112	+28,259	−1,591	−1,155	−47,947	+27,743	−31,248	−22,912	−51,887	+26,040	−60,890	−44,820	6
7	−38,643	+26,771	−2,303	−1,726	−45,681	+26,861	−31,444	−23,169	−51,712	+25,922	−60,822	−44,790	7
8	−33,741	+25,083	−3,136	−2,373	−42,746	+25,848	−31,681	−23,493	−51,324	+25,798	−60,530	−44,612	8
9	−28,794	+23,296	−3,650	−2,837	−39,113	+24,810	−31,870	−23,772	−50,617	+25,739	−59,886	−44,160	9
10	−23,705	+21,328	−3,995	−3,190	−34,585	+23,593	−32,161	−24,184	−49,331	+25,584	−58,741	−43,422	10
11	−17,892	+18,884	−4,059	−3,231	−28,582	+21,969	−32,527	−24,698	−46,620	+25,038	−56,982	−42,257	11
12	−12,091	+16,457	−4,069	−3,282	−20,759	+19,839	−33,365	−25,670	−42,048	+23,736	−54,610	−40,825	12
13	− 6,502	+13,957	−4,038	−3,267	−11,570	+16,612	−34,162	−26,720	−35,133	+21,481	−51,949	−39,340	13
14	− 1,282		−3,290		− 2,449	+13,053	−33,779	−26,877	−26,380	+18,353	−51,027	−39,296	14
15	+ 3,981	+ 9,352	−1,995	−1,697	+ 6,381	+ 9,279	−32,380	−26,221	−15,371	+14,055	−51,896	−40,815	15
16		+ 7,397		−0,937	+13,611	+ 6,112	−31,034	−25,553	− 5,197	+ 9,829	−53,550	−42,972	16
17	+13,824	+ 5,203	−0,383	−0,357	+21,553	+ 2,455	−29,784	−24,924	+ 7,559	+ 4,366	−55,878	−46,001	17
18	+18,224	+ 3,421	−0,489	−0,461	+27,859	− 0,666	−29,257	−24,794	+19,693	− 0,972	−57,845	−48,775	18
19	+22,583	+ 1,607	−1,249	−1,113	+33,489	− 3,570	−29,473	−25,320	+32,663	− 6,833	−59,230	−51,304	19
20	+27,040	− 0,261	−2,417	−2,102	+37,768	− 5,999	−30,573	−26,542	+45,131	−12,514	−59,366	−52,720	20
21	+31,856	− 2,340	−3,689	−3,208	+41,465	− 8,309	−32,089	−28,104	+55,275	−17,147	−58,499	−53,043	21
22	+37,058	− 4,519	−4,396	−3,849	+46,783	−10,870	−32,661	−28,930	+61,163	−20,199	−58,709	−53,959	22
23	+42,350	− 6,669	−4,527	−3,989	+53,707	−13,620	−32,240	−28,940	+63,548	−21,801	−60,273	−55,785	23
24	+48,445	− 9,105	−4,179	−3,756	+57,902	−15,232	−32,665	−29,494	+66,530	−23,197	−60,756	−56,608	24
25	+53,217	−10,850	−3,654	−3,310	+62,747	−17,106	−32,183	−29,389	+67,825	−23,912	−61,074	−57,118	25
26		−12,855		−2,849	+67,429	−19,035	−31,688	−29,160	+68,370	−24,290	−61,170	−57,263	26
27		−14,970		−2,073	+69,310	−20,054	−31,556	−29,239	+68,463	−24,340	−61,090	−57,270	27
28	+67,030	−17,281	−1,432	−1,437	+70,754	−20,850	−31,361	−29,221	+68,550	−24,420	−61,010	−57,270	28
29	+70,698		−1,127		+71,860	−21,850	−31,220	−29,232	+68,635	−24,500	−60,930	−57,200	29
30	+74,597	−21,360	−1,005	−1,131	+72,932	−22,609	−31,080	−29,223	+68,720	−24,580	−60,850	−57,130	30
31	+78,421	−23,422	−1,209	−1,300	+74,243	−23,391	−31,088	−29,260	+68,800	−24,660	−60,770	−57,060	31

Tabelle 2.

Nr.	Schwerpunkt des Fusses links				Fussspitze links				Kopfpunkt von links				Nr.
	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	
1	−48,732	+25,223	−65,006	−48,050	−39,170	+21,446	−65,230	−49,190	−58,045	+23,508	+57,386	+42,849	1
2	−48,681	+25,207	−64,991	−48,035	−39,162	+21,447	−65,254	−49,200	−53,167	+21,906	+58,414	+43,933	2
3	−48,679	+25,191	−64,976	−48,020	−39,154	+21,448	−65,278	−49,210	−48,457	+20,284	+59,292	+44,943	3
4	−48,642	+25,174	−64,960	−48,005	−39,146	+21,449	−65,303	−49,220	−43,999	+18,654	+59,735	+45,620	4
5	−48,640	+25,157	−64,944	−47,990	−39,137	+21,450	−65,327	−49,230	−39,492	+16,941	+59,684	+45,944	5
6	−48,630	+25,140	−64,928	−47,975	−39,128	+21,451	−65,348	−49,240	−35,031	+15,203	+59,180	+45,899	6
7	−48,620	+25,123	−64,910	−47,960	−39,119	+21,452	−65,370	−49,250	−30,522	+13,414	+58,308	+45,567	7
8	−48,583	+25,107	−64,763	−47,910	−38,987	+21,386	−65,580	−49,349	−25,727	+11,425	+57,271	+45,179	8
9	−48,224	+25,106	−64,435	−47,687	−38,719	+21,340	−65,850	−49,524	−21,136	+ 9,462	+56,444	+44,898	9
10	−47,516	+25,074	−63,920	−47,293	−38,375	+21,190	−66,245	−49,849	−16,725	+ 7,507	+55,922	+44,892	10
11	−46,055	+24,751	−62,740	−46,511	−37,503	+20,853	−66,760	−50,295	−12,089	+ 5,403	+55,841	+45,210	11
12	−43,318	+23,831	−60,190	−44,812	−36,694	+20,444	−66,640	−50,305	− 7,778	+ 3,390	+56,164	+45,908	12
13	−37,002	+21,910	−57,214	−43,072	−32,564	+19,294	−65,307	−49,642	− 3,463	+ 1,313	+56,789	+46,849	13
14	−28,171	+18,743	−56,265	−43,052	−23,270	+15,740	−64,055	−49,553	+ 0,724	− 0,607	+57,706	+48,043	14
15	−16,221	+14,070	−57,190	−44,783	−10,205	+10,195	−63,851	−50,697	+ 5,226	− 2,636	+58,751	+49,365	15
16	− 5,106	+ 9,500	−58,830	−47,200	+ 2,013	+ 5,040	−64,150	−52,242	+ 8,978	− 4,300	+59,424	+50,331	16
17	+ 8,935	+ 3,672	−60,920	−50,200	+17,255	− 1,290	−64,444	−54,120	+13,472	− 6,272	+59,728	+51,009	17
18	+22,272	− 2,050	−62,434	−52,935	+31,176	− 7,250	−63,976	−55,357	+17,673	− 8,168	+59,472	+51,239	18
19	+36,291	− 8,416	−63,048	−55,096	+45,478	−13,764	−62,146	−55,540	+22,219	−10,268	+58,806	+51,138	19
20	+49,690	−14,626	−62,152	−55,885	+58,320	−20,000	−58,766	−54,210	+26,821	−12,457	+57,916	+50,807	20
21	+60,451	−19,390	−60,253	−55,438	+68,252	−24,510	−55,117	−51,960	+31,421	−14,608	+57,024	+50,527	21
22	+66,447	−22,412	−60,380	−56,310	+74,167	−26,866	−55,144	−52,620	+36,103	−16,742	+56,369	+50,413	22
23	+68,565	−24,000	−62,500	−58,660	+77,020	−28,970	−58,340	−56,070	+40,742	−18,796	+55,972	+50,524	23
24	+70,886	−25,435	−64,090	−60,490	+79,800	−31,070	−62,300	−60,234	+45,452	−20,869	+55,979	+51,008	24
25	+71,710	−26,280	−64,800	−61,240	+80,850	−32,200	−64,520	−62,816	+49,833	−22,831	+56,326	+51,807	25
26	+71,760	−26,195	−64,910	−61,380	+80,660	−32,214	−65,000	−62,880	+54,587	−25,063	+56,973	+52,971	26
27	+71,778	−26,196	−64,860	−61,340	+80,692	−32,228	−65,000	−62,930	+59,242	−27,469	+57,779	+54,303	27
28	+71,796	−26,197	−64,810	−61,300	+80,724	−32,242	−65,000	−62,980	+64,149	−30,208	+58,602	+55,747	28
29	+71,814	−26,198	−64,760	−61,260	+80,756	−32,256	−65,000	−63,030	+68,516	−32,809	+59,162	+56,918	29
30	+71,833	−26,199	−64,710	−61,210	+80,788	−32,270	−65,000	−63,070	+72,841	−35,580	+59,330	+57,712	30
31	+71,853	−26,200	−64,650	−61,160	+80,820	−32,284	−65,000	−63,106	+76,837	−38,256	+58,970	+58,080	31

Die zugehörigen Constanten waren $\alpha = 30^0$ und ausserdem: für den photographischen Apparat 1^b:

$e = 446$ cm; $d = 55{,}5$ cm; $l_1 = 86$ cm und $l_1' = 6{,}43823$ cm[1]);

für den photographischen Apparat 2^b:

$e = 588{,}5$ cm; $d = 67$ cm; $l_2 = 86$ cm und $l_2' = 5{,}33310$ cm.

Beachtet man, dass Formel (8) für die linke Seite zunächst nur den entgegengesetzten Werth von y liefert, wie früher auseinandergesetzt worden ist, und stellt man infolge dessen vor diese Formel das negative Zeichen, so erhält man durch Einsetzen der Werthe für die Constanten in die Formeln (16), (7), (8) und (9) die folgenden, für die linke Seite des I. Versuchs geltenden Formeln:

1) Dieser und die Werthe aller folgenden l_1' oder l_2' sind Mittelwerthe aus je 10 Messungen.

$$x = \frac{142806 \, . \, \xi_1' - 396{,}09 \, . \, \xi_1' \eta_2'}{106909 + 197{,}53 \, . \, \xi_1' + 180{,}41 \, . \, \eta_2' - \xi_1' \eta_2'}, \tag{21}$$

$$y = -\frac{82449 \, . \, \xi_1' + 199068 \, . \, \eta_2' - 417{,}39 \, . \, \xi_1' \eta_2'}{106909 + 197{,}53 \, . \, \xi_1' + 180{,}41 \, . \, \eta_2' - \xi_1' \eta_2'}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (1{,}33577 - 0{,}00320 \, . \, y) \, . \, \zeta_1' \quad \text{und} \\ z_2 &= (1{,}61257 - 0{,}00253 \, . \, x - 0{,}00146 \, . \, y) \, . \, \zeta_2'. \end{aligned} \tag{23}$$

Die letzten beiden Formeln weichen der Form nach von den Formeln (20) ab, weil in ihnen von vornherein mit dem Nenner durchdividirt worden ist. Dies erwies sich in diesem und den späteren Fällen als für die Rechnung besonders praktisch.

Beim II. Versuch ergab die Messung folgende ebene Coordinaten für die Punkte der rechten Seite:

Tabelle 3.

II. Versuch, rechts (Tafel 1ª und 2ª).

Nr.	Schultergelenk rechts				Ellbogengelenk rechts				Handgelenk rechts				Nr.
	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	
1	−69,805	+37,062	+28,719	+22,686	−67,423	+40,763	+10,921	+ 8,605	−49,279	+35,324	− 1,549	−1,002	1
2	−65,773	+35,684	+29,115	+23,173	−64,134	+39,740	+11,044	+ 8,720	−48,240	+35,010	− 4,305	−3,209	2
3	−61,813	+34,361	+29,900	+23,964	−60,959	+38,127	+11,495	+ 9,202	−48,249	+35,166	− 6,263	−4,846	3
4	−57,742	+33,051	+30,845	+24,896	−58,222	+36,883	+12,116	+ 9,684	−48,927	+35,720	− 7,183	−5,597	4
5	−53,979	+31,855	+31,445	+25,517	−56,211	+36,008	+12,609	+10,108	−49,571	+36,404	− 7,417	−5,734	5
6	−49,981	+30,510	+31,647	+25,800	−54,111	+35,250	+12,976	+10,413	−49,845	+36,900	− 7,505	−5,803	6
7	−45,761	+29,170	+31,411	+25,850	−51,605	+34,463	+13,111	+10,584	−49,327	+36,960	− 7,659	−5,905	7
8	−41,932	+27,896	+30,916	+25,650	−48,928	+33,620	+12,957	+10,507	−48,136	+36,999	− 7,874	−6,220	8
9	−37,303	+26,371	+30,073	+25,137	−45,115	+32,460	+12,436	+10,118	−45,877	+36,636	− 8,319	−6,600	9
10	−32,883	+24,916	+29,155	+24,554	−40,957	+31,167	+11,601	+ 9,528	−42,805	+36,109	− 8,896	−7,075	10
11	−28,159	+23,431	+28,429	+24,135	−35,937	+29,636	+10,722	+ 8,833	−38,379	+35,149	− 9,481	−7,613	11
12	−23,512	+22,060	+28,148	+24,070	−30,700	+28,020	+10,200	+ 8,610	−32,807	+33,656	− 9,866	−8,073	12
13	−18,326	+20,525	+28,232	+24,374	−24,797	+26,280	+ 9,971	+ 8,410	−25,567	+31,492	−10,316	−8,440	13
14	−13,545	+18,981	+28,631	+24,944	−18,828	+24,495	+10,036	+ 8,600	−17,425	+28,660	−10,377	−8,550	14
15	− 8,915	+17,319	+29,415	+25,882	−12,402	+22,569	+10,569	+ 9,144	− 7,820	+25,281	− 9,807	−8,254	15
16	− 4,659	+15,730	+30,594?	+27,132	− 6,313	+20,573	+11,644	+10,156	+ 1,882	+21,310	− 8,008	−6,760	16
17	− 0,433	+14,150	+31,768	+28,370	− 0,542	+18,739	+12,865	+11,458	+11,258	+17,075	− 5,423	−4,602	17
18	+ 3,758	+12,690	+32,463	+28,900	+ 5,258	+16,922	+13,847	+12,303	+20,365	+12,618	− 2,474	−2,073	18
19	+ 8,118	+10,860	+32,452	+29,500	+11,357	+14,980	+14,258	+12,858	+29,040	+ 7,970	+ 0,467	+0,700	19
20	+12,530	+ 8,640	+31,913	+29,350	+17,509	+12,869	+14,271	+13,080	+36,794	+ 3,416	+ 3,047	+3,150	20
21	+16,771	+ 6,840	+31,194	+28,946	+23,075	+10,500	+13,990	+13,200	+43,079	− 0,140	+ 4,591	+4,700	21
22	+21,120	+ 4,840	+30,391	+28,500	+28,327	+ 8,080	+13,404	+13,040	+48,630	− 3,280	+ 5,119	+5,274	22
23	+26,106	+ 2,450	+29,593	+28,060	+33,635	+ 5,310	+12,561	+12,600	+53,989	− 5,000?	+ 4,464	+4,560	23
24	+30,769	+ 0,040	+29,116	+27,920	+37,864	+ 3,120	+11,812	+11,500	+57,939	− 8,100	+ 2,846	+3,060	24
25	+35,387	− 2,270	+28,923	+27,970	+41,615	+ 0,950	+11,222	+11,000	+60,997	− 9,130	+ 0,396	+1,200	25
26	+39,864	− 4,650	+29,069	+28,350	+44,832	− 0,860	+10,928	+10,640	+62,869	− 9,570	− 2,399	−2,147	26
27	+44,500	− 6,940	+29,431	+28,970	+48,097	− 2,880	+10,890	+10,720	+63,772	− 9,600	− 5,244	−5,000?	27
28	+48,507	− 8,740	+30,040	+29,700	+51,151	− 4,880	+11,227	+11,040	+63,791	− 8,520	− 7,223	−7,000?	28
29	+52,273	−10,660	+30,994	+31,000	+53,672	− 6,585	+11,889	+11,840	+63,351	− 8,000	− 7,748	−7,140?	29
30	+55,919	−12,610	+31,842	+32,056	+55,507	− 7,896	+12,619	+12,500	+63,040	− 7,100	− 7,565	−7,000?	30
31	+59,987	−14,700	+32,347	+32,900	+57,542	− 8,920	+13,333	+13,270	+63,043	− 6,500	− 7,255	−7,000?	31

? bedeutet unsicher!

Tabelle 3.

Nr.	Hüftgelenk rechts				Kniegelenk rechts				I. Fussgelenk rechts			
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2
1	−70,730	+36,801	−6,297	−4,841	−75,652	+38,464	−33,456	−26,081	−93,617	+40,363	−48,742	−37,360
2	−65,720		−6,195		−67,160	+35,887	−33,812	−26,741	−86,895	+38,408	−47,181	−36,561
3	−60,880		−5,395		−58,669	+32,990	−32,970	−26,450	−78,316	+35,737	−47,187	−37,160
4	−56,081	+31,683	−4,317	−3,366	−50,580	+30,120	−31,419	−25,591	−68,344	+32,407	−48,236	−38,672
5		+30,193		−2,660	−43,616	+27,606	−29,936	−24,675	−58,260	+29,016	−49,835	−40,705
6	−46,953	+28,710	−3,004	−2,640	−37,139	+25,113	−28,841	−24,067	−47,097	+25,190	−51,740	−43,132
7	−42,641	+27,211	−3,329	−2,606	−31,407	+22,781	−28,572	−24,138	−35,158	+20,986	−53,356	−45,473
8	−39,063	+25,932	−4,278	−3,400	−27,143	+20,941	−29,197	−24,881	−24,657	+17,233	−53,960	−46,865
9	−35,011	+24,564	−5,907	−4,786	−23,036	+18,806	−30,743	−26,403	−13,713	+13,369	−54,454	−47,368
10	−30,700	+23,094	−7,044	−5,803	−18,622	+16,789	−31,698	−27,560	− 6,449	+10,419	−52,937	−47,576
11	−25,583	+21,406	−7,289	−6,060	−12,154	+14,525	−31,220	−27,504	− 2,496	+ 8,167	−53,890	−48,919
12	−20,269	+19,600	−7,380	−6,177	− 6,760	+12,580	−31,248	−27,766	+ 0,249	+ 6,555	−54,608	−49,933
13	−15,085	+18,083	−6,766	−5,727	− 2,515	+11,650	−31,359	−27,894	+ 2,003	+ 5,816	−55,104	−50,548
14	−10,749	+16,789	−6,061	−5,173	+ 1,763	+10,213	−30,809	−27,650	+ 2,569	+ 5,593	−55,316	−50,834
15	− 6,770	+15,474	−5,311	−4,555	+ 3,574	+ 9,540	−30,965	−27,810	+ 2,770	+ 5,452	−55,293	−50,858
16		+13,943		−3,837	+ 4,624	+ 8,935	−31,004	−27,910	+ 2,816	+ 5,402	−55,272	−50,838
17	+ 0,727	+12,482	−3,893	−3,373	+ 5,350	+ 8,410	−31,029	−28,100	+ 2,854	+ 5,336	−55,243	−50,820
18	+ 4,229		−3,733		+ 5,960	+ 7,780	−31,064	−28,320	+ 2,879	+ 5,270	−55,127	−50,750
19	+ 7,813	+ 9,608	−3,776	−3,365	+ 6,800	+ 7,200	−31,105	−28,470	+ 2,929	+ 5,210	−55,074	−50,706
20	+11,612	+ 7,937	−4,139	−3,691	+ 7,950	+ 6,575	−31,225	−28,770	+ 3,005	+ 5,140	−55,064	−50,710
21	+15,253	+ 6,323	−4,706	−4,295	+ 9,465	+ 5,740	−31,487	−28,950	+ 3,166	+ 5,030	−54,994	−50,700
22	+18,970	+ 4,680	−5,231	−4,800	+11,540	+ 4,780	−31,567	−29,250	+ 3,544	+ 4,832	−54,720	−50,45
23	+23,579	+ 2,467	−5,532	−5,178	+15,000	+ 3,530	−31,631	−29,530	+ 4,382	+ 4,583	−54,044	−49,90
24	+28,280	+ 0,218	−5,762	−5,444	+19,397	+ 1,930	−31,873	−30,000	+ 5,763	+ 4,134	−52,990	−49,07
25	+33,302	− 2,403	−5,887	−5,586	+24,950	− 0,140	−32,382	−30,770	+ 8,360	+ 3,103	−51,394	−47,88
26	+38,485	− 5,229	−5,967	−5,763	+32,550	− 2,788	−33,286	−31,990	+12,642	+ 1,506	−49,423	−46,42
27	+43,866	− 7,990	−6,242	−6,200	+41,743	− 6,975	−34,118	−33,440	+19,254	− 1,064	−47,486	−45,21
28	+48,795		−5,641		+50,629	−11,550	−33,553	−33,510	+27,671	− 4,708	−47,171	−45,66
29	+53,335	−13,050	−4,537	−4,363	+58,547	−15,580	−32,041	−32,590	+36,978	− 9,144	−47,872	−47,24
30		−15,304		−3,444	+65,683	−19,380	−30,456	−31,390	+46,885	−14,036	−49,368	−49,78
31	+62,943	−17,749	−2,786	−2,783	+72,477	−23,170	−29,163	−30,470	+58,204	−19,892	−51,443	−53,2[illegible]

Nr.	Schwerpunkt des Fusses rechts				Fussspitze rechts				Kopfpunkt von rechts			
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ξ'_1	ξ'_1	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2
1	−95,128	+40,703	−53,090	−40,543	−90,226	+38,203	−60,194	−46,469	−64,233	+25,523	+51,394	+42,158
2	−88,545	+38,665	−51,423	−39,700	−83,856	+35,716	−58,359	−45,662	−59,946	+23,811	+52,026	+43,047
3	−79,630	+35,712	−51,520	−40,430	−74,188	+31,812	−57,444	−45,880	−55,662	+22,213	+52,951	+44,138
4	−68,876	+32,237	−52,684	−42,180	−62,370	+27,880	−57,707	−47,070	−51,250	+20,636	+53,883	+45,286
5	−57,863	+28,636	−53,316	−44,398	−50,348	+24,008	−58,117	−48,454	−47,251	+19,244	+54,476	+46,139
6	−45,672	+24,603	−56,082	−46,872	−37,378	+19,864	−58,246	−49,696	−43,116	+17,826	+54,649	+46,610
7	−32,649	+20,084	−57,220	−49,036	−23,984	+15,268	−57,339	−50,164	−38,825	+16,356	+54,327	+46,714
8	−21,258	+15,973	−57,234	−50,132	−12,740	+11,078	−55,368	−49,623	−35,014	+14,991	+53,726	+46,533
9	− 9,420	+11,825	−55,960	−50,140	− 1,491	+ 7,322	−52,103	−47,756	−30,469	+13,355	+52,795	+46,129
10	− 1,966	+ 9.076	−54,886	−49,840	+ 5,411	+ 5,450	−50,010	−46,377	−26,244	+11,813	+52,038	+45,822
11	+ 1,740	+ 6,934	−56,189	−51,540	+ 9,497	+ 3,466	−52,006	−48,684	−21,813	+10,216	+51,573	+45,794
12	+ 4,140	+ 5,140	−57,451	−53,040	+12,454	+ 0,633	−54,887	−51,800	−17,532	+ 8,670	+51,436	+46,047
13	+ 5,324	+ 4,473	−58,500	−54,150	+13,856	− 0,517	−57,390	−54,270	−13,118	+ 7,071	+51,684	+46,645
14	+ 5,619	+ 4,294	−58,740	−54,440	+14,140	− 0,944	−58,267	−55,170	− 9,193	+ 5,617	+52,254	+47,494
15	+ 5,626	+ 4,266	−58,720	−54,426	+14,170	− 0,963	−58,365	−55,210	− 4,997	+ 3,995	+53,131	+48,676
16	+ 5,640	+ 4.242	−58,714	−54,404	+14,195	− 0,990	−58,407	−55,230	− 0,861	+ 2,246	+54,080	+49,934
17	+ 5,647	+ 4,216	−58,690	−54,390	+14,210	− 1,004	−58,430	−55,280	+ 3,109	+ 0,498	+54,802	+51,025
18	+ 5,662	+ 4,190	−58,660	−54,360	+14,225	− 1,021	−58,473	−55,330	+ 7,057	− 1,280	+55,134	+51,733
19	+ 5,674	+ 4,176	−58,645	−54,340	+14,240	− 1,040	−58,520	−55,354	+11,137	− 3,186	+54,984	+52,053
20	+ 5,694	+ 4,150	−58,620	−54,320	+14,254	− 1,085	−58,580	−55,390	+15,318	− 5,169	+54,452	+52,011
21	+ 5,725	+ 4,100	−58,594	−54,280	+14,273	− 1,115	−58,640	−55,460	+19,248	− 7,025	+53,740	+51,769
22	+ 5,940	+ 4,044	−58,420	−54,180	+14,420	− 1,170	−58,820	−55,560	+23,206	− 8,986	+53,015	+51,512
23	+ 6,333	+ 3,884	−58,016	−53,790	+14,744	− 1,296	−59,084	−55,890	+27,753	−11,369	+52,379	+51,426
24	+ 6,973	+ 3,722	−57,356	−53,216	+15,150	− 1,476	−59,417	−56,210	+32,010	−13,723	+52,004	+51,566
25	+ 8,391	+ 3,023	−55,965	−52,055	+15,790	− 1,772	−59,900	−56,720	+36,341	−16,177	+51,950	+52,035
26	+11,287	+ 1,843	−53,995	−50,467	+16,578	− 2,143	−60,387	−57,210	+40,330	−18,537	+52,181	+52,760
27	+17,363	− 0,695	−51,866	−49,110	+21,208	− 4,780	−58,705	−56,376	+44,401	−20,964	+52,707	+53,800
28	+25,830	− 4,494	−51,607	−49,670	+29,780	− 9,710	−57,570	−56,408	+48,557	−23,369	+53,539	+55,200
29	+35,828	− 9,172	−52,428	−51,570	+40,640	−14,922	−57,740	−57,900	+52,812	−25,8[illegible]	[illegible]	[illegible]
30	+46.761	−14,350	−54,022	−54,375	+52,846	−20,574	−58,340	−60,010	+56,949	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	+59,216	−20,593	−56,015	−57,994	+66,410	−27,340	−58,805	−62,296	+61,162	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Als Werthe der Constanten hatten sich beim II. Versuch ergeben, für den photographischen Apparat 1ᵃ:

$$e = 438 \text{ cm}; \quad d = 52 \text{ cm}: \quad l_1 = 86 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l_1' = 5.88277 \text{ cm},$$

und für den photographischen Apparat 2ᵃ:

$$e = 634{,}5 \text{ cm}. \quad d = 69 \text{ cm}: \quad l_2 = 86 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l_2' = 5{,}47414 \text{ cm}.$$

Infolge dessen lauteten die Formeln zur Berechnung der räumlichen Coordinaten für die rechte Seite des II. Versuchs:

$$x = \frac{156527 \,.\, \xi_1' - 454{,}75 \,.\, \xi_1' \eta_2'}{107071 + 220{,}16 \,.\, \xi_1' + 162{,}11 \,.\, \eta_2' - \xi_1' \eta_2'}, \tag{24}$$

$$y = \frac{90371 \,.\, \xi_1' + 194234 \,.\, \eta_2' - 410{,}48 \,.\, \xi_1' \eta_2'}{107071 + 220{,}16 \,.\, \xi_1' + 162{,}11 \,.\, \eta_2' - \xi_1' \eta_2'}, \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (1{,}46190 - 0{,}00356 \,.\, y) \,.\, \zeta_1' \quad \text{und} \\ z_2 &= (1{,}57102 - 0{,}00227 \,.\, x - 0{,}00131 \,.\, y) \,.\, \zeta_2' . \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Diese Formeln weichen etwas ab von den Formeln (18), (19) und (20) infolge der geringen Verschiedenheiten in den Werthen von l_1' und l_2'. Man könnte aber unbedenklich jene Formeln an Stelle dieser verwenden, da erst in den späteren Decimalstellen ein Unterschied in den sich ergebenden Coordinatenwerthen zu Tage tritt.

Die ebenen Coordinaten der linken Seite waren beim II. Versuch folgende:

Tabelle 4. **II. Versuch, links** (Tafel 1b und 2b).

Nr.	Schultergelenk links				Ellbogengelenk links				Handgelenk links				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−76,053	+38,319	+30,427	+21,342	−79,259	+43,301	+10,247	+ 7,057	−76,833	+45,734	−11,397	− 7,687	1
2	−71,312	+36,987	+31,020	+21,890	−72,636	+41,239	+10,607	+ 7,383	−67,425	+42,110	−10,940	− 7,500	2
3	−66,689	+35,611	+32,125	+22,829	−66,089	+39,091	+11,684	+ 8,218	−57,489	+37,979	− 9,216	− 6,443	3
4	−61,796	+34,112	+33,562	+24,041	−59,571	+37,019	+13,278	+ 9,419	−47,262	+33,401	− 6,241	− 4,435	4
5	−57,217	+32,680	+34,689	+25,015	−53,721	+35,269	+14,680	+10,502	−38,223	+29,565	− 2,885	− 1,760?	5
6	−52,399	+31,152	+35,252	+25,640	−47,723	+33,589	+15,655	+11,374	−29,644	+24,880	+ 0,785	+ 0,649	6
7	−47,464	+29,489	+35,094	+25,752	−41,520	+31,824	+16,054	+11,709	−21,796	+20,882	+ 4,241	+ 3,306	7
8	−42,103	+27,939	+34,457	+25,441	−36,094	+30,159	+15,934	+11,720	−15,598	+17,738	+ 6,593	+ 5,140	8
9	−37,893	+26,011	+33,399	+24,901	−29,867	+28,030	+15,262	+11,378	− 9,113	+14,734	+ 8,231	+ 6,562	9
10	−32,957	+24,142	+32,339	+24,300	−24,494	+25,956	+14,302	+10,743	− 3,639	+12,364	+ 8,461	+ 6,716	10
11	−27,717	+22,064	+31,510	+23,926	−19,443	+23,807	+13,256	+10,075	+ 1,537	+10,481	+ 7,417	+ 5,966	11
12	−22,837	+19,986	+31,096	+23,855	−15,023	+21,792	+12,544	+ 9,622	+ 5,719	+ 9,129	+ 5,216	+ 4,253	12
13	−18,057	+17,965	+31,042	+24,034	−10,972	+19,893	+12,095	+ 9,360	+ 9,246	+ 8,388	+ 2,090	+ 1,749	13
14	−13,581	+16,092	+31,478	+24,578	− 7,285	+18,233	+12,223	+ 9,600	+11,403	+ 8,365	− 1,193	− 0,973	14
15	− 9,175	+14,321	+32,221	+25,359	− 3,243	+16,505	+12,758	+ 9,975	+12,434	+ 9,111	− 4,366	− 3,519	15
16	− 4,912	+12,633	+33,150	+26,327	+ 0,055	+15,069	+13,394	+10,538	+12,594	+10,475	− 5,891	− 4,840	16
17	− 0,677	+10,966	+33,969	+27,060	+ 2,663	+14,171	+13,954	+11,004	+12,357	+11,848	− 6,525	− 5,363	17
18	+ 3,617	+ 9,214	+34,356	+27,634	+ 5,154	+13,493	+14,286	+11,313	+12,335	+13,091	− 6,970	− 5,320	18
19	+ 8,188	+ 7,400	+34,263	+27,776	+ 7,818	+12,822	+14,454	+11,417	+12,790	+14,301	− 7,091	− 5,775	19
20	+12,777	+ 5,506	+33,918	+27,720	+10,937	+11,919	+14,368	+11,392	+14,216	+14,597	− 7,327	− 5,800	20
21	+17,075	+ 3,558	+33,275	+27,535	+14,416	+10,730	+13,967	+11,130	+16,556	+14,597	− 7,539	− 6,227	21
22	+21,539	+ 1,808	+32,464	+27,040	+18,539	+ 9,187	+13,263	+10,640	+19,792	+13,920	− 8,019	− 6,550	22
23	+26,842	− 0,378	+31,590	+26,578	+23,943	+ 7,050	+12,340	+ 9,995	+24,779	+12,400	− 8,656	− 7,160	23
24	+31,888	− 2,376	+31,116	+26,440	+29,445	+ 4,763	+11,646	+ 9,530	+30,814	+ 9,955	− 9,309	− 7,880	24
25	+37,217	− 4,510	+30,854	+26,500	+35,510	+ 2,271	+11,174	+ 9,231	+38,223	+ 6,123	−10,108	− 8,530	25
26	+42,478	− 6,750	+30,923	+26,850	+41,877	− 0,500	+11,031	+ 9,257	+46,475	+ 2,220	−10,418	− 9,000	26
27	+47,577	− 8,990	+31,356	+27,510	+48,589	− 3,561	+11,290	+ 9,692	+55,813	− 3,040	−10,002	− 8,780	27
28	+52,201	−11,140	+32,176	+28,625	+54,917	− 6,495	+12,145	+10,526	+64,974	− 8,900	− 8,504		28
29	+56,787	−13,380	+33,401	+30,020	+61,038	− 9,377	+13,551	+11,961	+73,636	−14,600	− 5,749	− 5,430?	29
30	+61,278	−15,550	+34,517	+31,374	+66,929	−12,130	+14,935	+13,440	+81,596	−20,700	− 2,553	− 2,430	30
31	+65,969	−17,910	+35,141	+32,237	+73,061	−14,950	+15,981	+14,570	+89,243	−26,750	+ 0,185	+ 0,900?	31

Nr.	Hüftgelenk links				Kniegelenk links				I. Fussgelenk links				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−72,614	+36,027	−3,996	−2,673	−61,003	+31,324	−31,897	−22,833	−56,393	+26,670	−60,893	−44,483	
2		+34,958		−2,120	−58,408	+30,637	−31,742	−22,824	−56,248	+26,589	−60,910	−44,511	2
3		+33,577		−1,459	−56,754	+30,228	−31,554	−22,759	−56,185	+26,560	−60,880	−44,493	3
4	−59,865		−1,593		−55,513	+29,694	−31,437	−22,741	−56,153	+26,530	−60,840	−44,470	4
5	−56,169		−1,240		−54,562	+29,246	−31,301	−22,680	−56,128	+26,520	−60,770	−44,447	5
6	−52,329	+30,068	−1,207	−0,826	−53,578	+28,763	−31,175	−22,655	−56,073	+26,500	−60,710	−44,420	6
7	−48,250	+28,775	−1,513	−1,089	−52,075	+28,166	−31,179	−22,741	−56,030	+26,460	−60,630	−44,393	7
8	−44,406	+27,529	−2,062	−1,523	−50,402	+27,496	−31,289	−22,915	−55,987	+26,420	−60,570	−44,350	8
9	−39,665	+25,892	−2,919	−2,182	−47,980	+26,572	−31,511	−23,172	−55,728	+26,320	−60,404	−44,247	9
10	−35,167	+24,265	−3,523	−2,661	−44,881	+25,553	−31,687	−23,436	−55,203	+26,201	−59,890	−43,959	10
11	−30,118	+22,364	−3,870	−3,005	−40,358	+24,306	−32,021	−23,886	−54,063	+26,045	−58,975	−43,287	11
12	−24,791	+20,202	−4,022	−3,151	−34,965	+22,830	−32,377	−24,373	−51,948	+25,654	−57,430	−42,301	12
13	−18,808	+17,672	−4,040	−3,202	−27,297	+20,744	−33,120	−25,238	−47,687	+24,509	−55,101	−40,895	13
14	−13,496	+15,409	−4,178	−3,346	−18,607	+17,743	−34,038	−26,349	−41,563	+22,601	−52,417	−39,315	14
15	− 8,081	+12,927	−3,627	−2,954	− 8,860	+13,933	−33,874	−26,722	−32,731	+19,514	−50,811	−38,753	15
16	− 3,140		−2,403		− 0,364	+10,449	−32,494	−26,074	−22,493	+15,562	−51,220	−39,834	16
17	+ 1,786	+ 8,764	−1,485	−1,076	+ 7,480	+ 7,126	−30,954	−25,218	−11,454	+11,031	−52,842	−42,012	17
18		+ 6,611		−0,529	+14,935	+ 3,825	−29,630	−24,527	+ 0,458	+ 5,983	−55,032	−44,814	18
19		+ 4,572		−0,493	+21,721	+ 0,531	−28,970	−24,306	+13,298	+ 0,352	−57,237	−47,835	19
20	+16,506	+ 2,518	−1,324	−1,106	+27,485	− 2,541	−29,227	−24,889	+26,439	− 5,624	−58,754	−50,424	20
21	+20,829	+ 0,680	−2,440	−2,072	+31,463	− 4,953	−30,323	−26,090	+38,088	−11,110	−58,962	−51,874	21
22	+25,381	− 1,331	−3,612	−3,122	+34,777	− 7,152	−31,745	−27,500	+47,829	−15,821	−58,026	−52,098	22
23	+30,825	− 3,635	−4,346	−3,764	+40,395	−10,100	−32,269	−28,100	+54,209	−19,551	−58,020	−52,945	23
24	+35,935	− 5,783	−4,488	−3,919	+47,095	−12,900	−31,851	−28,200	+56,574	−21,411	−59,381	−54,599	24
25	+41,939	− 8,207	−4,137	−3,700	+51,196	−14,630	−32,209	−28,730	+59,501	−22,953	−59,760	−55,341	25
26	+46,705	−10,007	−3,595	−3,256	+56,561	−16,700	−31,531	−28,600	+60,690	−23,654	−60,027	−55,788	26
27		−11,980		−2,900	+60,615	−18,500	−31,266	−28,600	+61,263	−24,014	−60,108	−55,930	27
28	+55,670	−14,049	−2,335	−2,144	+62,653	−19,500	−31,153	−28,640	+61,354	−24,100	−60,100	−55,914	28
29	+59,699		−1,670		+64,014	−20,420	−31,038	−28,650	+61,381	−24,140	−60,085	−55,870	29
30	+63,340	−18,080	−1,276	−1,550	+65,033	−21,260	−30,884	−28,640	+61,422	−24,190	−60,040	−55,827	30
31	+62,232	−20,129	−1,117	−1,092	+66,043	−21,950	−30,756	−28,645	+61,470	−24,240	−59,970	−55,810	31

? bedeutet unsicher!

Tabelle 4.

Nr.	Schwerpunkt des Fusses links				Fusspitze links				Kopfpunkt von links				Nr.
	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	
1	−52,787	+25,470	−64,522	−47,505	−43,380	+21,425	−64,520	−48,410	−69,853	+26,368	+56,042	+41,108	1
2	−52,795	+25,470	−64,510	−47,500	−43,360	+21,425	−64,555	−48,430	−65,403	+25,084	+56,885	+41,976	2
3	−52,800	+25,465	−64,503	−47,495	−43,340	+21,425	−64,574	−48,450	−60,755	+23,559	+57,945	+43,052	3
4	−52,817	+25,460	−64,490	−47,490	−43,330	+21,425	−64,600	−48,470	−55,945	+21,869	+58,936	+44,147	4
5	−52,835	+25,450	−64,470	−47,480	−43,320	+21,425	−64,620	−48,490	−51,523	+20,226	+59,553	+44,929	5
6	−52,826	+25,447	−64,450	−47,470	−43,310	+21,425	−64,650	−48,510	−46,936	+18,452	+59,642	+45,356	6
7	−52,810	+25,425	−64,430	−47,450	−43,310	+21,425	−64,670	−48,530	−42,231	+16,574	+59,238	+45,458	7
8	−52,800	+25,416	−64,420	−47,430	−43,310	+21,425	−64,690	−48,560	−38,054	+14,921	+58,539	+45,232	8
9	−52,780	+25,408	−64,400	−47,380	−43,310	+21,410	−64,770	−48,620	−33,073	+12,890	+57,479	+44,833	9
10	−52,440	+25,383	−64,180	−47,280	−43,117	+21,340	−65,035	−48,780	−28,430	+10,972	+56,553	+44,471	10
11	−51,964	+25,338	−63,747	−46,956	−42,660	+21,220	−65,370	−49,017	−23,594	+ 8,891	+55,946	+44,433	11
12	−50,830	+25,144	−62,900	−46,366	−41,990	+20,995	−65,847	−49,405	−18,902	+ 6,810	+55,672	+44,594	12
13	−48,445	+24,374	−60,660	−44,884	−41,050	+20,503	−66,090	−49,626	−14,117	+ 4,632	+55,795	+45,157	13
14	−43,254	+22,883	−57,780	−43,111	−38,483	+19,732	−65,294	−49,358	− 9,848	+ 2,667	+56,255	+45,954	14
15	−34,621	+19,865	−56,082	−42,504	−29,790	+16,733	−63,600	−48,840	− 5,335	+ 0,617	+57,088	+47,045	15
16	−23,630	+15,624	−56,525	−43,780	−17,995	+11,706	−63,242	−49,700	− 0,889	− 1,375	+58,006	+48,265	16
17	−11,517	+10,677	−58,136	−46,140	− 4,709	+ 6,109	−63,500	−51,260	+ 3,362	− 3,253	+58,703	+49,295	17
18	+ 1,588	+ 5,243	−60,175	−49,020	+ 9,603	+ 0,110	−63,810	−53,020	+ 7,588	− 5,128	+59,024	+49,960	18
19	+15,741	− 0,786	−61,913	−51,965	+24,558	− 6,176	−63,516	−54,456	+11,952	− 7,074	+58,846	+50,245	19
20	+30,010	− 7,230	−62,624	−54,230	+39,124	−12,000?	−61,880	−54,810	+16,406	− 9,112	+58,269	+50,222	20
21	+42,603	−13,140	−61,790	−55,020	+51,225	−18,700	−58,700	−53,524	+20,594	−11,095	+57,450	+49,960	21
22	+52,935	−18,160	−59,872	−54,550	+60,726	−24,100?	−54,970	−51,070	+24,832	−13,070	+56,671	+49,672	22
23	+59,423	−21,780	−59,570	−55,180	+67,028	−26,450	−54,260	−51,500	+29,694	−15,297	+56,013	+49,633	23
24	+61,518	−23,680	−61,556	−57,380	+69,663	−28,650	−57,404	−54,950	+34,283	−17,393	+55,675	+49,826	24
25	+63,735	−25,560	−62,780	−58,910	+72,300	−31,240	−60,970	−58,610	+38,930	−19,506	+55,602	+50,202	25
26	+64,660	−25,730	−63,590	−59,580	+73,100	−31,800	−63,080	−60,670	+43,238	−21,481	+55,914	+50,890	26
27	+64,600	−26,000	−63,670	−59,620	+73,285	−32,100	−63,584	−61,230	+47,657	−23,563	+56,525	+52,000	27
28	+64,610	−26,000	−63,640	−59,640	+73,290	−32,130	−63,610	−61,250	+52,093	−25,803	+57,374	+53,320	28
29	+64,620	−26,000	−63,620	−59,680	+73,300	−32,150	−63,620	−61,270	+56,618	−28,217	+58,224	+54,760	29
30	+64,630	−26,000	−63,600	−59,710	+73,300	−32,170	−63,640	−61,300	+60,959	−30,644	+58,865	+55,870	30
31	+64,640	−26,000	−63,580	−59,730	+73,300	−32,190	−63,660	−61,330	+65,329	−33,313	+59,096	+56,790	31

Die zugehörigen Constanten betrugen für den II. Versuch beim photographischen Apparat 1^b:

$e = 446$ cm; $d = 55{,}5$ cm; $l_1 = 86$ cm und $l_1' = 6{,}42504$ cm,

und beim photographischen Apparat 2^b:

$e = 588{,}5$ cm; $d = 67$ cm; $l_2 = 86$ cm und $l_2' = 5{,}31771$ cm.

Hieraus ergeben sich als Formeln zur Berechnung der räumlichen Coordinaten der linken Seite beim II. Versuch:

$$x = \frac{142356 \,.\, \xi_1' - 396{,}02 \,.\, \xi_1'\eta_2'}{106354 + 196{,}93 \,.\, \xi_1' + 180{,}02 \,.\, \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}\,, \tag{27}$$

$$y = -\frac{82189 \,.\, \xi_1' + 198607 \,.\, \eta_2' - 417{,}34 \,.\, \xi_1'\eta_2'}{106354 + 196{,}93 \,.\, \xi_1' + 180{,}02 \,.\, \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}\,, \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = (1{,}33851 - 0{,}003207 \,.\, y) \,.\, \zeta_1' \quad \text{und} \\ z_2 = (1{,}61724 - 0{,}002539 \,.\, x - 0{,}001466 \,.\, y) \,.\, \zeta_2'\,, \end{array}\right\} \tag{29}$$

? bedeutet unsicher!

Die Unterschiede zwischen diesen und den entsprechenden Formeln (21), (22) und (23) des ersten Versuchs sind wiederum so gering, dass man bis zu der Genauigkeit, welche man für die Coordinaten erzielen kann, übereinstimmende Werthe durch beide Formelgruppen erhält. —

Beim III. Versuch, welcher bei grosser Belastung des Mannes angestellt worden war, ergaben sich durch die directe Messung die in der folgenden Tabelle niedergelegten Coordinatenwerthe für die rechte Seite, wobei bemerkt sein mag, dass zu den schon früher für die Messnng bestimmten Punkten noch einer auf der Geissler'schen Röhre des Oberschenkels hinzugenommen worden war.

Tabelle 5.

III. Versuch, rechts (Tabelle 1a und 2a).

Nr.	Schultergelenk rechts				Ellbogengelenk rechts				Handgelenk rechts				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−61,373	+33,423	+30,721	+24,022	−60,327	+36,632	+12,017	+ 9,202	−50,062	+34,367	− 8,976	−7,200	1
2	−57,405	+32,284	+31,492	+24,842	−58,068	+36,259	+12,775	+ 9,807	−50,613	+35,682	− 9,109	−7,307	2
3	−53,492	+31,159	+31,981	+25,400	−55,897	+36,047	+13,438	+10,360	−50,760	+36,773	− 9,014	−7,217	3
4	−49,594	+30,024	+32,070	+25,664	−53,734	+35,800	+13,886	+10,742	−50,382	+37,715	− 8,837	−7,010	4
5	−45,682	+28,904	+31,743	+25,550	−51,213	+35,374	+13,964	+10,842	−48,319	+38,371	− 8,836	−7,064	5
6	−41,748	+27,850	+31,097	+25,250	−48,033	+34,667	+13,572	+10,546	−47,359	+38,597	− 9,160	−7,316	6
7	−37,729	+26,680	+30,270	+24,750	−44,209	+33,765	+12,844	+10,054	−44,422	+38,435	− 9,759	−7,785	7
8	−33,430	+25,446	+29,470	+24,316	−39,691	+32,635	+11,953	+ 9,439	−40,247	+37,777	−10,483	−8,445	8
9	−28,987	+24,274	+28,970	+24,109	−34,615	+31,304	+11,250	+ 8,954	−34,630	+36,365	−11,200	−9,027	9
10	−24,493	+23,008	+28,900	+24,260	−29,135	+29,776	+10,961	+ 8,830	−27,797	+34,236	−11,554	−9,463	10
11	−20,107	+21,730	+29,370	+24,890	−23,273	+38,084	+11,176	+ 9,130	−19,737	+31,369	−11,360	−9,360	11
12	−16,033	+20,372	+30,152	+25,760	−17,417	+26,252	+11,814	+ 9,801	−11,015	+27,840	−10,330?		12
13	−12,084	+19,008	+31,207	+25,920	−11,529	+24,299	+12,942	+10,904	− 1,822	+23,710	− 8,407	−7,192	13
14	− 8,309	+17,660	+32,294		− 5,784	+22,291	+14,290	+12,210	+ 7,032	+19,250	− 5,790	−4,885	14
15	− 4,525	+16,200	+33,085		+ 0,100	+20,191	+15,430	+13,480	+15,477	+14,415	− 2,696	−2,230	15
16	− 0,835	+14,750	+33,327	+29,463	+ 5,249	+18,141	+16,180	+14,310	+22,924	+ 9,807	+ 0,260	+0,468	16
17	+ 2,955	+13,200	+33,063		+10,465	+16,060	+16,360	+14,440	+29,639	+ 5,300	+ 2,860	+2,980	17
18	+ 6,819	+11,560	+32,396	+29,220	+15,475	+13,840	+16,120	+14,480	+35,472	+ 1,300	+ 4,934	+4,980	18
19	+10,908	+ 9,725	+31,533	+28,720	+20,202	+11,540	+15,544	+14,240	+40,619	− 2,160	+ 6,060	+6,170	19
20	+15,013	+ 7,750	+30,700	+28,230	+24,744	+ 9,300	+14,725	+13,720	+45,012	− 5,000?	+ 6,030		20
21	+19,252	+ 5,660	+29,950	+27,860	+28,859	+ 7,190	+13,854	−13,120	+48,990	− 7,250?	+ 4,742		21
22	+21,392	+ 3,510	+29,483	+27,710	+32,557	+ 5,000	+13,036	−12,580	+52,132	− 8,800?	+ 2,593		22
23	+27,522	+ 1,220	+29,317	+27,800	+35,704	+ 3,230	+12,400	−12,050	+54,539	− 9,560	− 0,248		23
24	+31,638	− 0,980	+29,450	+28,200	+38,558	+ 1,500	+12,030	−11,810	+55,871	− 9,220	− 3,360		24
25	+35,578	− 3,000	+29,834		+41,113	− 0,125	+11,940	−11,720	+56,142	− 8,100	− 6,106		25
26	+39,279	− 4,880	+30,561	+29,839?	+43,413	− 1,720	+12,200	−12,080	+55,601	− 6,600	− 7,880		26
27	+42,947	− 6,730	+31,348	+30,900	+45,277	− 2,853	+12,730	−12,600	+54,902	− 4,970?	− 8,530		27
28	+56,506	− 8,760	+31,900	+31,820	+46,978	− 3,600	+13,306	−13,170	+54,495	− 3,800	− 8,600		28
29	+50,281	−10,820	+32,086	+32,270	+48,952	− 4,410	+13,770	−13,715	+54,572	− 3,000?	− 8,565		29
30	+54,119	−12,900	+31,874	+32,280	+51,336	− 5,476	+13,930	−13,920	+55,453	− 3,000?	− 8,617		30
31	+57,930	−15,030	+31,286	+32,090	+54,231	− 6,810	+13,700	−13,780	+57,235	− 3,000?	− 8,884		31

? bedeutet unsicher!

Tabelle 5.

Nr.	Hüftgelenk rechts				Kniegelenk rechts				I. Fussgelenk rechts				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−63,954		−1,755		−62,441	+31,990	−29,392	−23,422	−79,703	+35,137	−47,908	−37,459	1
2	−60,184		−0,826		−55,869	+30,074	−28,181	−22,694	−69,796	+32,199	−49,542	−39,346	2
3					−49,773	+28,420	−27,172	−22,100	−59,154	+28,998	−61,546	−41,695	3
4		+29,310		−0,272	−44,462	+26,799	−26,638	−21,878	−48,128	+25,772	−53,372	−44,000	4
5		+28,239		−0,662	−40,175	+25,364	−26,930	−22,277	−36,986	+22,597	−54,473	−45,795	5
6	−45,369	+27,090	−1,748	−1,480	−36,626	+24,104	−28,057	−23,382	−26,530	+19,679	−54,482	−46,637	6
7	−41,401	+25,983	−2,836	−2,381	−33,248	+22,739	−29,308	−24,605	−18,264	+17,356	−53,772	−46,655	7
8	−37,238	+24,915	−3,522	−2,942	−28,160	+21,223	−29,760	−25,199	−13,550	+15,833	−54,367	−47,622	8
9	−32,717	+23,645	−3,930	−3,282	−22,475	+19,991	−29,807	−25,458	−11,048	+14,802	−55,591	−48,957	9
10		+22,580		−3,087	−19,235	+19,197	−30,170	−25,910	− 8,881	+14,075	−56,253	−49,750	10
11		+21,421		−2,538	−14,530	+18,061	−29,626	−25,583	− 7,953	+13,663	−56,517	−50,113	11
12	−19,073	+20,162	−2,363	−2,002	−10,878	+16,968	−29,142	−25,373	− 7,680	+13,489	−56,549	−50,171	12
13	−15,232	+19,017	−1,525	−1,268	− 9,808	+16,484	−28,969	−25,295	− 7,661	+13,432	−56,545	−50,160	13
14	−11,784		−0,820		− 9,431	+16,235	−28,703	−25,071	− 7,650	+13,430	−56,494	−50,147	14
15	− 8,185		−0,410		− 8,711	+15,777	−28,330	−24,804	− 7,632	+13,366	−56,393	−50,087	15
16	− 4,601	+14,979	−0,434	−0,374	− 7,432	+15,114	−28,163	−24,753	− 7,600	+13,255	−56,335	−50,049	16
17	− 0,901	+13,531	−0,724	−0,574	− 6,171	+14,531	−28,063	−24,753	− 7,560	+13,167	−56,284	−50,020	17
18	+ 2,619	+12,072	−1,183	−1,037	− 4,964	+13,912	−27,926	−24,779	− 7,515	+13,097	−56,269	−50,025	18
19	+ 6,410	+10,501	−1,843	−1,657	− 2,968	+12,944	−28,059	−25,008	− 7,368	+12,978	−56,177	−49,990	19
20	+10,211	+ 8,809	−2,424	−2,210	− 0,548	+11,854	−28,064	−25,136	− 7,010	+12,850	−55,838	−49,720	20
21	+14,308	+ 6,773	−2,682	−2,426	− 2,653	+10,533	−27,915	−25,179	− 6,282	+12,663	−55,159	−49,167	21
22	+18,796	+ 4,422	−2,799	−2,553	+ 6,997	+ 8,736	−28,020	−25,494	− 4,944	+12,222	−54,005	−48,280	22
23	+23,498	+ 1,661	−2,743	−2,502	+12,454	+ 6,226	−28,258	−26,034	− 2,398	+11,002	−52,306	−47,054	23
24	+28,137	− 1,164	−2,690	−2,405	+19,574	+ 3,105	−28,973	−27,101	+ 1,792	+ 8,958	−49,971	−45,419	24
25	+32,422		−2,550		+27,495	− 0,790	−29,823	−28,423	+ 7,809	+ 5,939	−47,685	−43,963	25
26	+36,498		−1,869		+35,439	− 5,020	−29,507	−28,556	+15,707	+ 1,651	−47,030	−44,227	26
27	+40,463	− 8,457	−0,992	−0,734	+42,314	− 8,887	−28,532	−27,928	+24,476	− 3,413	−47,583	−45,744	27
28	+44,141	−10,483	−0,417	−0,153	+48,587	−12,379	−27,635	−27,553	+33,590	− 8,706	−48,997	−48,231	28
29		−12,457		+0,045	+54,479	−15,758	−26,960	−27,258	+43,773	−14,613	−50,952	−51,463	29
30		−14,438		−0,220	+59,634	−18,777	−26,770	−27,354	+54,578	−20,920	−52,804	−54,807	30
31		−16,397		−0,932	+64,011	−21,620	−27,160	−28,136	+65,699	−27,283	−53,976	−57,546	31

Nr.	Schwerpunkt des Fusses rechts				Fussspitze rechts				Nr.
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
1	−80,300?	+34,952	−52,312?	−40,729	−73,920	+30,846	−57,387	−45,687	1
2	−69,500	+31,769	−53,920	−42,804	−62,020	+27,290	−57,889	−46,942	2
3	−57,800	+28,275	−55,730	−45,193	−49,560	+23,404	−57,947	−48,094	3
4	−45,830	+24,782	−57,170	−47,387	−37,110	+19,630	−57,459	−48,815	4
5	−33,780	+21,301	−57,690	−48,909	−25,010	+16,295	−56,053	−48,662	5
6	−22,550	+18,212	−56,992	−49,302	−14,370	+13,420	−53,411	−47,338	6
7	−13,851	+15,857	−55,494	−48,753	− 6,407	+11,413	−50,605	−45,490	7
8	− 9,175	+14,444	−56,143	−49,720	− 1,700	+10,366	−51,172	−46,376	8
9	− 7,005	+13,371	−57,921	−51,572	+ 1,080	+ 8,733	−54,313	−49,474	9
10	− 5,262	+12,565	−59,546	−53,173	+ 3,244	+ 7,164	−57,648	−52,790	10
11	− 4,860	+12,317	−59,863	−53,510	+ 3,700	+ 6,923	−59,113	−54,104	11
12	− 4,855	+12,273	−59,839	−53,500	+ 3,740	+ 6,847	−59,300	−54,284	12
13	− 4,850	+12,235	−59,815	−53,485	+ 3,748	+ 6,825	−59,320	−54,303	13
14	− 4,845	+12,195	−59,791	−53,465	+ 3,756	+ 6,815	−59,340	−54,322	14
15	− 4,840	+12,180	−59,768	−53,446	+ 3,764	+ 6,810	−59,360	−54,341	15
16	− 4,835	+12,163	−59,745	−53,427	+ 3,772	+ 6,805	−59,380	−54,360	16
17	− 4,830	+12,150	−59,722	−53,408	+ 3,780	+ 6,795	−59,400	−54,380	17
18	− 4,825	+12,130	−58,699	−53,389	+ 3,812	+ 6,790	−59,460	−54,413	18
19	− 4,820	+12,100	−59,676	−53,370	+ 3,838	+ 6,770	−59,520	−54,480	19
20	− 4,617	+12,044	−59,443	−53,200	+ 3,957	+ 6,710	−59,654	−54,620	20
21	− 4,209	+11,970	−59,052	−52,853	+ 4,231	+ 6,626	−59,830	−54,810	21
22	− 3,468	+11,724	−58,386	−52,300	+ 4,708	+ 6,400	−60,088	−55,060	22
23	− 2,063	+10,861	−57,001	−51,223	+ 5,425	+ 5,790	−60,524	−55,645	23
24	+ 0,783	+ 9,366	−54,594	−49,380	+ 6,320	+ 5,430	−66,838	−55,960	24
25	+ 6,323	+ 6,399	−51,989	−47,686	+10,530	+ 2,704	−59,000	−54,890	25
26	+14,311	+ 1,883	−51,376	−48,017	+18,585	− 2,970	−57,470	−54,780	26
27	+23,716	− 3,496	−51,903	−49,764	+28,880	− 9,015	−57,254	−56,040	27
28	+33,645	− 9,132	−53,387	−52,504	+39,970	−15,170	−57,550	−57,980	28
29	+44,813	−15,546	−55,152	−55,843	+51,960	−22,067	−57,810	−60,040	29
30	+56,594	−22,379	−56,612	−59,168	+64,330	−29,277	−57,350	−61,500	30
31	+68,641	−29,312	−57,187	−61,639	+76,486	−36,320	−55,970	−61,900	31

ıt unsicher!

Tabelle 5.

Nr.	Punkt auf der rechten Oberschenkelröhre				Kopfpunkt von rechts				Nr.
	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	ξ_1'	η_2'	ζ_1'	ζ_2'	
1	−62,964	+32,142	−19,943	−15,950	−52,971	+20,570	+53,182	+43,771	1
2	−57,349	+30,484	−18,836	−15'220	−49,065	+19,296	+53,725	+44,621	2
3	−52,107	+29,110	−18,010	−14,630	−45,247	+18,056	+53,980	+45,157	3
4	−47,322	+27,662	−17,598	−14,437	−41,420	+16,813	+53,844	+45,354	4
5	−43,265	+26,343	−17,963	−14,840	−37,465	+15,518	+53,395	+45,299	5
6	−39,608	+25,132	−19,155	−15,853	−33,482	+14,199	+52,618	+45,025	6
7	−36,019	+23,838	−20,267	−16,990	−29,669	+12,970	+51,823	+44,673	7
8	−31,245	+22,499	−20,802	−17,539	−25,798	+11,739	+51,134	+44,448	8
9	−25,946	+21,259	−20,993	−17,816	−21,884	+10,466	+51,740	+44,457	9
10	−22,223	+20,362	−21,129	−18,062	−18,055	+ 9,137	+50,863	+44,917	10
11	−17,493	+19,224	−20,534	−17,676	−14,256	+ 7,752	+51,309	+45,688	11
12	−13,666	+18,064	−19,992	−17,352	−10,523	+ 6,225	+52,000	+46,664	12
13	−11,618	+17,345	−19,642	−17,058	− 6,786	+ 4,683	+52,917	+47,889	13
14	−10,214	+16,756	−19,214	−16,766	− 3,090	+ 3,155	+55,749	+49,023	14
15	− 8,524	+15,955	−18,830	−16,456	+ 0,566	+ 1,604	+54,191	+49,875	15
16	− 6,448	+15,054	−18,710	−16,486	+ 4,106	+ 0,083	+54,250	+50,315	16
17	− 4,376	+14,176	−18,741	−16,594	+ 7,645	− 1,488	+53,940	+50,443	17
18	− 2,367	+13,283	−18,865	−16,780	+11,218	− 3,164	+53,321	+50,284	18
19	+ 0,229	+12,120	−19,183	−16,173	+14,846	− 4,991	+52,524	+50,012	19
20	+ 3,129	+10,822	−19,361	−17,433	+18,479	− 6,877	+51,786	+49,743	20
21	+ 6,624	+ 9,262	−19,346	−17,568	+22,290	− 8,943	+51,233	+44,666	21
22	+11,107	+ 7,286	−19,425	−17,803	+26,092	−11,114	+50,915	+49,884	22
23	+16,238	+ 4,678	−19,558	−17,140	+29,879	−13,370	+51,052	+50,548	23
24	+22,499	+ 1,659	−20,000	−18,807	+33,667	−15,644	+51,436	+51,441	24
25	+29,183	− 1,762	−20,488	−18,536	+37,309	−17,748	+52,066	+52,585	25
26	+35,818	− 5,405	−20,072	−19,393	+41,003	−19,907	+52,858	+53,912	26
27	+41,667	− 8,738	−19,117	−19,739	+44,701	−21,963	+53,577	+55,171	27
28	+47,059	−11,697	−18,329	−18,150	+48,193	−23,894	+54,014	+56,081	28
29	+52,213	−14,618	−17,860	−17,870	+51,803	−25,919	+54,018	+56,652	29
30	+56,853	−17,258	−17,784	−17,974	+55,538	−28,088	+53,663	+56,798	30
31	+60,915	−19,810	−18,294	−17,728	+59,386	−30,413	+52,973	+56,701	31

Die Werthe der Constanten waren beim III. Versuch für den photographischen Apparat 1^a:

$$e = 438 \text{ cm};\quad d = 52 \text{ cm};\quad l_1 = 86 \text{ cm} \quad\text{und}\quad l_1' = 5{,}86671 \text{ cm},$$

und für den photographischen Apparat 2^a:

$$e = 634{,}5 \text{ cm};\quad d = 69 \text{ cm};\quad l_1 = 86 \text{ cm} \quad\text{und}\quad l_2' = 5{,}43188 \text{ cm};$$

Daher sind die Formeln für die rechte Seite des III. Versuchs:

$$x = \frac{155233 \,.\, \xi_1' - 454{,}51 \,.\, \xi_1'\eta_2'}{105896 + 218{,}37 \,.\, \xi_1' + 161{,}65 \,.\, \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}, \tag{30}$$

$$y = \frac{89624 \,.\, \xi_1' + 193597 \,.\, \eta_2' - 410{,}42 \,.\, \xi_1'\eta_2'}{105896 + 218{,}37 \,.\, \xi_1' + 161{,}65 \,.\, \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}, \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (1{,}46590 - 0{,}00357 \,.\, y) \,.\, \zeta_1' \quad\text{und} \\ z_2 &= (1{,}58325 - 0{,}00229 \,.\, x - 0{,}00132 \,.\, y) \,.\, \zeta_2' \,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Endlich hatten sich als ebene Coordinaten der linken Seite beim III. Versuch durch die directe Messung die in der folgenden Tabelle niedergelegten Werthe ergeben. Diese letzte Messungsreihe war in mehrfacher Beziehung etwas unvollkommener wie die früheren. Manche Punkte, wie Schwerpunkt des Fusses, Fussspitze und zum Theil auch das Handgelenk und I. Fussgelenk waren auf der photographischen Platte überhaupt nicht deutlich genug zu sehen, um eine Messung der Coordinaten zuzulassen, andere Punkte waren dagegen im Vergleich zu denen auf den übrigen photographischen Platten weniger scharf begrenzt, so dass die Genauigkeit der Messung darunter leiden musste.

Tabelle 6.

III. Versuch, links (Tafel 1b und 2b).

Nr.	Schultergelenk links				Ellbogengelenk links				Handgelenk links				Nr.
	ξ'_1	η'_2	• ζ'_1	ζ''_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ''_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ''_2	
1	−65,463	+37,915	+34,618	+26,587	−66,760	+42,708	+14,569	+11,073	−43,712		+ 8,016		1
2	−61,069	+36,352	+35,390	+27,405	−62,408	+41,262	+15,441	+11,800	−39,443		+ 8,743		2
3	−56,728	+34,781	+35,800	+27,832	−58,085	+39,910	+15,928	+12,185	−35,260	+27,385?	+ 9,163?	+7,374	3
4	−52,417	+33,120	+35,625	+27,948	−53,828	+38,410	+15,846	+12,254		+25,797		+7,163	4
5	−48,054	+31,420	+34,980	+27,696	−49,575	+36,751	+15,196	+11,833		+24,081		+6,560	5
6	−43,643	+29,573?	+34,020	+27,000?	−45,217	+34,963	+14,198	+11,141		+22,170		+5,700	6
7	−39,205	+27,705	+32,927	+26,485	−40,723	+33,094	+13,100	+10,343					7
8	−34,650	+25,645		+25,910	−35,994	+31,035	+12,164	+ 9,697	−13,960	+17,960	+ 4,830	+4,092	8
9	−30,130	+23,541	+31,333	+25,617	−31,381	+28,912	+11,524	+ 9,190	− 9,272	+15,670	+ 4,320	+3,687	9
10	−25,586	+21,480	+31,214	+25,727	−26,515	+26,637	+11,310	+ 9,147	− 4,530	+13,375	+ 4,390	+3,780	10
11	−21,273	+19,430	+31,480	+26,192	−21,788	+24,409	+11,546	+ 9,430	+ 0,130	+11,080	+ 5,050	+4,347	11
12	−17,070	+17,498	+32,110	+26,935	−17,431	+22,372	+12,197	+10,000	+ 4,490	+ 8,937	+ 5,840	+5,074	12
13	−13,130	+15,780		+27,948	−13,430	+20,606	+13,132	+10,873	+ 8,450	+ 7,178	+ 6,840	+5,947	13
14	− 9,444	+14,160		+29,000	− 9,655	+18,956	+14,138	+11,774		+ 5,501?		+6,950	14
15	− 5,640	+12,480	+34,710?	+29,710	− 5,861	+17,332	+14,757	+12,366	+16,150		+ 8,540		15
16	− 1,810	+10,820	+34,840?	+30,010	− 2,052	+15,726	+14,838?	+12,540	+19,850		+ 8,630		16
17	+ 2,140	+ 9,077		+29,895	+ 1,981	+14,015	+14,458	+12,279					17
18	+ 6,106	+ 7,348	+33,670?	+29,490	+ 6,155	+12,340	+13,740	+12,791					18
19	+10,215	+ 5,594	+32,830?	+29,050	+10,490	+10,613	+12,905	+11,129					19
20	+14,445	+ 3,896	+32,010	+28,500	+14,925	+ 8,910	+12,040	+10,476					20
21	+18,953	+ 2,144	+31,470?	+28,188	+19,510	+ 7,173	+11,474	+10,077	+41,140		+ 5,440		21
22	+23,522	+ 0,430	+31,210	+28,211	+24,227	+ 5,470	+11,230	+ 9,866	+45,970		+ 5,364		22
23	+28,135	− 1,300	+31,500	+28,745	+29,238	+ 3,700	+11,5?	+10,201	+51,000		+ 5,820		23
24	+32,773	− 3,150	+32,240	+29,694	+34,310	+ 1,934	+12,260	+11,046	+56,070		+ 6,795		24
25	+37,220	− 4,950?	+33,130	+30,672	+39,155	+ 0,216	+13,265	+12,047					25
26	+41,610	− 6,874	+34,240	+32,025	+43,780	− 1,763	+14,346	+13,181	+65,270		+ 8,999		26
27	+46,010	− 8,860	+35,140	+33,272	+48,232	− 3,816	+15,320	+14,147	+69,700		+10,060		27
28	+50,215	−10,920	+35,750	+34,187	+52,530	− 5,740	+16,000	+14,919					28
29	+54,557	−13,070	+35,925	+34,561	+56,980	− 7,644	+16,198	+15,225					29
30	+58,870	−15,265	+35,480	+34,518	+61,244	− 9,704	+15,736	+14,942					30
31	+63,200	−17,630	+34,624	+34,000	+65,366	−11,930	+14,824	+14,193					31

? bedeutet unsicher!

Tabelle 6.

Nr.	Hüftgelenk links				Kniegelenk links			
	ξ'_1	η'_2	ζ'_2	ζ'_2	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2
1	−67,155	+38,722	−3,962	−2,802	−62,030	+34,948	−33,700	−25,462
2	−63,456	+37,288	−3,586	−2,563	−61,060	+34,419	−33,610	−25,446
3	−59,730	+35,846	−3,610	−2,536	−60,010	+33,827	−33,590	−25,460
4	−55,980	+34,378	−3,710	−2,722	−58,814	+33,208	−33,600	−25,557
5	−52,160	+32,847	−4,150	−3,131	−57,470	+32,578	−33,680	−25,711
6	−48,310	+31,371	−4,870	−3,733	−55,890	+31,857	−33,780	−25,811
7	−44,300	+29,729?	−5,630		−53,644	+30,970	−33,900	−26,157
8	−39,980	+27,902	−6,135	−4,840	−50,394	+29,864	−34,350	−26,511
9	−35,190	+25,812	−6,500	−5,178	−46,254	+28,553	−34,500	−26,921
10	−29,950	+23,320	−6,560	−5,312	−40,530	+26,638	−34,880	−27,502
11	−24,615	+20,709	−6,480	−5,320	−32,130	+23,894		−28,544
12	−19,730	+18,331	−6,290	−5,222	−23,000	+20,010		−29,580
13	−14,932	+16,118	−5,330	−4,473	−13,990	+15,924	−35,400?	−29,418
14	−10,520	+14,237	−4,090	−3,431	− 6,206	+12,635	−33,845	−28,542
15	− 6,257	+12,420	−3,110	−2,675	+ 1,193	+ 9,444	−32,255	−27,602
16	− 2,222	+10,775	−2,700	−2,323	+ 7,625	+ 6,561	−31,044	−26,942
17	+ 1,820	+ 9,174	−2,790	−2,407	+13,225	+ 4,078	−30,510	−26,796
18	+ 5,557	+ 7,633	−3,450	−2,959	+17,653	+ 2,025	−30,834	−27,331
19	+ 9,411	+ 6,044	−4,530	−3,954	+21,120	+ 0,158	−32,065	−28,616
20	+13,790	+ 4,325	−5,680	−5,009	+24,100?	− 1,746		−30,216
21	+18,600	+ 2,394	−6,340	−5,655	+28,900?	− 3,838		−31,133
22	+23,607	+ 0,597	−6,410	−5,780	+34,350?	− 6,006		−31,355
23	+28,680	− 1,111	−5,880	−5,381	+38,690	− 7,180	−34,060	−31,490
24	+33,750	− 2,827	−5,345	−4,913	+43,420	− 8,930	−33,640	−31,430
25	+38,280	− 4,643	−4,685	−4,285	+46,642	−10,306	−33,340	−31,383
26	+42,644	− 6,486	−3,864	−3,736	+48,345	−11,231	−33,270	−31,404
27	+46,600	− 8,416	−3,360	−3,325	+49,170	−11,736	−33,150	−31,420
28	+50,275	−10,243	−3,126	−3,165	+49,910	−12,292	−33,000	−31,375
29	+54,080	−12,155	−3,245	−3,280	+50,980	−13,032	−32,080	−31,406
30	+57,720	−14,051	−3,687	−3,777	+52,190	−13,790	−33,040	−31,533
31	+61,360	−15,980	−4,310	−4,412	+53,748	−14,669	−33,140	−31,852

I. Fussgelenk links				Nr.
ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2	
	+32,338		−46,700	1
*)	+32,270		−46,650	2
	+32,180	ca.	−46,600	3
ca.	+32,060		−46,550	4
− 63	+31,960	−61,4	−46,500	5
	+31,830		−46,430	6
	+31,700		−46,360	7
−62 ca.	+31,490	?	−46,200	8
−60,5ca.	+31,180	?	−45,250	9
−58,2ca.	+30,380	−57,500	−44,050	10
−53,720	+28,820	−54,920	−42,600	11
−46,960	+26,300	−52,000?	−41,000	12
−38,150	+22,420	−51,080	−41,000	13
−28,300	+17,850	−51,460	−42,100	14
−17,763	+13,070	−53,015	−44,300	15
− 6,700	+ 8,310	−55,225	−47,000	16
+ 5,000	+ 3,430	−57,284	−49,730	17
+16,450	− 1,290	−58,675	−52,100	18
+27,570	− 5,720	−59,135	−53,500	19
+36,100	− 8,660	−58,600?	−54,100	20
+40,900?	−11,130	−59,339	−55,000	21
+43,600	−12,600	−60,460	−56,300	22
+45,450	−13,630	−60,670	−57,000	23
+46,680	−14,140	−60,800	−57,700	24
+46,920	−14,270	−61,050	−57,600	25
+46,970	−14,340	−61,000	−57,500	26
+47,020	−14,380	−60,940	−57,400	27
+47,080	−14,440	−60,880	−57,300	28
+47,140	−14,500	−60,820	−57,200	29
+47,200	−14,580	−60,760	−57,100	30
+47,260	−14,680	−60,700	−57,000	31

Nr.	Kopfpunkt**) von links			
	ξ'_1	η'_2	ζ'_1	ζ'_2
1	−57,049	+24,547	+56,820	+45,645
2	−52,849	+22,820	+57,410	+46,450
3	−48,626	+21,070	+57,620	+46,973
4	−44,513	+19,240	+57,350	+47,166
5	−40,220	+17,380	+56,760	+47,040
6	−35,880	+15,470	+55,890	+46,680
7	−31,713	+13,470	+54,910	+46,205
8	−27,500	+11,330	+54,110	+45,900
9	−23,265	+ 9,300	+53,560	+45,830
10	−19,140	+ 7,230	+53,550	+46,220
11	−15,118	+ 5,280	+54,000	+46,940
12	−11,150	+ 3,470	+54,620	+47,950
13	− 7,168	+ 1,630	+55,600	+49,175
14	− 3,326	− 0,160	+56,400	+50,300
15	+ 0,588	− 2,100	+56,890	+51,124
16	+ 4,350	− 3,910	+56,970	+51,575
17	+ 8,090	− 5,750	+56,590	+51,650
18	+11,883	− 7,560	+56,010	+51,461
19	+15,749	− 9,380	+55,180	+51,124
20	+19,582	−11,190	+54,490	+50,837
21	+23,677	−13,030	+53,950	+50,800
22	+27,743	−14,840	+53,755	+51,050
23	+31,836	−16,650	+54,080	+51,655
24	+36,081	−18,630	+54,600	+52,626
25	+39,991	−20,610	+55,260	+53,800
26	+43,976	−22,650	+56,225	+55,177
27	+47,990	−24,870	+57,010	+56,430
28	+51,667	−27,080	+57,425	+57,382
29	+55,538	−29,360	+57,390	+57,910
30	+59,590	−31,720	+56,980	+58,070
31	+63,540	−34,230	+56,260	+57,825

Die zur linken Seite des III. Versuchs gehörenden Constanten besassen folgende Werthe für den photographischen Apparat 1^b:

$$e = 446 \text{ cm}; \quad d = 55{,}5 \text{ cm};$$
$$l_1 = 86 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l'_2 = 6{,}34830 \text{ cm},$$

und für den photographischen Apparat 2^b:

$$e = 588{,}5 \text{ cm}; \quad d = 67 \text{ cm};$$
$$l_1 = 86 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l'_2 = 5{,}67074 \text{ cm}.$$

? bedeutet unsicher! *) Diese Coordinaten liessen sich nicht genau bestimm…

**) Bei diesem Versuch sind nicht die Coordinaten der Unterbrechungsstelle der … des *Scheitelpunktes des durch die* beiden Aeste des Röhrchens gebildeten rechten W…

Daraus ergaben sich endlich die zur Berechnung der räumlichen Coordinaten der linken Seite des III. Versuchs geltenden Formeln:

$$x = \frac{152206 \cdot \xi_1' - 398{,}32 \cdot \xi_1'\eta_2'}{112354 + 210{,}71 \cdot \xi_1' + 177{,}74 \cdot \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}, \tag{33}$$

$$y = -\frac{87876 \cdot \xi_1' + 196751 \cdot \eta_2' - 417{,}05 \cdot \xi_1\eta_2'}{112354 + 210{,}71 \cdot \xi_1' + 177{,}74 \cdot \eta_2' - \xi_1'\eta_2'}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (1{,}35469 - 0{,}00325 \cdot y) \cdot \zeta_1' \quad \text{und} \\ z_2 &= (1{,}51656 - 0{,}00237 \cdot x - 0{,}00137 \cdot y) \cdot \zeta_2'. \end{aligned} \tag{35}$$

Die Berechnung der räumlichen Coordinaten mit Hülfe der Formeln (18) bis (35) hatte wiederum Herr Dr. G. HÖCKNER gütigst übernommen, welcher uns schon bei der Bestimmung der Trägheitsmomente des menschlichen Körpers und seiner Glieder unterstützt hatte[1]. Die Rechnungen sind mit grösster Sorgfalt mit Hülfe einer Rechenmaschine ausgeführt und die Resultate genau controliert worden, so dass trotz des ungeheuren Zahlenmaterials, welches die directe Messung geliefert hatte, ein Fehler nahezu ausgeschlossen erscheint.

Wir schulden Herrn Dr. HÖCKNER den grössten Dank dafür, dass er mit unermüdlicher Ausdauer sich der beschwerlichen Arbeit unterzogen hat. Ohne seine thätige Mithülfe würden wir nicht im Stande gewesen sein, in absehbarer Zeit die Ableitung der räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte aus den Daten der directen Messung zu Ende zu führen.

Da eine detaillierte Angabe der einzelnen Zwischenstufen dieser Rechnungen kein allgemeineres Interesse beanspruchen dürfte, und da auch die resultirenden Coordinaten noch nicht das Endziel unserer Untersuchung bilden konnten, weil sie zu den willkürlich gewählten Punkten der GEISSLER'schen Röhren und nicht zu den Mittelpunkten der Gelenke gehören, so sollen sowohl die Zwischenrechnungen als auch diese vorläufigen Resultate nicht mitgetheilt werden, um durch dieselben den Umfang der Arbeit nicht unnöthig zu vergrössern.

1) Vergl.: Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissens[illegible] III, S. 46 Anmerkung.

Um aber zu jeder Zeit einen Einblick in die Entstehung der räumlichen Coordinaten der Röhrenpunkte und eine Controle der Rechnungen zu ermöglichen, sind dieselben im Archiv der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften deponiert worden. Da es im Verlaufe der folgenden Auseinandersetzungen oft nöthig wird, auf die Coordinaten der Röhrenpunkte Bezug zu nehmen, so sollen dieselben für jeden Versuch in eine besondere Tabelle angeordnet gedacht werden. Diese Tabelle soll die Bezeichnung Tabelle A, Tabelle B oder Tabelle C führen, je nachdem sie beziehungsweise zum I., II. oder III. Versuch gehört. In jeder dieser Tabelle ist als Werth der z-Coordinate das arithmetische Mittel der beiden Grössen z_1 und z_2 angenommen; insbesondere sind als Coordinaten des Kopfpunktes ebenfalls die arithmetischen Mittel der beiden von verschiedenen Seiten gewonnenen Coordinatenreihen eingetragen zu denken.

Von der Richtigkeit dieser Coordinatenangaben hängt die Sicherheit aller weiteren Schlussfolgerungen ab. Um sich über die letztere von vornherein ein Urtheil bilden zu können, ist es daher erforderlich, einen Blick auf die erzielte Genauigkeit der Coordinatenwerthe zu werfen. Für diesen Zweck giebt die von uns eingeschlagene Untersuchungsmethode zwei Mittel an die Hand. Einerseits hatten wir jede z-Coordinate auf zwei verschiedenen Wegen und unter Benutzung von verschiedenen durch die Messung gelieferten Daten abgeleitet. Die grössere oder geringere Uebereinstimmung dieser beiden, mit z_1 und z_2 bezeichneten, Grössen ist ein Kennzeichen für die erzielte Genauigkeit. Andererseits gab die Thatsache, dass wir einen Punkt, den Kopfpunkt, von beiden Seiten für die Messung verwendet hatten, einen noch sichereren Maassstab für die Erkennung der Genauigkeit ab. Während die beiden z noch in gewisser Weise von einander abhängen, da in beiden Formeln (9) Seite 199 dieselbe Grösse, nämlich y, vorkommt, sind die Coordinaten des Kopfpunktes, welche mittelst der photographischen Apparate 1^a und 2^a gewonnen wurden, vollständig unabhängig von den mit Hülfe der beiden anderen Apparate 1^b und 2^b ermittelten Coordinaten desselben Punktes.

Was zunächst die z-Coordinaten anlangt, so greife ich aus dem im Archiv niedergelegten Zahlenmaterial einige Beispiele heraus.

Für den rechten Hüftgelenkpunkt hatten sich beim I. Versuch folgende Werthe der beiden z ergeben:

Nr.	z_1	z_2	Nr.	z_1	z_2	Nr.	z_1	z_2
1	—	—	12	— 8,82	— 8,71	23	— 8,06	— 8,12
2	— 6.57	— 6,69	13	— 8,03	— 7,95	24	— 8,15	— 8,19
3	—	—	14	—	—	25	— 8,22	— 8,23
4	— 4,13	— 4,16	15	— 5,51	— 5,53	26	— 8,54	—
5	— 4,03	— 4,02	16	—	—	27	—	—
6	— 4,86	— 4,86	17	— 4,89	— 4,89	28	— 6,46	— 6,45
7	— 6,64	— 6,59	18	— 5,03	— 5,08	29	—	—
8	— 8,80	— 8,75	19	— 5,64	— 5,73	30	— 4,27	— 4,16
9	— 9,92	— 9,87	20	— 6,65	— 6,69	31	— 4,28	— 4,19
10	— 10,08	— 10,05	21	— 7,40	— 7,50			
11	— 9,85	— 9,82	22	— 7,77	— 7,88			

Die Phasen, für welche keine Werthe von z angegeben sind, waren beim Versuch durch den Unterarm verdeckt.

Man sieht, dass die beiden z an einigen Stellen vollständig übereinstimmen und nur in ganz wenig Fällen eine Abweichung bis zu 0,1 cm zeigen.

Damit sind keineswegs diejenigen Coordinatenwerthe herausgegriffen worden, welche die beste Uebereinstimmung zeigen. Man betrachte z. B. die folgende, aus der Mitte herausgegriffene Reihe von Werthen der beiden z für den von der rechten Seite photographirten Kopfpunkt beim II. Versuch.

Nr.	z_1	z_2	Nr.	z_1	z_2	Nr.	z_1	z_2
11	+ 75,21	+ 75,19	16	+ 78,41	+ 78,37	21	+ 77,82	+ 77,79
12	+ 74,91	+ 74,92	17	+ 79,43	+ 79,41	22	+ 76,76	+ 76,73
13	+ 75,16	+ 75,17	18	+ 79,89	+ 79,83	23	+ 75,85	+ 75,84
14	+ 75,90	+ 75,89	19	+ 79,66	+ 79,62	24	+ 75,35	+ 75,34
15	+ 77,08	+ 77,07	20	+ 78,87	+ 78,83		u. s. w.	

Es giebt nun allerdings Fälle, in welchen die beiden z etwas mehr von einander abweichen. Dann zeigen aber gewöhnlich die Differenzen eine stetige Zu- oder Abnahme und weisen dadurch auf einen systematischen Fehler hin, wie z. B. in der folgenden aus der zum Kopfpunkt (von rechts) gehörenden Tabelle des III. Versuchs herausgegriffenen Reihe:

Nr	z_1	z_2	Unterschied
11	+ 74,74	+ 74,35	+ 0,39
12	+ 75,71	+ 75,35	+ 0,36
13	+ 77,01	+ 76,72	+ 0,29
14	+ 78,18	+ 77,91	+ 0,27
15	+ 78,78	+ 78,65	+ 0,13
16	+ 78,83	+ 78,73	+ 0,10
17	+ 78,35	+ 78,33	+ 0,02

Nr.	z_1	z_2	Unterschied
18	+ 77,44	+ 77,49	— 0,05
19	+ 76,31	+ 76,47	— 0,16
20	+ 75,27	+ 75,47	— 0,20
21	+ 74,52	+ 74,74	— 0,22
22	+ 74,13	+ 74,46	— 0,33

u. s. w.

Diese Unterschiede rühren sicher nicht von zufälligen Beobachtungsfehlern her, dazu nehmen sie viel zu stetig ab. Man könnte sich dieselben beispielsweise dadurch entstanden denken, dass bei der Messung die eine photographische Platte oder auch nur die auf ihr abgebildete Coordinatentafel etwas aus ihrer richtigen Lage herausgedreht worden wäre. Daher üben diese Differenzen nur einen Einfluss auf die Orientirung, nicht aber auf die Gestalt der Kopfpunktcurve aus.

Das andere, vollständig einwurfsfreie Kennzeichen für die erzielte Genauigkeit gaben die zwei, absolut von einander unabhängigen Bestimmungen der Kopfpunkt-Coordinaten ab. Besser als es Zahlen vermögen, vermittelt die directe Anschauung ein Urtheil über den Grad der Uebereinstimmung der beiden, von verschiedenen Seiten gewonnenen Kopfpunktcurven. Daher sind auf Tafel IX zwei zusammengehörende rechtwinklige Projectionen (auf die verticale Gangebene und den horizontalen Fussboden) von Strecken der Kopfpunktcurven des I. und II. Versuches in natürlicher Grösse aufgezeichnet worden. Es ist dies für den I. Versuch das Stück zwischen den Phasen 9 und 13, und für den II. Versuch das Stück zwischen den Phasen 14 bis 18. Die kleinen Dimensionen der Tafel erlaubten natürlich nicht, die ganzen Curven von den Phasen 1 bis 31 in natürlicher Grösse wiederzugeben. Diese kurzen Stücke genügen aber auch vollkommen, um die Genauigkeit der von uns eingeschlagenen Methode beurtheilen zu können. Die Punkte, welche von der linken Seite aus, also mit Hülfe der photographischen Apparate 1^b und 2^b gewonnen wurden, sind zum Unterschied von den entsprechenden, aus den Bildern 1^a und 2^a abgeleiteten Punkten mittels eines durchbrochenen Linienzuges verbunden worden. Man sieht, das in den Projectionen auf die Gangebene nahezu absolute Uebereir

stimmung stattfindet. Die von links gewonnenen Projectionen auf die Horizontalebene weichen dagegen sämmtlich ein wenig nach links von den anderen ab. Dies ist auch vollkommen erklärlich durch den Umstand, dass das leuchtende Object am Kopfe natürlich nicht ein mathematischer Punkt, sondern ein kleiner selbstleuchtender Cylinder war. Die photographischen Apparate der rechten Seite hatten uns daher ein Bild der nach rechts, und die beiden anderen Apparate ein Bild der nach links gerichteten, ihnen zugekehrten Oberfläche des Cylinders verschafft. Aus diesem Grunde müssen naturgemäss die beiden Curven um die Dicke des lichten Raumes der GEISSLER'schen Capillarröhre von einander abstehen. Zieht man dies in Rücksicht, so erkennt man auch aus den Horizontalprojectionen eine überraschende Uebereinstimmung. Die letztere ist grösser als wir erwartet hatten in Anbetracht so mancher Fehlerquellen, die sich erst nach den Versuchen offenbarten, als es zu spät war, sie zu berücksichtigen. Die beiden aus den Kopfpunktcurven herausgegriffenen, auf Tafel IX verzeichneten, Stücke lagen verhältnissmässig günstig für die photographische Registrierung und die Coordinatenmessung, da sie sich nicht zu sehr nach rechts und links von der Mitte der photographischen Platte entfernten. Die mehr nach den Rändern zu gelegenen Theile der Curven können dagegen nicht mit der gleichen Genauigkeit bestimmt werden. Denn einerseits sind die Bilder nicht so scharf und erlauben daher nicht eine so genaue Messung der Coordinaten, als die Punkte in der Nähe des Centrums der Platte, und andererseits werden selbst bei den besten Objectiven die Bilder an den Rändern ein wenig verzerrt sein. Es war daher ganz natürlich, dass die Curven des Kopfpunktes nach der Anfangsphase 1 und der Endphase 31 zu eine etwas grössere Abweichung zeigten als die auf Tafel IX aufgezeichneten Theile derselben.

Die angeführten Beispiele haben wohl zur Genüge gezeigt, dass die aufgewendete Mühe nicht umsonst war, dass vielmehr mit der erreichten Beziehung der Gehbewegung auf ein räumliches Coordinatensystem ein sicheres Fundament für weitere Untersuchungen geschaffen worden ist.

Ableitung der räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte.

Die nächste Frage, welche mit Hülfe der zu den Punkten der Geissler'schen Röhren gehörenden Coordinaten beantwortet werden musste, war die nach den räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte. Wenn auch die Geissler'schen Röhren fest mit den einzelnen Körpertheilen verbunden waren, so stellten sie doch keine Linien dar, welche in Bezug auf die Bewegung besonders ausgezeichnete Lagen innerhalb der Gliederabschnitte besassen. Sie sind daher auch nicht geeignet, durch ihre Stellung die genaue Haltung des ganzen Körpers unmittelbar anzugeben. Um eine directe Anschauung von der relativen Stellung der einzelnen Glieder zu bekommen, müsste man sich mittelst der Photographie die Lagen ihrer Längsaxen verschaffen. Unter Längsaxen sollen in Anbetracht unserer Zerlegung des menschlichen Körpers in elf starre Theile beim Oberschenkel, Unterschenkel und Oberarm die Geraden verstanden sein, welche die Mittelpunkte der beiden das Glied begrenzenden Gelenke verbinden. Für den Kopf, Fuss und das starre System Unterarm + Hand soll als Längsaxe die Gerade eingeführt sein, welche den Schwerpunkt des Gliedes mit dem Mittelpunkt des einen begrenzenden Gelenkes verbindet. Beim Rumpf endlich soll die Längsaxe durch die Verbindungsgerade der Mitte der Hüftaxe und des Mittelpunktes vom Atlanto-Occipitalgelenk dargestellt sein.

Kennt man die Stellung dieser einzelnen Längsaxen der Körpertheile, so ist damit im Wesentlichen auch die Haltung des ganzen Körpers gegeben, abgesehen von etwaiger Verdrehung des Kopfes, Fusses oder Unterarmes + Hand um ihre Längsaxen. Denn die Lage und Gestalt des Rumpfes ist für die Bewegung des Gehens, bei welcher die Wirbelsäule keine wesentlichen Verbiegungen nach vorn und hinten erfährt, durch die Stellung der Hüft- und Schultergelenke genügend bestimmt. Die Oberarme, Oberschenkel und Unterschenkel müssen ferner bei jeder Haltung des Körpers eine ganz bestimmte Rollung um ihre Längsaxe erfahren haben, welche durch die gegenseitige Stellung

ihrer Längsaxen und die Längsaxen der Unterarme einerseits, und der Füsse andererseits genügend gekennzeichnet ist. Denn wenn man die Längsaxen von Oberarm und Unterarm festgestellt denkt, so ist es nicht mehr möglich, den Oberarm zwischen Rumpf und Unterarm um seine Längsaxe zu rollen. Jede Drehung desselben um die Längsaxe wird eine gleichzeitige Bewegung der Unterarmlängsaxe zur Folge haben; die letztere kann daher in gewissem Sinne als Zeiger für die Rollung des Oberarmes benutzt werden. Andererseits ist es bei Feststellung der drei Längsaxen von Oberschenkel, Unterschenkel und Fuss weder möglich, den Oberschenkel allein, noch den Unterschenkel allein, noch endlich bei äusserster Streckstellung im Kniegelenk das System Oberschenkel + Unterschenkel willkürlich um seine Längsaxe zu rollen. Bei Beugestellung im Knie wird jede Drehung des Oberschenkels um seine Längsaxe eine Bewegung der Unterschenkelaxe, und jede Drehung des Unterschenkels um seine Längsaxe eine Veränderung der Richtung der Fusslängsaxe zur Folge haben; es können dann geradezu wieder beziehungsweise die Längsaxen des Unterschenkels und Fusses als Zeiger für die Rollung des Oberschenkels beziehungsweise Unterschenkels benutzt werden. Auch bei der Streckstellung im Kniegelenk wird die Grösse der Rollung des ganzen Beines um seine Längsaxe im Allgemeinen durch die Stellung der Fusslängsaxe angezeigt sein. Es ist ja natürlich durch den Bau der Gelenke nicht ausgeschlossen, dass z. B. das ganze Bein um einen bestimmten Winkel um seine Längsaxe gedreht und gleichzeitig der Fuss um dieselbe Axe und denselben Winkel im entgegengesetzten Sinne gedreht wird, so dass dabei die drei Längsaxen von Oberschenkel, Unterschenkel und Fuss ihre Lage beibehalten. Der Mensch, welcher seine unteren Extremitäten nur vorzugsweise zum Gehen benutzt, und welcher seine Muskeln, beziehungsweise die motorischen Nerven seiner Beinmuskeln nicht in dieser Richtung besonders geübt hat, vermag aber eine derartige Bewegung nicht willkürlich auszuführen.

Aus alledem geht hervor, dass die Bestimmung der Lage der Längsaxen in den einzelnen Momenten des Gehens genügt, um die Haltung des ganzen Körpers bis auf etwaige Rollungen des Kopfes, Fusses und des Systems Unterarm + Hand um ihre bezüglichen Längsaxen zu erkennen. Da alle diese Längsaxen im Innern der

Körpertheile verlaufen, so ist es unmöglich, ihre Lage im Raume für die verschiedenen Bewegungsphasen durch die Photographie direct exact zu bestimmen. Man kann sich dieselbe nur mittelbar verschaffen mit Hülfe von Linien oder Punkten, welche sich auf der Körperoberfläche befinden, oder welche, wie unsere Geissler'schen Röhrenpunkte, ganz ausserhalb des Körpers liegen, aber starr mit demselben verbunden sind. Nur solche Linien oder Punkte sind für die Photographie erreichbar.

Um die Ableitung der räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte aus den zu den Geissler'schen Röhrenpunkten gehörenden Coordinaten zu ermöglichen, hatten wir den Röhren die schon oben angedeutete Stellung zu den einzelnen Körperabschnitten gegeben. Die den beiden Hüftgelenken entsprechenden leuchtenden Punkte waren so gewählt worden, dass ihre Verbindungslinie durch die Hüftgelenkmitten hindurchging. Desgleichen waren die zu den Schultergelenken gehörenden Punkte auf den Oberarmröhren so markiert worden, dass ihre Verbindungslinie so genau wie möglich die Mitten der Humerusköpfe traf. Für alle anderen Gelenke waren die leuchtenden Punkte so nach aussen verlegt worden, dass bei der Normalstellung des Körpers ihre Verbindungslinie mit der zugehörigen Gelenkmitte senkrecht auf der Medianebene des Körpers stand. Ausserdem waren überall die Abstände der Röhrenpunkte von den Mitten ihrer Gelenke gemessen worden, so gut sich das von aussen unter Hinzuziehung eines Skelets von den Proportionen des Versuchsindividuums machen liess. In der Vergleichung der durch die Coordinatentabellen gegebenen Horizontalprojectionen der Bahncurven zweier demselben Gelenke, aber verschiedenen Seiten des menschlichen Körpers angehörenden Röhrenpunkte hatte man ein Mittel, die direct gemessenen Abstände hinterher zu controlieren und, wo es nothwendig schien, etwas zu verbessern.

Die den thatsächlichen Verhältnissen am meisten entsprechend erscheinenden Abstände der Röhrenpunkte und zugehörigen Gelenkmittelpunkte waren folgende:

Am	Schultergelenk	Ellbogengelenk	Handgelenk	Hüftgelenk	Kniegelenk	I. Fussgelenk
rechts	$4\frac{1}{2}$ cm	$5\frac{1}{2}$ cm	3 cm	$11\frac{3}{4}$ cm	$8\frac{1}{2}$ cm	$5\frac{1}{2}$ cm
links	$5\frac{1}{2}$ cm	$5\frac{1}{2}$ cm	3 cm	$12\frac{1}{4}$ cm	$9\frac{1}{2}$ cm	$6\frac{1}{2}$ cm

Die Ungenauigkeit, mit welcher diese Abstände naturgemäss behaftet sind, macht die bei den Messungen erzielte Genauigkeit nicht illusorisch. Denn, da die Bewegungen der einzelnen Körpertheile beim Gehen nahezu alle einer Verticalebene, nämlich der Gangebene, parallel verlaufen, so wird z. B. ein Punkt der Knieaxe, welcher einige Centimeter von der Mitte des Kniegelenkes entfernt liegt, doch mit grosser Annäherung eine Curve beschreiben, welche der Bahn der Gelenkmitte congruent ist, und welche nur um den betreffenden Abstand weiter von der Gangebene abliegt. Auf die Gestalt der Bahncurve und auf die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit welchen dieselbe durchlaufen wird, kommt es aber vor allen Dingen an.

Aus diesem Grunde sind die Bahncurven von den Mittelpunkten der Ellbogen-, Hand-, Knie- und Fussgelenke direct congruent den Curven der entsprechenden Röhrenpunkte angenommen und dieselben nur um den bestimmten Abstand der Gangebene näher gerückt worden. Es blieb auch gar nichts anderes übrig, da man diesen Gelenken immer nur einen einzigen leuchtenden Punkt zugeordnet hatte.

Günstiger war man bei den Schulter- und Hüftgelenken gestellt. Hier war es möglich, unter Benutzung der Coordinaten beider Schulterpunkte, bezüglich beider Hüftpunkte die wahren Bahncurven der Gelenkmittelpunkte mit grösster Genauigkeit festzustellen. Dabei war noch besonders der Umstand von grossem Nutzen, dass die Entfernung der Hüftgelenkmitten absolut und die der Schultergelenkmitten bei den in Frage kommenden Bewegungen der Arme wenigstens sehr nahe constant ist.

Bevor die Ableitung der räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte vorgenommen wurde, musste das bisher verwendete Coordinatensystem noch einer kleinen Verlegung unterworfen werden, und zwar aus folgendem Grunde.

Wir hatten beabsichtigt, die Wahl desselben so zu treffen, dass die eine Coordinatenaxe (X-Axe) die Gangrichtung besass. Dies lässt sich nicht mit genügender Genauigkeit vor dem Versuche erreichen. Denn es ist sehr schwer, genau in einer bestimmten Richtung zu gehen. Die Gangrichtung wird immer etwas von der vorgeschriebenen abweichen, wenn das Versuchsindividuum ganz ungezwungen gehen soll. Dies war denn auch thatsächlich bei allen drei Versuchen der Fall.

Den kleinen Winkel, um welchen die Richtung des Ganges von der vorher festgelegten Richtung der X-Axe abgewichen ist, kann man leicht durch Aufzeichnen der XY-Projection, d. h. also der Ansicht von oben der Bewegungscurven der einzelnen leuchtenden Punkte bestimmen.

Man kann dabei von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen.

Das Einfachste wäre, die Richtung zu ermitteln, in welcher die verschiedenen Spuren ein und desselben Fusses auf einander folgen. Dies setzt voraus, dass der Fuss jedesmal wieder in genau derselben Weise auf den Boden aufgesetzt worden ist. Es ist aber sehr leicht möglich, dass einmal derselbe einen Centimeter weiter nach innen oder aussen gebracht worden ist, als das vorhergehende Mal, ohne dass der Oberkörper, und vor allen Dingen der Gesammtschwerpunkt diese geringe seitliche Excursion mitgemacht hat. Beim Gehen auf unebenem Boden tritt dieser Fall oft ein. Da die Bewegung des Gesammtschwerpunktes in viel grösserem Maasse durch die Bewegung des Oberkörpers als durch die eines Beines bestimmt wird, so geht man sicherer, wenn man die Fortbewegungsrichtung eines Punktes am Rumpfe oder am Kopfe feststellt. Genau genommen müsste man eigentlich die Bewegung des Gesammtschwerpunktes selbst zu diesem Zwecke aufsuchen. Dies lässt sich aber vorläufig, so lange man nur die Bewegung der leuchtenden Punkte an der Aussenseite des Körpers, noch nicht aber die der Gelenkmittelpunkte im Innnern desselben kennt, noch nicht durchführen.

Aus diesem Grunde ist zur Bestimmung der Bewegungsrichtung beim I. Versuch die Bahn des Kopfpunktes und beim II. und III. Versuch die des Mittelpunktes der Hüftaxe verwendet worden.

Der Kopfpunkt beschreibt in seiner Projection auf die verticale Gangebene (XY-Ebene), wie man schon aus den Photographien erkennt, eine Wellenlinie. Es bietet aber auch die Projection seiner Bahn auf die Horizontalebene (XY-Ebene) infolge periodischer seitlicher Schwankungen des ganzen Rumpfes und Kopfes die Gestalt einer Wellenlinie dar. Die Richtung der beiden mehrfachen Tangenten dieser horizontalen Wellenlinie ist die Richtung des Ganges. Genau dasselbe gilt bei Benutzung des Mittelpunktes der Hüftaxe.

Die Aufzeichnung der Horizontalprojection der Bahn des Kopfpunktes auf einen entsprechend grossen Bogen von Millimeterpapier

in natürlicher Grösse ergab, dass beim I. Versuch die Gangrichtung von der festgelegten Richtung der positiven X-Axe um einen Winkel von 1° 21′ in der Richtung des Uhrzeigers, von oben gesehen, abgewichen war. Dieser Winkel lässt sich bis auf Minuten, ja sogar bis auf Bruchtheile von Minuten genau messen, da man die Linie, deren Richtung man bestimmen will, in einer Länge von ca. 2 m aufgezeichnet hat. Man liest zu diesem Zwecke die Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zweier ca. 2 m von einander entfernter Punkte P_1 und P_2 (Fig. 13) dieser Linie ab und berechnet dann den Winkel, welcher in Figur 13 mit ε bezeichnet ist, mit Hülfe der bekannten Relation

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Es ergab sich beim I. Versuch für tang ε der Werth 0,02356, woraus der obige Winkel resultirt.

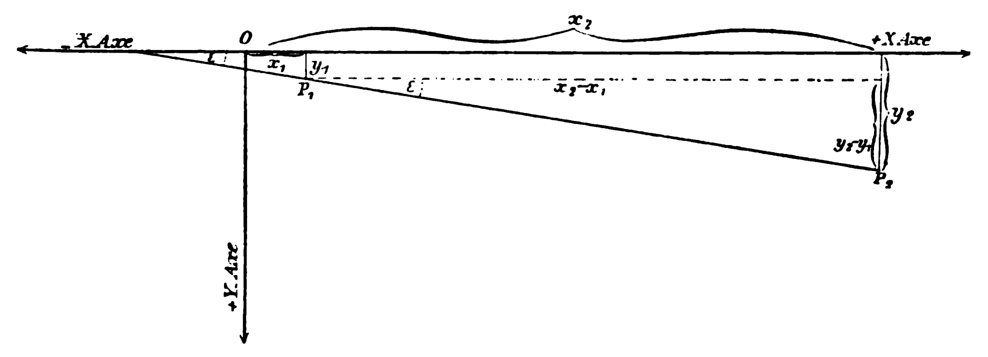


Fig. 13.

Für eine exacte Analyse der Gehbewegungen ist es zweckmässig, dass man sich zunächst eine Projection der Bewegungscurven auf die Gangebene verschafft, und dann untersucht, in welcher Weise die einzelnen Curven von dieser Ebene abweichen. Um durch das räumliche Coordinatensystem eine genaue Projection auf die Gangebene ohne Weiteres zu vermitteln, ist es aber erforderlich, dass die eine Coordinatenebene (XZ-Ebene) genau parallel der Gangebene verläuft oder, mit anderen Worten, dass die eine Axe (X-Axe) genau die Gangrichtung besitzt. Um dies zu erreichen, macht es sich nöthig, das bisher verwendete Coordinatensystem um die verticale

Z-Axe durch den Winkel ε in der Richtung des Uhrzeigers zu drehen. Die z-Coordinaten behalten dabei ihre Werthe bei, während die horizontalen x- und y-Coordinaten sich ändern. Die dieser Drehung entsprechenden Transformationsformeln leitet man auf folgende Weise ab.

Die beiden horizontalen Axen des neuen, durch die Drehung entstandenen, Coordinatensystems seien mit X'-Axe und Y'-Axe und die ihnen entsprechenden Coordinaten beziehungsweise mit x' und y' bezeichnet (Fig. 14). Dann bedeutet die Coordinate $OA' = x'$

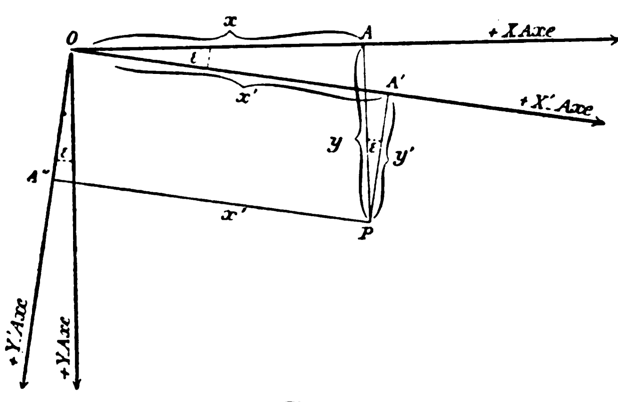


Fig. 14.

eines Punktes P, welcher im alten Coordinatensystem die Coordinaten $OA = x$ und $AP = y$ besitzt, die Projection des Linienzuges OAP auf die X'-Axe, wie man aus der Figur erkennt. Die Projection von OA auf die X'-Axe hat die Grösse $x \cos \varepsilon$, die entsprechende Projection von AP die Grösse $y \sin \varepsilon$. Die Projection von A. auf die X'-Axe fällt zwischen O und A'; deshalb ist OA' oder x' die Summe dieser beiden Projectionen, also

$$x' = x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon . \tag{36}$$

Die y'-Coordinate $A'P$ oder OA'' des Punktes P ist ferner gleich der Projection des gebrochenen Linienzuges OAP auf die Y'-Axe. Da nun die Projection von A auf die Y'-Axe ausserhalb OA'' fallen würde, wie man leicht aus der Figur erkennt, so ist y' gleich der Differenz der Projectionen von AP und OA auf die Y'-Axe. Die

erstere hat den Werth $y \cos \varepsilon$, die letztere den Werth $x \sin \varepsilon$, daher ist

$$y' = y \cos \varepsilon - x \sin \varepsilon . \tag{37}$$

Fügt man diesen beiden Relationen noch die für z' geltende

$$z' = z \tag{38}$$

hinzu, so hat man die drei Formeln, welche die ursprünglichen Coordinaten eines jeden Punktes des Raumes in die Coordinaten des durch die Drehung entstandenen Systems überführen.

Da

$$\varepsilon = 1^0\,21' ,$$

so ist

$$\cos \varepsilon = 0{,}99972 \qquad \text{und} \qquad \sin \varepsilon = 0{,}02356 ,$$

und die Formeln nehmen die besondere Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0{,}99972 \,.\, x + 0{,}02356 \,.\, y, \\ y' &= 0{,}99972 \,.\, y - 0{,}02356 \,.\, x, \\ z' &= z \,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Die sämmtlichen in der (nicht mitgetheilten) Tabelle A niedergelegten räumlichen Coordinaten der Röhrenpunkte für den I. Versuch sind nun von mir dieser Transformation unterworfen worden. Da auf dieselben noch weitere Transformationen angewendet wurden, so sollen die Resultate wieder nicht in extenso mitgetheilt werden, um den Umfang der Arbeit nicht unnöthig zu vergrössern. Die entsprechende Tabelle sei kurz mit Tabelle A' bezeichnet. Die Aufzeichnung der sich aus diesen Coordinaten ergebenden horizontalen ($X'\,Y'$)-Projectionen sämmtlicher Bahncurven bestätigte zunächst, dass nunmehr die Gangrichtung mit der positiven Richtung der X'-Axe identisch war. Sie förderte aber gleichzeitig das Resultat zu Tage, dass die Axe der Wellenlinie des Kopfpunktes noch nicht mit der X'-Axe selbst zusammenfiel, sondern in einer Entfernung von zufälliger Weise gerade 1,00 cm nach der negativen Seite der Y'-Axe zu parallel mit der X'-Axe verlief. Um diesen Unterschied noch auszugleichen, machte es sich daher nöthig, noch das ganze Coordinatensystem einer Parallelverschiebung von 1,00 cm in der Richtung der negativen Y'-Axe zu unterwerfen.

Bevor diese weitere Coordinatentransformation ausgeführt wurde, sind aus den Coordinaten x', y', z' der (nicht mitgetheilten) Tabelle A', welche zu Punkten der Geissler'schen Röhren gehören, die räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte im Innern des menschlichen Körpers in der oben angedeuteten Weise abgeleitet worden.

Für die Bestimmung der Coordinaten der Schultergelenk- und Hüftgelenkmittelpunkte waren dabei insbesondere folgende Gesichtspunkte massgebend.

Wenn man ganz allgemein aus den Coordinaten x'_a, y'_a, z'_a und x'_b, y'_b, z'_b zweier Punkte A und B des Raumes die Coordinaten x', y', z' eines Punktes P der Verbindungslinie von A und B ableiten will,

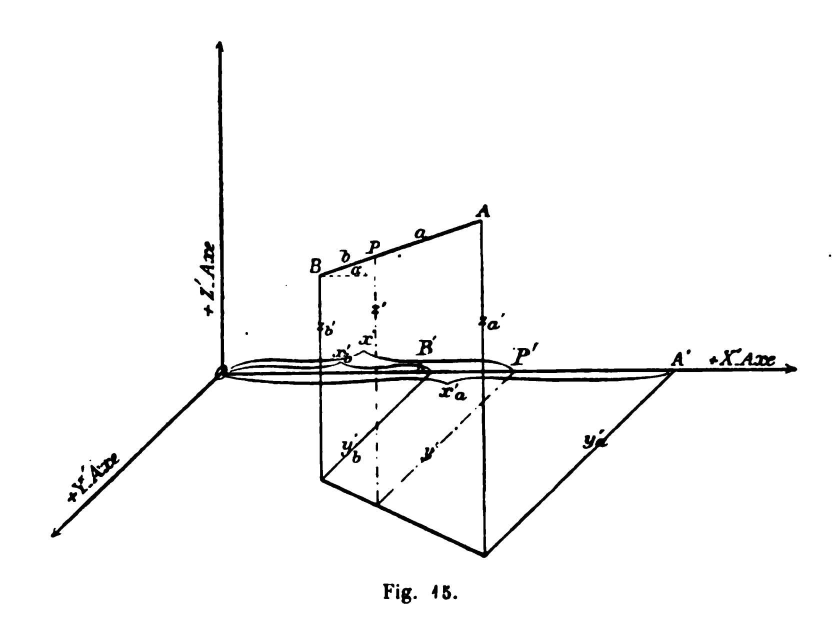


Fig. 15.

so ist es von Vortheil, sich zunächst die Winkel zu verschaffen, welche die Richtung der Verbindungslinie $\overline{BA}$ mit den positiven Richtungen der drei Coordinatenaxen bildet. Bezeichnet man diese drei Winkel mit α, β, γ und die Entfernung der beiden Punkte A und B mit e, so besitzt die Projection $\overline{B'A'}$ der Strecke $\overline{BA}$ auf die X'-Axe (Fig. 15) die Länge $e \cdot \cos \alpha$. Da $\overline{OA'} = x'_a$ und $\overline{OB'} = x'_b$ ist, so ist andererseits $\overline{B'A'} = x'_a - x'_b$. Man hat daher die Relation:

$$e \cdot \cos \alpha = x'_a - x'_b . \qquad (10)$$

Beachtet man noch, dass die Entfernung e mit den Coordinaten der Punkte A' und B' durch die Beziehung:

$$e^2 = (x'_a - x'_b)^2 + (y'_a - y'_b)^2 + (z'_a - z'_b)^2 \tag{41}$$

zusammenhängt, so folgt für $\cos\alpha$ der Werth:

$$\cos\alpha = \frac{x'_a - x'_b}{\sqrt{(x'_a - x'_b)^2 + (y'_a - y'_b)^2 + (z'_a - z'_b)^2}}$$

und entsprechend für die anderen Winkel

$$\cos\beta = \frac{y'_a - y'_b}{\sqrt{(x'_a - x'_b)^2 + (y'_a - y'_b)^2 + (z'_a - z'_b)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z'_a - z'_b}{\sqrt{(x'_a - x'_b)^2 + (y'_a - y'_b)^2 + (z'_a - z'_b)^2}} \tag{42}$$

Diese drei Cosinus, welche man die Richtungscosinus der Verbindungslinie $\overline{BA}$ nennt, sind bei allen 31 Phasen sowohl für die Verbindungslinie der beiden Schulterpunkte als der beiden Hüftpunkte berechnet worden. Der Punkt A ist dabei immer als der rechten, der Punkt B als der linken Körperseite angehörend genommen worden. Da diese Werthe zugleich die Richtungscosinus der Verbindungslinie der Schultergelenkmittelpunkte als auch der Hüftgelenkmittelpunkte oder, wie dieselben kurz genannt sein mögen, der Schulterlinie und der Hüftlinie darstellen, so sind ihre Werthe für den I. Versuch in der folgenden Tabelle 7 niedergelegt worden. Aus denselben lassen sich, worauf erst später näher eingegangen werden soll, die Bewegungen der Schulter- und Hüftlinie während des Ganges ohne Weiteres erkennen.

Tabelle 7.

I. Versuch.

Nr.	Richtungscosinus der						Nr.
	Schulterlinie			Hüftlinie			
	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	
1	+ 0,0324	+ 0,9998	— 0,0042	— *0,0529*[1]	+ *0,9965*	— *0,1206*	1
2	+ 0,0275	+ 0,9995	— 0,0069	+ 0,0005	+ 0,9949	— 0,1047	2
3	+ 0,0217	+ 0,9995	— 0,0085	+ *0,0500*	+ *0,9935*	— *0,0829*	3
4	+ 0,0187	+ 0,9998	— 0,0129	+ 0,0924	+ 0,9934	— 0,0689	4
5	+ 0,0124	+ 1,0000	— 0,0078	+ 0,1160	+ 0,9912	— 0,0620	5
6	+ 0,0029	+ 0,9998	— 0,0007	+ 0,1240	+ 0,9898	— 0,0699	6
7	— 0,0069	+ 0,9998	+ 0,0036	+ 0,1162	+ 0,9896	— 0,0901	7
8	— 0,0157	+ 0,9998	+ 0,0031	+ 0,1091	+ 0,9874	— 0,1161	8
9	— 0,0221	+ 0,9995	— 0,0009	+ 0,1152	+ 0,9853	— 0,1258	9
10	— 0,0272	+ 0,9995	— 0,0057	+ 0,1223	+ 0,9858	— 0,1187	10
11	— 0,0161	+ 0,9991	— 0,0100	+ 0,1353	+ 0,9843	— 0,1119	11
12	+ 0,0016	+ 0,9998	— 0,0145	+ 0,1215	+ 0,9887	— 0,0853	12
13	+ 0,0152	+ 0,9995	— 0,0164	+ 0,0914	+ 0,9935	— 0,0681	13
14	+ 0,0250	+ 0,9995	— 0,0100	+ *0,0676*	+ *0,9947*	— *0,0553*	14
15	+ 0,0377	+ 0,9993	+ 0,0016	+ 0,0271	+ 0,9970	— 0,0722	15
16	+ 0,0538	+ 0,9986	+ 0,0107	— *0,0265*	+ *0,9965*	— *0,0971*	16
17	+ 0,0656	+ 0,9973	+ 0,0167	— 0,0608	+ 0,9921	— 0,1079	17
18	+ 0,0719	+ 0,9971	+ 0,0147	— 0,0796	+ 0,9908	— 0,1088	18
19	+ 0,0837	+ 0,9975	+ 0,0125	— 0,0828	+ 0,9913	— 0,1004	19
20	+ 0,0904	+ 0,9957	+ 0,0125	— 0,0906	+ 0,9918	— 0,0882	20
21	+ 0,0946	+ 0,9954	+ 0,0140	— 0,1093	+ 0,9916	— 0,0673	21
22	+ 0,0930	+ 0,9954	+ 0,0145	— 0,1300	+ 0,9896	— 0,0546	22
23	+ 0,0862	+ 0,9961	+ 0,0115	— 0,1360	+ 0,9887	— 0,0571	23
24	+ 0,0696	+ 0,9973	+ 0,0164	— 0,1537	+ 0,9856	— 0,0691	24
25	+ 0,0545	+ 0,9982	+ 0,0185	— 0,1273	+ 0,9878	— 0,0873	25
26	+ 0,0440	+ 0,9989	+ 0,0155	— *0,1059*	+ *0,9900*	— *0,0982*	26
27	+ 0,0338	+ 0,9993	+ 0,0083	— *0,0794*	+ *0,9924*	— *0,1129*	27
28	+ 0,0171	+ 0,9998	— 0,0027	— 0,0402	+ 0,9926	— 0,1127	28
29	— 0,0027	+ 0,9998	— 0,0117	— *0,0059*	+ *0,9929*	— *0,0900*	29
30	— 0,0199	+ 0,9993	— 0,0145	+ 0,0265	+ 0,9971	— 0,0692	30
31	— 0,0321	+ 0,9993	— 0,0105	+ 0,0387	+ 0,9968	— 0,0635	31

Mit Hülfe dieser Richtungscosinus lassen sich nun leicht die Coordinaten x', y', z' eines Punktes P der Verbindungslinie $\overline{BA}$ be-

[1]) Die schräg gedruckten Zahlen dieser und späterer Tabellen sind nicht direct aus der Messung, sondern unter Zuhülfenahme der anderen Zahlen durch Interpolation gefunden worden.

rechnen, wenn man entweder den Abstand a desselben von A oder seinen Abstand b von B kennt. Liegt P, wie in Figur 15, zwischen B und A, so hat man zu diesem Zwecke nur jede der drei Coordinaten des Punktes A, beziehungsweise B, um die Projection der Strecke $\overline{PA}$, beziehungsweise $\overline{BP}$, auf die betreffende Coordinatenaxe zu vermindern, beziehungsweise zu vermehren. Ist P' beispielsweise die Projection von P auf die X-Axe, so ist

$$\overline{OP'} = \overline{OA'} - \overline{P'A'} \quad \text{oder} \quad \overline{OP'} = \overline{OB'} + \overline{B'P'}.$$

Da die Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{BP}$ dieselben Richtungscosinus besitzen, wie $\overline{BA}$, so folgen daraus entweder die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'_a - a \,.\, \cos\alpha \\ y' &= y'_a - a \,.\, \cos\beta \\ z' &= z'_a - a \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'_b + b \,.\, \cos\alpha \\ y' &= y'_b + b \,.\, \cos\beta \\ z' &= z'_b + b \,.\, \cos\gamma \,. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Die beiden Arten der Berechnung einer jeden Coordinate geben eine Controle für die Rechnung ab.

Nach diesen Formeln sind nun die Coordinaten der Mittelpunkte von den Schulter- und Hüftgelenken berechnet worden.

Was zunächst die Schultergelenkmitten anlangt, so sind zur Berechnung der Coordinaten der rechten Seite die ersten Formeln, für die linke Seite dagegen die zweiten Formeln verwendet worden. Es war dabei als Punkt A der GEISSLER'sche Röhrenpunkt der rechten Seite und als B der der linken Seite aufgefasst worden. Bezeichnet man die Coordinaten des rechten Gelenkmittelpunktes mit x'_r, y'_r, z'_r, die des linken Gelenkmittelpunktes mit x'_l, y'_l, z'_l und beachtet, dass nach den directen Messungen (Seite 236) der Abstand $a = 4{,}5$ cm und der Abstand $b = 5{,}5$ cm betrug, so lauten die speciellen Formeln für den rechten Schultergelenk-Mittelpunkt:

$$\left.\begin{aligned} x'_r &= x'_a - 4{,}5 \,.\, \cos\alpha \\ y'_r &= y'_a - 4{,}5 \,.\, \cos\beta \\ z'_r &= z'_a - 4{,}5 \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

und für den linken Schultergelenkmittelpunkt:

$$\left.\begin{aligned} x'_l &= x'_b + 5{,}5 \,.\, \cos\alpha \\ y'_l &= y'_b + 5{,}5 \,.\, \cos\beta \\ z'_l &= z'_b + 5{,}5 \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

wobei für den I. Versuch die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus dem ersten Theil der Tabelle 7 und die Werte von x'_a, y'_a, z'_a; x'_b, y'_b, z'_b aus der durch die Drehung des Coordinatensystems um den Winkel ε entstandenen (nicht mitgetheilten) Coordinatentabelle A' zu entnehmen waren. Auch die Resultate dieser Berechnung sollen, da sie noch nicht das Endziel darstellen, nicht angeführt werden.

Die entsprechenden Formeln für die Hüftgelenkmittelpunkte würde man erhalten, indem man die Abstände $11\frac{3}{4}$ cm und $12\frac{1}{4}$ cm für a und b einsetzt und unter x'_a, y'_a, z'_a und x'_b, y'_b, z'_b die Coordinaten der beiden leuchtenden Hüftpunkte versteht. Diese Formeln sind jedoch nicht beide zur Verwendung gekommen.

Es ist zweckmässig, bei der Ableitung der Coordinaten der Hüftgelenkmitten dem Umstande Rechnung zu tragen, dass die Entfernung derselben absolut constant ist. Es kann dies dadurch geschehen, dass man für beide Gelenke von derselben Seite ausgeht. Da die Bahncurve des linken Hüftpunktes von etwaigen Fehlern, welche durch das plötzliche Aufsetzen des Beines auf den Boden bedingt sein konnten, wenigstens in der Mitte des zur Messung herausgegriffenen Bewegungsabschnittes frei war, weil sich zu dieser Zeit das linke Bein in Schwingung befand, so wurde diese für die Rechnung verwendet. Als Entfernung der beiden Hüftgelenkmitten hatte sich bei der directen Messung mit der Annäherung, welche man überhaupt erreichen konnte, 17 cm herausgestellt. Daher war in Anbetracht des Abstandes von 12,25 cm des linken Gelenkmittelpunktes von dem linken Röhrenpunkte (Seite 236) die Entfernung des rechten Hüftgelenkmittelpunktes von dem linken Röhrenpunkte $12{,}25 + 17 \text{ cm} = 29{,}25$ cm. In Folge dessen erhielt man zur Ableitung der Coordinaten

für den rechten Hüftgelenkmittelpunkt:

$$\left.\begin{aligned} x'_r &= x'_b + 29{,}25 \,.\, \cos\alpha \\ y'_r &= y'_b + 29{,}25 \,.\, \cos\beta \\ z'_r &= z'_b + 29{,}25 \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

und für den linken Hüftgelenkmittelpunkt:

$$\left.\begin{aligned} x_l' &= x_b' + 12{,}25 \,.\, \cos\alpha \\ y_l' &= y_b' + 12{,}25 \,.\, \cos\beta \\ z_l' &= z_b' + 12{,}25 \,.\, \cos\gamma \end{aligned}\right\}, \qquad (48)$$

wobei für den I. Versuch die Werthe der Richtungscosinus aus dem zweiten Theile der Tabelle 7 zu entnehmen sind und die x_b', y_b', z_b' die Coordinaten des leuchtenden Punktes an der linken Hüfte bedeuten.

Auch die aus diesen Formeln erhaltenen Resultate sollen in der jetzigen Form noch nicht mitgetheilt werden.

Was nun die Coordinaten der Mitten vom Ellbogen-, Hand-, Knie- und I. Fussgelenk anlangt, so stimmen die x' und z' mit den entsprechenden Coordinaten der zugeordneten Röhrenpunkte überein, und es ändern sich nur die y'-Coordinaten um die auf Seite 236 angegebenen Abstände der beiden zugehörigen Punkte. Unter Verwendung ganz entsprechender Bezeichnungen wie bisher hat man demnach folgende Formeln

für den Mittelpunkt des rechten Ellbogengelenks: $y_r' = y_a' - 5{,}5$ (49)
für den Mittelpunkt des linken Ellbogengelenks: $y_l' = y_b' + 5{,}5$ (50)
für den Mittelpunkt des rechten Handgelenks: $y_r' = y_a' - 3$ (51)
für den Mittelpunkt des linken Handgelenks: $y_l' = y_b' + 3$ (52)
für den Mittelpunkt des rechten Kniegelenks: $y_r' = y_a' - 8{,}5$ (53)
für den Mittelpunkt des linken Kniegelenks: $y_l' = y_b' + 9{,}5$ (54)
für den Mittelpunkt des rechten I. Fussgelenks: $y_r' = y_a' - 5{,}5$ (55)
für den Mittelpunkt des linken I. Fussgelenks: $y_l' = y_b' + 6{,}5$, (56)

wo die y_a' und y_b' aus der (nicht mitgetheilten) Coordinatentabelle A′ zu entnehmen sind, welche durch die Drehung des Coordinatensystems um den Winkel ε entstanden ist.

Endlich waren noch die räumlichen Coordinaten von Punkten des menschlichen Körpers abzuleiten, welche nicht in die Mitte eines Gelenks fielen. Es waren dies der Scheitelpunkt des Kopfes, die Schwerpunkte der beiden Füsse und die Fussspitzen.

Die directe Messung hatte ergeben, dass der Scheitelpunkt des Kopfes 3 cm unterhalb und 4 cm hinter dem an dem GEISSLER'schen Kopfröhrchen markierten Punkte lag. Bezeichnet man mit x_k', y_k', z_k' die Coordinaten dieses Röhrenpunktes und mit x_0', y_0', z_0' die des

Kopfscheitels, so ergeben sich unter der Voraussetzung, dass der Kopf beim Gehen keine wesentlichen Beugungen vorwärts und rückwärts erfahren hat, folgende Formeln:

für den Kopfscheitelpunkt:

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= x_k' - 4 \\ y_0' &= y_k' \\ z_0' &= z_k' - 3 \end{aligned}\right\} . \tag{57}$$

Da bei gerader Haltung des Kopfes der Schwerpunkt desselben vertical unter dem Scheitel und zwar in einer Entfernung von 10 cm lag, wie die directe Messung der Kopfdimensionen des Versuchsindividuums im Vergleich zu früheren Befunden über die Lage des Kopfschwerpunktes[1]) ergab, so erhält man aus den Coordinaten des Röhrenpunktes unter der, allerdings nicht streng beim Gehen verwirklichten Annahme fortwährend gerader Haltung des Kopfes, vermittelst folgender Formeln die Coordinaten x_s', y_s', z_s'

des Kopfschwerpunktes:

$$\left.\begin{aligned} x_s' &= x_k' - 4 \\ y_s' &= y_k' \\ z_s' &= z_k' - 13 \end{aligned}\right\} . \tag{58}$$

Der dem Schwerpunkt des Fusses zugeordnete Punkt der Geissler-schen Fussröhre lag beim rechten Fuss 5 cm und beim linken 6 cm lateralwärts vom Schwerpunkt, und das vordere Ende der Fussröhre verlief rechts in einer Entfernung von 1 cm, links von 3,5 cm nach aussen von der Fusslängsaxe. Dabei entsprach der letztere nicht genau der Fussspitze, sondern einem Punkte der Fusslängsaxe, welcher ca. 3 cm hinter der Spitze lag; trotzdem soll dieser Punkt kurz mit »Fussspitze« bezeichnet sein.

---

1) W. Braune und O. Fischer, Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen. Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. XV, Nr. VII.

In Folge dessen erhält man noch folgende, allerdings nur annähernd richtige Formeln zur Bestimmung der y'-Coordinate

für den rechten Fussschwerpunkt: $y'_r = y'_a - 5$ (59)

für den linken Fussschwerpunkt: $y'_l = y'_b + 6$ (60)

für die rechte Fussspitze: $y'_r = y'_a - 1$ (61)

für die linke Fussspitze: $y'_l = y'_b + 3{,}5$, (62)

während die x'- und z'-Coordinate ihre Werthe beibehalten.

Alle die genannten Coordinatentransformationen sind nicht allein ausgeführt worden; sie wurden verbunden mit einigen Parallelverschiebungen des Coordinatensystems, damit die Coordinaten auf viele Fragen unmittelbar Antwort geben konnten. Es würden natürlich auch die auf ein ganz beliebig im Raume gelegenes System bezogenen Coordinaten die genügende Unterlage für die Analyse des ganzen Bewegungsvorganges abgeben. Man müsste aber im Allgemeinen viel mehr rechnen, um gewisse Resultate zu Tage zu fördern. Hat man dagegen von vornherein die ganze Bewegung auf ein für den speciellen Fall besonders zweckmässiges Coordinatensystem bezogen, so erhält man theils viele wichtige Resultate ohne alle weitere Rechnung, theils reduciert sich die zur Ableitung bestimmmter Resultate erforderliche Rechnung auf ein Minimum. Es wird so die Mühe mehrfach vergolten, welche aufgewendet werden musste, um den Bewegungsvorgang, welcher zunächst in einem beliebigen Coordinatensystem dargestellt worden ist, auf ein zweckmässigeres System zu beziehen.

Um die relative Bewegung der einzelnen Gelenkmittelpunkte in Bezug auf die Gangebene unmittelbar aus den Coordinaten zu erhalten, musste, wie schon früher auseinandergesetzt worden ist, das ganze Coordinatensystem noch 1 cm parallel der Y'-Axe verschoben werden; dies bedingt eine Vergrösserung sämmtlicher y'-Coordinaten um 1.

Um die Erhebungen der Gelenkmittelpunkte über dem horizontalen Fussboden ohne Weiteres zur Anschauung zu bringen, ist es nöthig, die horizontale $X'Y'$-Ebene parallel nach unten bis zum Fussboden zu verlegen. Da der bisherige Coordinatenanfangspunkt 90 cm über dem Fussboden lag, so wird durch diese Verschiebung eine Vergrösserung sämmtlicher Z-**Coordinaten um 90** erforderlich.

Endlich bietet es einen gewissen Vortheil für die Rechnung, wenn man das Coordinatensystem so legt, dass die ganze Bewegung auf ein und derselben Seite der verticalen $Y'Z'$-Ebene abläuft. Dies ist dadurch zu erreichen, dass man das Coordinatensystem um eine genügend grosse Strecke in der der Gangrichtung entgegengesetzten Richtung zurückschiebt. Dadurch wird eine Vergrösserung der x'-Coordinaten bedingt. Beim I. Versuch genügte es für die zur Messung herausgegriffenen 31 Bewegungsphasen, das System um 120 cm zurückzuschieben. Es mussten in Folge dessen alle x'-Coordinaten um 120 vermehrt werden.

Verbindet man schliesslich diese drei Coordinatenverschiebungen mit allen früheren Transformationen, welchen die in Tabelle A niedergelegten räumlichen Coordinaten der Geissler'schen Röhrenpunkte successiv, von der Drehung des Coordinatensystems um den Winkel ε angefangen, unterworfen worden sind, so erhält man die folgenden Coordinatentransformationen, welche die Coordinaten der Röhrenpunkte direct in die Coordinaten der Gelenkmittelpunkte, der Schwerpunkte von Kopf und Fuss, des Kopfscheitels und der Fussspitze überführen. Zur Unterscheidung sind dabei die Coordinaten der Tabelle A in Klammer geschlossen und mit den Indices r, l oder o versehen worden, je nachdem die Röhrenpunkte, denen sie zugehören, auf der rechten oder linken Seite oder in der Medianebene des Körpers liegen.

Mittelpunkt des rechten Schultergelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r] \cdot \cos\varepsilon + [y_r] \cdot \sin\varepsilon - 4{,}5 \cdot \cos\alpha + 120 \\ y &= [y_r] \cdot \cos\varepsilon - [x_r] \cdot \sin\varepsilon - 4{,}5 \cdot \cos\beta + 1 \\ z &= [z_r] - 4{,}5 \cdot \cos\gamma + 90 \end{aligned}\right\} . \qquad (63)$$

Mittelpunkt des linken Schultergelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l] \cdot \cos\varepsilon + [y_l] \cdot \sin\varepsilon + 5{,}5 \cdot \cos\alpha + 120 \\ y &= [y_l] \cdot \cos\varepsilon - [x_l] \cdot \sin\varepsilon + 5{,}5 \cdot \cos\beta + 1 \\ z &= [z_l] + 5{,}5 \cdot \cos\gamma + 90 \end{aligned}\right\} . \qquad (64)$$

Mittelpunkt des rechten Ellbogengelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r] \cdot \cos\varepsilon + [y_r] \cdot \sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_r] \cdot \cos\varepsilon - [x_r] \cdot \sin\varepsilon - 4{,}5 \\ z &= [z_r] + 90 \end{aligned}\right\} . \qquad (65)$$

Mittelpunkt des linken Ellbogengelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 6{,}5 \\ z &= [z_l] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{66}$$

Mittelpunkt des rechten Handgelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r]\cdot\cos\varepsilon + [y_r]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_r]\cdot\cos\varepsilon - [x_r]\cdot\sin\varepsilon - 2 \\ z &= [z_r] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{67}$$

Mittelpunkt des linken Handgelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 4 \\ z &= [z_l] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{68}$$

Mittelpunkt des rechten Hüftgelenks[1]):

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 29{,}25\cdot\cos\alpha + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 29{,}25\cdot\cos\beta + 1 \\ z &= [z_l] + 12{,}25\cdot\cos\gamma + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{69}$$

Mittelpunkt des linken Hüftgelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 12{,}25\cdot\cos\alpha + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 12{,}25\cdot\cos\beta + 1 \\ z &= [z_l] + 12{,}25\cdot\cos\gamma + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{70}$$

Mittelpunkt des rechten Kniegelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r]\cdot\cos\varepsilon + [y_r]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_r]\cdot\cos\varepsilon - [x_r]\cdot\sin\varepsilon - 7{,}5 \\ z &= [z_r] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{71}$$

Mittelpunkt des linken Kniegelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 10{,}5 \\ z &= [z_l] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{72}$$

Mittelpunkt des rechten I. Fussgelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r]\cdot\cos\varepsilon + [y_r]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_r]\cdot\cos\varepsilon - [x_r]\cdot\sin\varepsilon - 4{,}5 \\ z &= [z_r] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{73}$$

---

1) Es ist zu beachten, dass die Coordinaten des rechten Hüftgelenk-Mittelpunktes aus den Coordinaten des Hüftpunktes der linken Oberschenkelröhre abgeleitet worden sind.

Mittelpunkt des linken I. Fussgelenks:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 7{,}5 \\ z &= [z_l] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{74}$$

Schwerpunkt des rechten Fusses:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r]\cdot\cos\varepsilon + [y_r]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_r]\cdot\cos\varepsilon - [x_r]\cdot\sin\varepsilon - 4 \\ z &= [z_r] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{75}$$

Schwerpunkt des linken Fusses:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 7 \\ z &= [z_l] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{76}$$

Rechte Fussspitze[1]):

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_r]\cdot\cos\varepsilon + [y_r]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_r]\cdot\cos\varepsilon - [x_r]\cdot\sin\varepsilon \\ z &= [z_r] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{77}$$

Linke Fussspitze:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_l]\cdot\cos\varepsilon + [y_l]\cdot\sin\varepsilon + 120 \\ y &= [y_l]\cdot\cos\varepsilon - [x_l]\cdot\sin\varepsilon + 4{,}5 \\ z &= [z_l] + 90 \end{aligned}\right\}. \tag{78}$$

Scheitelpunkt des Kopfes:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_o]\cdot\cos\varepsilon + [y_o]\cdot\sin\varepsilon + 116 \\ y &= [y_o]\cdot\cos\varepsilon - [x_o]\cdot\sin\varepsilon + 1 \\ z &= [z_o] + 87 \end{aligned}\right\}. \tag{79}$$

Schwerpunkt des Kopfes:

$$\left.\begin{aligned} x &= [x_o]\cdot\cos\varepsilon + [y_o]\cdot\sin\varepsilon + 116 \\ y &= [y_o]\cdot\cos\varepsilon - [x_o]\cdot\sin\varepsilon + 1 \\ z &= [z_o] + 77 \end{aligned}\right\}. \tag{80}$$

---

1) Genauer: Punkt der Fusslängsaxe 3 cm hinter der Spitze.

Alle diese Formeln gelten zunächst für den I. Versuch. In ihnen ist

$$\cos\varepsilon = 0{,}99972 \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon = 0{,}02356$$

zu setzen; die Werthe der in den Formeln für die Schultergelenk- und Hüftgelenk-Mittelpunkte auftretenden Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ finden sich in Tabelle 7 auf Seite 244 niedergelegt. Mit Ausnahme der Formeln für den rechten Hüftgelenk-Mittelpunkt gehören die eingeklammerten Coordinaten immer dem Punkte der GEISSLER'schen Röhren an, welcher dem betreffenden Gelenkmittelpunkte zugeordnet war.

Für den II. und III. Versuch erleiden diese Formeln nur geringe Aenderungen.

Zunächst besitzt bei jedem der beiden anderen Versuche naturgemäss der Winkel ε eine andere Grösse.

Für den II. Versuch hatte sich ergeben

$$\operatorname{tang}\varepsilon = 0{,}03191.$$

Daraus folgten als Werthe von $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$

$$\cos\varepsilon = 0{,}99949 \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon = 0{,}03189.$$

Der Winkel ε selbst besitzt die Grösse

$$\varepsilon = 1^0 49' 39''.$$

Beim III. Versuch wurde gefunden

$$\operatorname{tang}\varepsilon = 0{,}02974,$$

woraus folgt

$$\cos\varepsilon = 0{,}99956 \quad \text{und} \quad \sin\varepsilon = 0{,}02973$$

und für ε die Grösse

$$\varepsilon = 1^0 42' 13''.$$

Es sind also zunächst für die anderen Versuche diese angeführten Werthe für $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ in die Formeln einzusetzen. Ferner hatte sich nach der Drehung des Coordinatensystems um den entsprechenden Winkel ε und nach Aufzeichnung der $X'Y'$-Projection ergeben, dass zwar die Gangrichtung nunmehr parallel der Richtung der positiven X'-Axe lief, dass aber die Gangebene beim II. Versuch noch 1,65 cm und beim III. Versuch noch 1,00 cm nach der positiven Seite der Y'-Axe von der $X'Z'$-Ebene entfernt lag. Während beim ersten Ver-

such sich eine Vergrösserung sämmtlicher y'-Coordinaten um 1 nöthig machte, folgt aus diesen Umständen, dass die y'-Coordinaten beim II. Versuch um 1,65 und beim III. Versuch um 1 vermindert werden mussten. Endlich war beim II. Versuch die $Y'Z'$-Ebene nicht bloss um 120 cm, wie beim I. Versuch und III. Versuch, zurückzuschieben, damit der ganze Bewegungsvorgang sich auf derselben Seite dieser Coordinaten-Ebene abspielte, sondern um 140 cm. Im Uebrigen waren für die beiden letzten Versuche die Coordinaten-Transformationen genau dieselben wie beim ersten.

In Folge dessen erhält man aus den Formeln des I. Versuchs die zum II. Versuch gehörenden, indem man ein Mal die veränderten Werthe von $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ berücksichtigt und dann sämmtlichen Formeln für die x-Coordinaten noch 20 hinzufügt, in den sämmtlichen Formeln für die y-Coordinaten dagegen 2,65 abzieht.

Für den III. Versuch hat man nur in den Formeln für die y-Coordinaten des I. Versuchs 2 abzuziehen, die x-Coordinaten aber genau nach denselben Formeln zu berechnen wie beim I. Versuch.

Selbstverständlich werden bei beiden Versuchen die Richtungscosinus der Schulterlinie und Hüftlinie andere Werthe besitzen, die sich in derselben Weise wie beim I. Versuch, nämlich mit Hülfe der Formeln (42) auf Seite 243, berechnen. Die Resultate dieser Berechnung sind in den folgenden beiden Tabellen 8 und 9 niedergelegt worden.

Tabelle 8.

II. Versuch.

Nr.	Richtungscosinus der						Nr.
	Schulterlinie			Hüftlinie			
	cos α	cos β	cos γ	cos α	cos β	cos γ	
1	− 0,0042	+ 0,9996	+ 0,0325	− 0,1340	+ 0,9870	− 0,0899	1
2	− 0,0125	+ 0,9995	+ 0,0294	*− 0,0176*	*+ 0,9900*	*− 0,0724*	2
3	− 0,0183	+ 0,9998	+ 0,0230	*+ 0,0555*	*+ 0,9918*	*− 0,0706*	3
4	− 0,0279	+ 0,9995	+ 0,0114	*+ 0,0555*	*+ 0,9929*	*− 0,0759*	4
5	− 0,0377	+ 0,9993	− 0,0025	*+ 0,0471*	*+ 0,9955*	*− 0,0782*	5
6	− 0,0475	+ 0,9989	− 0,0141	+ 0,0485	+ 0,9966	− 0,0694	6
7	− 0,0533	+ 0,9984	− 0,0172	+ 0,0701	+ 0,9956	− 0,0635	7
8	− 0,0555	+ 0,9984	− 0,0141	+ 0,0734	+ 0,9944	− 0,0780	8
9	− 0,0563	+ 0,9982	− 0,0124	+ 0,0662	+ 0,9923	− 0,1060	9
10	− 0,0572	+ 0,9982	− 0,0122	+ 0,0758	+ 0,9891	− 0,1254	10
11	− 0,0564	+ 0,9982	− 0,0138	+ 0,0954	+ 0,9882	− 0,1210	11
12	− 0,0476	+ 0,9991	− 0,0143	+ 0,1127	+ 0,9864	− 0,1190	12
13	− 0,0203	+ 1	− 0,0127	+ 0,1057	+ 0,9898	− 0,0977	13
14	+ 0,0011	+ 0,9998	− 0,0147	+ 0,0892	+ 0,9935	− 0,0696	14
15	+ 0,0190	+ 0,9998	− 0,0120	+ 0,0562	+ 0,9966	*− 0,1024*	15
16	+ 0,0287	+ 0,9996	− 0,0022	*+ 0,0294*	*+ 0,9959*	*− 0,1029*	16
17	+ 0,0380	+ 0,9993	+ 0,0106	− 0,0002	+ 0,9963	− 0,0862	17
18	+ 0,0438	+ 0,9991	+ 0,0172	*− 0,0382*	*+ 0,9959*	*− 0,0935*	18
19	+ 0,0471	+ 0,9987	+ 0,0225	*− 0,0718*	*+ 0,9953*	*− 0,0953*	19
20	+ 0,0521	+ 0,9984	+ 0,0186	− 0,0975	+ 0,9906	− 0,0975	20
21	+ 0,0592	+ 0,9984	+ 0,0123	− 0,1106	+ 0,9903	− 0,0820	21
22	+ 0,0658	+ 0,9980	+ 0,0129	− 0,1288	+ 0,9898	− 0,0619	22
23	+ 0,0677	+ 0,9978	+ 0,0145	− 0,1446	+ 0,9881	− 0,0499	23
24	+ 0,0683	+ 0,9977	+ 0,0152	− 0,1448	+ 0,9881	− 0,0532	24
25	+ 0,0591	+ 0,9982	+ 0,0170	− 0,1602	+ 0,9848	− 0,0671	25
26	+ 0,0484	+ 0,9989	+ 0,0200	− 0,1305	+ 0,9875	− 0,0876	26
27	+ 0,0459	+ 0,9989	+ 0,0190	*− 0,1294*	*+ 0,9865*	*− 0,1000*	27
28	+ 0,0358	+ 0,9993	+ 0,0101	*− 0,0765*	*+ 0,9853*	*− 0,0765*	28
29	+ 0,0206	+ 1	+ 0,0061	*− 0,0500*	*+ 0,9818*	*− 0,0594*	29
30	+ 0,0049	+ 1	− 0,0004	*− 0,0088*	*+ 0,9765*	*− 0,0565*	30
31	− 0,0042	+ 1	− 0,0018	+ 0,0503	+ 0,9743	− 0,0561	31

Tabelle 9.

III. Versuch.

Nr.	Richtungscosinus der Schulterlinie cos α	cos β	cos γ	Hüftlinie cos α	cos β	cos γ	Nr.
1	— 0,0325	+ 0,9986	— 0,0394	— 0,1009	+ 0,9934	+ 0,0578	1
2	— 0,0290	+ 0,9989	— 0,0384	— 0,0812	+ 0,9938	+ 0,0772	2
3	— 0,0269	+ 0,9989	— 0,0347	— 0,0652	+ 0,9934	+ 0,0949	3
4	— 0,0240	+ 0,9993	— 0,0290	— 0,0483	+ 0,9933	+ 0,1061	4
5	— 0,0224	+ 0,9993	— 0,0237	— 0,0379	+ 0,9940	+ 0,1030	5
6	— 0,0212	+ 0,9998	— 0,0173	— 0,0214	+ 0,9955	+ 0,0911	6
7	— 0,0197	+ 0,9998	— 0,0137	— 0,0055	+ 0,9968	+ 0,0780	7
8	— 0,0129	+ 1	— 0,0124	+ 0,0077	+ 0,9975	+ 0,0714	8
9	— 0,0005	+ 1	— 0,0124	+ 0,0168	+ 0,9975	+ 0,0699	9
10	+ 0,0110	+ 1	— 0,0133	+ 0,0194	+ 0,9966	+ 0,0805	10
11	+ 0,0248	+ 0,9993	— 0,0163	+ 0,0190	+ 0,9946	+ 0,1013	11
12	+ 0,0302	+ 0,9995	— 0,0046	+ 0,0081	+ 0,9929	+ 0,1196	12
13	+ 0,0390	+ 0,9991	0,0000	— 0,0123	+ 0,9929	+ 0,1185	13
14	+ 0,0489	+ 0,9989	+ 0,0035	— 0,0334	+ 0,9944	+ 0,1010	14
15	+ 0,0551	+ 0,9982	+ 0,0109	— 0,0484	+ 0,9948	+ 0,0882	15
16	+ 0,0577	+ 0,9981	+ 0,0153	— 0,0556	+ 0,9958	+ 0,0713	16
17	+ 0,0595	+ 0,9981	+ 0,0107	— 0,0584	+ 0,9961	+ 0,0647	17
18	+ 0,0634	+ 0,9981	+ 0,0226	— 0,0582	+ 0,9956	+ 0,0685	18
19	+ 0,0698	+ 0,9972	+ 0,0201	— 0,0521	+ 0,9954	+ 0,0798	19
20	+ 0,0741	+ 0,9972	+ 0,0178	— 0,0616	+ 0,9930	+ 0,0953	20
21	+ 0,0763	+ 0,9970	+ 0,0175	— 0,0750	+ 0,9925	+ 0,1081	21
22				— 0,0790	+ 0,9914	+ 0,1054	22
23	+ 0,0669	+ 0,9977	+ 0,0009	— 0,0768	+ 0,9928	+ 0,0924	23
24	+ 0,0618	+ 0,9979	— 0,0146	— 0,0739	+ 0,9942	+ 0,0772	24
25	+ 0,0564	+ 0,9981	— 0,0249	— 0,0677	+ 0,9957	+ 0,0643	25
26	+ 0,0451	+ 0,9961	— 0,0331	— 0,0615	+ 0,9961	+ 0,0623	26
27	+ 0,0322	+ 0,9986	— 0,0377	— 0,0508	+ 0,9956	+ 0,0785	27
28	+ 0,0223	+ 0,9991	— 0,0361	— 0,0400	+ 0,9948	+ 0,0923	28
29	+ 0,0152	+ 0,9995	— 0,0290	— 0,0330	+ 0,9943	+ 0,1012	29
30	+ 0,0104	+ 0,9995	— 0,0244	— 0,0228	+ 0,9936	+ 0,1105	30
31	+ 0,0035	+ 0,9998	— 0,0153	— 0,0187	+ 0,9938	+ 0,1109	31

Alle Transformationsformeln sind ausführlich angeführt worden, um jederzeit eine Controle der endgültigen Resultate auch ohne Einblick in die im Archiv deponierten Rechnungen zu ermöglichen. Die in den folgenden Tabellen 10, 11 und 12 aufgezeichneten definitiven räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte u. s. w. sind nicht mit Hülfe dieser resultirenden Formeln berechnet worden, sondern es sind in der für den I. Versuch ausführlich dargelegten Weise die einzelnen Transformationen successive auf die Coordinaten der Tabellen A, B und C angewendet worden. Da die Zwischenresultate nicht mitgetheilt worden sind, um den Umfang der Arbeit nicht noch mehr zu vergrössern, so war es um so mehr nothwendig, die Formeln mitzutheilen, welche alle die successiven Transformationen, denen eine Coordinate unterworfen werden musste, in eine einzige zusammenfassen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass beim III. Versuch an den Stellen, an welchen der rechte Hüftpunkt durch den Unterarm verdeckt war, die Coordinaten desselben aus den Coordinaten des Kniepunktes und eines zweiten auf der Oberschenkelröhre liegenden Punktes nach Formeln analog den Formeln (43) und (44) berechnet worden sind. Dabei wurde in Rechnung gezogen, dass, wie sich aus den Lagen der Oberschenkelröhre ergab, in welchen alle drei Punkte derselben gemessen werden konnten, der Abstand des Punktes im Innern der Röhre von dem Kniepunkt sich zu dem Abstand des Hüftpunktes vom Kniepunkt verhielt wie 1 : 2,935.

In den folgenden drei Tabellen sind nun die räumlichen Coordinaten der Gelenkmittelpunkte, des Schwerpunktes vom Fuss, der Fussspitze und des Kopfscheitels für alle drei Versuche zusammengestellt worden. Gleichzeitig finden sich die Coordinaten von den mittelpunkten der Schulter und Hüftlinie vor. Dieselben stellen die arithmetischen Mittel der zu derselben Bewegungsphase gehörenden Coordinaten beider Schultergelenk- beziehungsweise beider Hüftgelenk-Mittelpunkte dar. Die Coordinaten des Kopfschwerpunktes sind dagegen nicht mit in die Tabellen aufgenommen worden, da sie bei der oben angeführten Art ihrer Ableitung nicht sicher genug sein können.

Tabelle 12. III. Versuch. **Definitive Coordinaten der Gelenkmittelpunkte.**

Nr.	Mittelpunkt des Schultergelenks						Mitte der Verbindungslinie beider Schultergelenk-Mittelpunkte			Mittelpunkt des Ellbogengelenks						Nr.
	rechts			links						rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	34,74	+15,19	132,80	35,83	−18,46	134,12	35,29	−1,64	133,46	37,90	+21,65	106,21	36,01	−27,27	108,29	1
2	40,38	+15,46	133,86	41,36	−18,26	135,16	40,87	−1,40	134,51	41,20	+22,34	107,25	41,37	−27,16	109,37	2
3	45,94	+15,76	134,48	46,85	−18,04	135,65	46,40	−1,14	135,07	44,41	+23,30	108,11	46,73	−27,26	109,91	3
4	51,48	+16,06	134,54	52,29	−17,68	135,52	51,89	−0,81	135,03	47,58	+24,18	108,68	51,98	−27,07	109,86	4
5	57,04	+16,43	133,99	57,80	−17,34	134,79	57,42	−0,46	134,39	51,20	+24,92	108,75	57,19	−26,61	109,06	5
6	62,65	+16,98	133,04	63,36	−16,82	133,62	63,01	+0,08	133,33	55,67	+25,52	108,15	62,54	−26,04	107,83	6
7	68,31	+17,38	131,83	68,97	−16,33	132,29	68,64	+0,53	132,06	61,02	+26,16	107,15	68,08	−25,45	106,45	7
8	74,36	+17,88	130,69	74,79	−15,63	131,10	74,58	+1,13	130,90	67,27	+26,81	105,94	73,93	−24,75	105,31	8
9	80,58	+18,62	129,94	80,60	−14,90	130,35	80,59	+1,86	130,15	74,27	+27,45	104,97	79,65	−23,92	104,46	9
10	86,84	+19,25	129,78	86,47	−14,33	130,23	86,66	+2,46	130,01	81,77	+28,01	104,67	85,70	−23,07	104,26	10
11	92,91	+19,81	130,09	92,08	−13,70	130,64	92,50	+3,06	130,37	89,74	+28,55	104,86	91,63	−22,28	104,59	11
12	98,53	+20,06	131,40	97,53	−13,26	131,55	98,03	+3,40	131,48	97,67	+28,90	105,72	97,12	−21,66	105,39	12
13	103,96	+20,23	132,84	102,66	−13,07	132,84	103,31	+3,58	132,84	105,61	+29,13	107,25	102,19	−21,33	106,61	13
14	109,13	+20,38	134,30	107,50	−12,94	134,19	108,32	+3,72	134,25	113,32	+29,24	109,06	106,97	−21,10	107,87	14
15	114,29	+20,33	135,37	112,46	−12,81	135,01	113,38	+3,76	135,19	121,20	+29,36	110,67	111,79	−20,97	108,65	15
16	119,36	+20,30	135,69	117,45	−12,79	135,18	118,41	+3,76	135,44	128,09	+29,16	111,70	116,63	−20,92	108,77	16
17	124,56	+20,18	135,37	122,60	−12,76	135,02	123,58	+3,71	135,20	135,06	+29,03	111,80	121,77	−20,90	108,26	17
18	129,85	+20,02	134,48	127,77	−12,83	133,73	128,81	+3,60	134,11	141,76	+28,61	111,57	127,08	−21,09	107,34	18
19	135,43	+19,73	133,33	133,13	−13,00	132,67	134,28	+3,37	133,00	148,23	+28,01	110,91	132,57	−21,36	106,28	19
20	141,06	+19,26	132,10	138,63	−13,41	131,52	139,85	+2,93	131,81	154,22	+27,34	109,90	138,20	−21,78	105,18	20
21	146,97	+18,74	131,29	144,46	−13,99	130,72	145,72	+2,38	131,01	159,76	+26,74	108,81	143,99	−22,31	104,45	21
22	*152,80*	*+18,15*	*130,75*	150,32	−14,72	130,28	151,56	+1,72	130,52	164,80	+25,79	107,83	149,92	−23,03	104,06	22
23	158,38	+17,36	130,60	156,18	−15,48	130,56	157,28	+0,94	130,58	169,08	+25,17	106,97	156,18	−23,90	104,36	23
24	164,11	+16,79	130,89	162,07	−16,15	131,37	163,09	+0,32	131,13	172,99	+24,45	106,51	162,49	−24,88	105,34	24
25	169,61	+16,45	131,50	167,73	−16,79	132,33	168,67	−0,17	131,92	176,51	+23,73	106,36	168,49	−25,82	106,56	25
26	174,78	+16,21	132,59	173,27	−17,16	133,70	174,03	−0,48	133,15	179,71	+22,90	106,77	174,28	−26,24	107,91	26
27	179,91	+16,01	133,58	178,82	−17,69	134,85	179,37	−0,84	134,22	182,27	+22,49	107,47	179,86	−26,51	109,08	27
28	184,91	+15,52	134,44	184,16	−17,92	135,65	184,54	−1,20	135,05	184,56	+22,56	108,21	185,23	−26,91	109,92	28
29	190,20	+15,20	134,84	189,69	−18,20	135,81	189,95	−1,50	135,33	187,20	+22,72	108,86	190,75	−27,47	110,13	29
30	195,54	+14,95	134,48	195,20	−18,43	135,30	195,37	−1,74	134,89	190,40	+22,80	109,06	196,08	−27,75	109,55	30
31	200,86	+14,66	133,72	200,75	−18,53	134,23	200,81	−1,94	133,98	194,29	+22,88	108,74	201,29	−27,76	108,41	31

Nr.	Mittelpunkt des Handgelenks						Mittelpunkt des Hüftgelenks						Mitte der Verbindungslinie beider Hüftgelenk-Mittelpunkte			Nr.
	rechts			links			rechts			links						
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	52,51	+26,12	77,74				31,02	+ 4,59	86,61	32,64	−12,30	85,83	31,83	−3,86	86,22	1
2	52,22	+28,43	77,60				36,18	+ 5,04	87,83	37,57	−11,86	86,52	36,88	−3,41	87,18	2
3	52,48	+30,53	77,79	74,32	−20,96	101,71	41,30	+ 5,42	88,37	42,41	−11,47	86,75	41,86	−3,03	87,56	3
4	53,44	+32,65	78,14				46,50	+ 5,80	88,48	47,32	−11,08	86,68	46,91	−2,64	87,58	4
5	55,28	+34,61	78,14				51,58	+ 6,25	87,79	52,23	−10,64	86,04	51,91	−2,20	86,92	5
6	58,24	+36,24	77,78				56,93	+ 6,56	86,50	57,30	−10,37	84,96	57,12	−1,91	85,73	6
7	62,44	+37,69	77,06				62,46	+ 7,00	85,13	62,55	− 9,95	83,81	62,51	−1,48	84,47	7
8	68,20	+38,91	76,12	101,43	−18,83	96,24	68,31	+ 7,51	84,26	68,17	− 9,45	83,04	68,24	−0,97	83,65	8
9	75,74	+39,55	75,27	107,46	−18,19	95,58	74,65	+ 8,11	83,73	74,37	− 8,85	82,55	74,51	−0,37	83,14	9
10	84,77	+39,65	74,79	113,57	−17,66	95,67	81,39	+ 9,04	83,93	81,06	− 7,90	82,57	81,23	+0,57	83,25	10
11	95,32	+39,24	75,11	119,60	−17,16	96,51	88,18	+ 9,98	84,60	87,85	− 6,93	82,88	88,02	+1,53	83,74	11
12	106,75	+38,22	76,44	125,26	−16,76	97,53	94,14	+10,71	85,37	94,00	− 6,17	83,34	94,07	+2,27	84,36	12
13	118,80	+36,69	78,93	130,39	−16,79	98,79	99,75	+11,18	86,57	99,96	− 5,70	84,55	99,86	+2,74	85,56	13
14	130,49	+34,66	82,47				104,86	+11,32	87,68	105,43	− 5,59	85,97	105,15	+2,87	86,83	14
15	141,74	+32,06	86,54				109,94	+11,35	88,53	110,77	− 5,56	87,03	110,36	+2,90	87,78	15
16	151,80	+29,45	90,52				114,97	+11,23	88,59	115,92	− 5,70	87,37	115,45	+2,77	87,98	16
17	161,00	+26,80	94,10				120,14	+10,96	88,29	121,13	− 5,98	87,19	120,64	+2,49	87,74	17
18	169,07	+24,54	96,92				125,01	+10,74	87,57	126,00	− 6,18	86,41	125,51	+2,28	86,99	18
19	176,24	+22,80	98,51				130,18	+10,50	86,49	131,06	− 6,43	85,14	130,62	+2,04	85,82	19
20	182,36	+21,60	98,57				135,56	+ 9,96	85,47	136,61	− 6,93	83,85	136,09	+1,52	84,66	20
21	187,85	+21,07	96,74				141,39	+ 9,43	84,99	142,66	− 7,44	83,15	142,03	+1,00	84,07	21
22	192,15	+21,02	93,80				147,68	+ 8,48	84,83	149,02	− 8,38	83,04	148,35	+0,05	83,94	22
23	195,32	+21,61	89,91				154,21	+ 7,37	85,09	155,52	− 9,51	83,52	154,87	−1,07	84,31	23
24	196,89	+23,05	85,68				160,68	+ 6,23	85,41	161,93	−10,67	84,10	161,31	−2,22	84,76	24
25	196,97	+24,85	81,98				166,60	+ 5,59	85,93	167,75	−11,33	84,84	167,18	−2,87	85,39	25
26	195,93	+26,62	79,62				172,34	+ 5,05	86,80	173,39	−11,89	85,74	172,87	−3,42	86,27	26
27	194,68	+28,47	78,80				177,72	+ 4,85	87,90	178,59	−12,07	86,56	178,16	−3,61	87,23	27
28	193,90	+29,87	78,75				182,75	+ 4,62	88,58	183,43	−12,23	87,01	183,09	−3,81	87,80	28
29	193,81	+31,08	78,83				187,84	+ 4,47	88,70	188,41	−12,43	86,98	188,13	−3,98	87,84	29
30	194,89	+31,67	78,78				192,81	+ 4,33	88,38	193,20	−12,56	86,50	193,01	−4,12	87,44	30
31	*197,03*	+32,84	78,47				197,62	+ 4,21	87,60	197,94	−12,69	85,72	197,78	−4,24	86,66	31

Tabelle 12.

Nr.	Mittelpunkt des Kniegelenks						Mittelpunkt des I. Fussgelenks						Nr.
	rechts			links			rechts			links			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	32,11	+ 7,37	48,51	39,73	−10,75	47,02	5,83	+ 5,24	21,24	37,43	−7,73	10,52	1
2	41,58	+ 7,85	50,31	40,89	−10,35	47,09	20,27	+ 5,65	19,08	37,41	−7,59	10,54	2
3	50,40	+ 8,62	51,83	42,16	− 9,87	47,10	35,79	+ 6,24	16,40	37,38	−7,41	10,56	3
4	57,99	+ 8,99	52,62	43,61	− 9,46	47,02	51,84	+ 7,29	14,05	37,34	−7,15	10,56	4
5	64,05	+ 9,07	52,25	45,29	− 9,13	46,87	68,02	+ 8,77	12,82	37,30	−6,96	10,58	5
6	69,06	+ 9,03	50,66	47,26	− 8,77	46,75	83,10	+10,46	13,18	37,25	−6,68	10,60	6
7	73,78	+ 8,69	48,88	50,13	− 8,58	46,45	94,91	+11,90	14,52	37,21	−6,41	10,62	7
8	81,03	+ 9,30	48,33	54,31	− 8,66	46,00	101,58	+12,39	13,77	38,56	−6,70	11,19	8
9	89,21	+10,91	48,45	59,70	− 9,01	45,90	105,08	+12,26	12,04	40,57	−7,13	13,13	9
10	93,82	+11,68	48,03	67,09	− 9,36	45,28	108,13	+12,48	11,16	43,57	−7,16	15,53	10
11	100,49	+12,83	48,96	77,97	−10,13	44,30	109,42	+12,39	10,75	49,40	−7,21	18,70	11
12	105,60	+13,35	49,65	89,69	− 9,51	43,44	109,80	+12,27	10,69	58,18	−7,08	22,32	12
13	107,07	+13,21	49,87	101,33	− 8,70	44,46	109,82	+12,18	10,69	69,56	−5,97	23,32	13
14	107,59	+13,02	50,24	111,42	− 8,66	46,46	109,85	+12,18	10,74	82,38	−4,62	22,62	14
15	108,57	+12,69	50,72	121,04	− 8,68	48,49	109,85	+12,08	10,84	96,22	−3,76	20,42	15
16	110,32	+12,39	50,91	129,41	− 8,64	50,02	109,89	+11,90	10,89	110,85	−3,75	17,62	16
17	112,07	+12,21	51,01	136,69	− 8,77	50,70	109,94	+11,76	10,94	126,33	−4,41	15,11	17
18	113,73	+11,95	51,12	142,46	− 8,79	50,27	109,99	+11,66	10,93	141,41	−5,53	13,45	18
19	116,49	+11,62	50,91	147,01	− 8,45	48,67	110,20	+11,56	11,02	155,94	−7,19	13,22	19
20	119,86	+11,39	50,90	150,99	− 7,72	46,62	110,70	+11,58	11,51	166,91	−9,37	14,10	20
21	124,31	+11,33	51,10	157,21	− 8,14	45,78	111,74	+11,76	12,51	173,21	−9,43	13,38	21
22	130,36	+11,28	50,97	164,23	− 9,02	46,02	113,61	+11,93	14,15	176,78	−9,39	11,97	22
23	137,94	+10,87	50,60	169,66	−10,58	46,28	117,17	+11,56	16,27	179,22	−9,33	11,54	23
24	147,84	+10,75	49,62	175,65	−11,62	46,88	123,04	+10,95	19,63	180,81	−9,57	11,08	24
25	158,88	+10,10	48,38	179,75	−12,08	47,28	131,48	+10,03	22,72	181,12	−9,57	11,00	25
26	169,98	+ 9,17	48,82	181,97	−12,06	47,39	142,61	+ 8,50	23,41	181,20	−9,50	11,10	26
27	179,63	+ 8,24	50,22	183,06	−11,96	47,49	155,04	+ 6,61	22,35	181,27	−9,48	11,21	27
28	188,44	+ 7,63	51,37	184,07	−11,74	47,63	168,05	+ 4,96	20,08	181,35	−9,45	11,32	28
29	196,73	+ 7,03	52,28	185,50	−11,51	47,67	182,62	+ 3,57	17,07	181,44	−9,41	11,46	29
30	203,98	+ 6,55	52,56	187,11	−11,37	47,58	198,12	+ 2,53	14,27	181,53	−9,35	11,53	30
31	210,22	+ 5,82	51,91	189,15	−11,33	47,37	213,93	+ 2,12	12,58	181,63	−9,25	11,63	31

Nr.	Schwerpunkt des Fusses						Fussspitze						Scheitelpunkt des Kopfes			Nr.
	rechts			links			rechts			links						
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
1	4,70	+ 4,89	14,92				12,55	+ 4,11	6,53				38,51	−2,20	164,42	1
2	20,51	+ 5,41	12,75				30,20	+ 4,93	6,14				44,22	−1,88	165,18	2
3	37,60	+ 6,15	10,34				48,55	+ 5,78	6,27				49,89	−1,57	165,50	3
4	55,06	+ 7,38	8,56				66,86	+ 7,19	7,28				55,49	−1,14	165,23	4
5	72,54	+ 8,96	8,14				84,60	+ 9,50	9,78				61,31	−0,76	164,47	5
6	88,73	+10,97	9,55				100,01	+11,82	13,95				67,18	−0,40	163,31	6
7	101,14	+12,73	12,03				111,44	+13,91	18,31				72,82	+0,13	162,05	7
8	107,76	+13,44	11,29				118,13	+15,42	17,77				78,52	+0,80	161,02	8
9	110,76	+13,03	8,72				122,01	+14,53	13,26				84,27	+1,28	160,36	9
10	113,19	+12,82	6,44				125,04	+13,33	8,36				89,88	+1,76	160,45	10
11	113,75	+12,65	5,97				125,68	+13,24	6,34				95,40	+2,07	161,08	11
12	113,75	+12,58	5,98				125,74	+13,14	6,06				100,83	+2,10	162,03	12
13	113,75	+12,51	6,00				125,74	+13,11	6,02				106,25	+2,14	163,37	13
14	113,75	+12,45	6,03				125,75	+13,10	6,00				111,57	+2,18	164,52	14
15	113,77	+12,42	6,06				125,76	+13,09	5,97				116,91	+2,29	165,19	15
16	113,77	+12,21?	6,05				125,77	+13,09	5,94				122,06	+2,30	165,28	16
17	113,77	+12,37	6,11				125,79	+13,08	5,90				127,19	+2,32	164,81	17
18	113,78	+12,35	6,14				125,83	+13,09	5,84				132,36	+2,20	163,95	18
19	113,79	+12,29	6,16				125,87	+13,08	5,75				137,64	+1,93	162,84	19
20	114,07	+12,34	6,49				126,04	+13,06	5,55				142,89	+1,63	161,82	20
21	114,65	+12,50	7,09				126,42	+13,11	5,35				148,45	+1,17	161,06	21
22	115,69	+12,58	8,07				127,09	+13,07	4,98				153,97	+0,60	160,73	22
23	117,64	+12,05	9,94				128,11	+12,52	4,21				159,51	−0,04	161,03	23
24	121,62	+11,44	13,23				129,37	+12,55	3,84				165,14	−0,62	161,68	24
25	129,39	+10,25	16,68				135,32	+10,95	6,13				170,46	−0,98	162,64	25
26	140,65	+ 8,37	17,29				146,86	+ 7,37	7,59				175,86	−1,34	163,88	26
27	154,02	+ 6,40	16,16				161,68	+ 5,33	7,52				181,29	−1,49	164,94	27
28	168,19	+ 4,83	13,78				177,67	+ 4,22	6,85				186,36	−1,51	165,57	28
29	184,18	+ 3,45	10,99				194,98	+ 3,23	6,30				191,63	−1,58	165,59	29
30	201,05	+ 2,48	8,66				212,77	+ 2,68	6,86				197,10	−1,74	165,06	30
31	218,22	+ 2,12	7,77				230,11	+ 2,79	8,90				202,62	−1,81	164,09	31

In diesen Coordinatentabellen sind nun implicite alle Einzelheiten des Bewegungsvorganges enthalten. Sie bilden daher die Unterlage für die Lösung aller Probleme, welche sich in irgend welcher Hinsicht auf das beim Gang des Menschen befolgte Bewegungsgesetz beziehen, soweit für dieselben die gemachten, vereinfachenden Annahmen über die Zusammensetzung des menschlichen Körpers aus einzelnen starren Massen gestattet sind. Sie vermitteln beispielsweise die Kenntniss der räumlichen Bahncurven nicht allein für die Gelenkmittelpunkte, sondern auch für andere mechanisch wichtige Punkte, wie die Einzelschwerpunkte der Gliederabschnitte und den Gesammtschwerpunkt, — sie ermöglichen die Bestimmung der Richtungsänderung der Längsaxen der einzelnen Glieder, ferner der relativen Bewegung benachbarter Körpertheile, und damit der Gelenkbewegungen — sie gestatten die Ableitung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit welchen die verschiedenen Punkte des menschlichen Körpers ihre Bahnen durchlaufen und lassen in Folge dessen Schlüsse auf die bewegenden Kräfte im Innern des Körpers zu u. s. w. — sie sind also geeignet, in den verschiedensten Richtungen unsere Kenntniss des menschlichen Ganges zu erweitern.

Die Resultate werden nun zwar zunächst sich nur auf den Gang unseres Versuchsindividuums beziehen. Wenn auch jeder Mensch seine besondere, für ihn charakteristische Art zu gehen hat, die oft als Erkennungsmerkmal dient, so kann doch der verschiedene Charakter des Ganges zweier Menschen nur auf geringen quantitativen Unterschieden beruhen, welche in erster Linie durch etwas verschiedene Dimensionen der Knochen, etwas abweichende Gestaltung der Gelenkflächen und vor allen Dingen durch verschiedene Massenvertheilung im Körper bedingt sind. Die Folge und Art der gleichzeitigen Bewegung der einzelnen Körperabschnitte ist bei allen Menschen dieselbe. So führt z. B. bei allen Individuen der Rumpf während des Gehens gewisse Schwankungen und Verdrehungen aus; dieselben sind wohl quantitativ verschieden, nicht aber qualitativ. Es giebt Menschen, welche ihre Schultern und ihre Hüften sehr stark verdrehen, so dass man diese Bewegungen deutlich aus der Ferne wahrnehmen kann, und es giebt Menschen, welche Schultern und Hüften verhältnissmässig ruhig beim Gehen halten, so dass man ihre Verdrehungen nur in der Nähe genau beobachten kann. Die Art der angedeuteten Schulter- und Hüftbewegungen ist aber bei diesen wie bei jenen ganz dieselbe.

Schulterlinie und Hüftlinie drehen sich um eine verticale Axe immer nach der Seite des vorschwingenden Armes oder Beines. Selbst Bewegungen, welche nicht unbedingt für die Locomotion erforderlich sind, wie z. B. die Schwingungen der Arme, reihen sich, wenn sie nicht unterdrückt worden sind, in ganz bestimmter Weise den Bewegungen der anderen Körpertheile an. So schwingt stets der Arm mit dem Bein der anderen Seite gleichzeitig nach vorn. Manche Menschen bringen es überhaupt nicht, die meisten aber nur bei grosser Uebung fertig, längere Zeit in der Weise zu gehen, dass Arm und Bein derselben Seite immer gleichzeitig nach vorn schwingen. Eine solche Bewegungsfolge der Glieder wird aber von dem Gehenden selbst als aussergewöhnlich anstrengend und von jedem Beobachter als unnatürlich empfunden.

So dürften denn die Resultate, welche die Coordinatentabellen zu Tage fördern, nicht bloss individuelle Gültigkeit besitzen, sondern die typischen Gesetze erkennen lassen, nach welchen die Bewegungen der Glieder beim Gange des Menschen stattfinden. Sie werden andererseits vermuthlich die Mittel an die Hand geben, die geringen Unterschiede, welche jedem Gange sein charakteristisches Gepräge verleihen, quantitativ zu bestimmen. —

Durch die Coordinatentabellen sind nun manche Fragen unmittelbar beantwortet; es wird sich dann nur darum handeln können, die Antwort in eine anschauliche Form zu kleiden. Zur Erledigung anderer Aufgaben wird sich dagegen noch eine weitere Umformung oder eine besondere mechanische Interpretation des gewonnenen Zahlenmaterials erforderlich machen. Die Fülle der Probleme, für deren Lösung die in den Tabellen niedergelegten Coordinatenwerthe die empirischen Grundlagen bilden, ist so gross, dass man dieselben im Rahmen einer Abhandlung unmöglich alle behandeln kann. Es sollen daher vorläufig nur solche Resultate herausgegriffen werden, welche sich entweder unmittelbar oder doch wenigstens ohne grosse Rechnung darbieten. Dieselben sollen sich in erster Linie auf die Gestalt der Bahnen beziehen, welche die verschiedenen Gelenkmittelpunkte beschreiben, ferner sollen sie die Bewegungen und Deformationen von Körperabschnitten, wie des Rumpfes, des Kopfes, zum Gegenstand haben. Es soll sich dabei auch nur um die geometrische Seite der Bewegung handeln. Die Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen,

die Ermittelung der Bewegung der Einzelschwerpunkte und des Gesammtschwerpunktes, die Ableitung der Kräfte, welche innerhalb und ausserhalb des menschlichen Körpers thätig sein müssen, um den in allen Einzelheiten durch die Coordinatentabellen festgestellten Bewegungsvorgang zu erzeugen, und andere wichtige Probleme sollen den Gegenstand später erscheinender Abhandlungen bilden.

Die Bahncurven der Gelenkmittelpunkte, des Kopfscheitelpunktes, des Fussschwerpunktes und der Fussspitze.

Die Bahncurven der Gelenkmittelpunkte, des Kopfscheitelpunktes, des Fussschwerpunktes und der Fussspitzen sind durch die Coordinaten ohne Weiteres bekannt. Es sind durchweg doppelt gekrümmte Curven; sie lassen sich daher nicht in eine Ebene einzeichnen. Um sich eine genügende Vorstellung von ihrem Verlaufe im Raume bilden zu können, sind mindestens ihre Projectionen auf zwei verschiedene, nicht parallele Ebenen erforderlich. Die Coordinaten ergeben nun unmittelbar die Projectionen auf die drei Coordinatenebenen, indem immer je zwei der drei räumlichen Coordinaten die ebenen Coordinaten einer Projection darstellen. Man kann daher die Projectionen sämmtlicher Bahncurven auf die Coordinatenebenen direct aufzeichnen. Bei unserer Wahl des Coordinatensystems liefern die x- und z-Coordinate die Projection auf die Gangebene oder die Profilansicht, die x- und y-Coordinate die Projection auf den horizontalen Fussboden oder die Ansicht von oben, und die y- und z-Coordinate die Projection auf die zur Gangebene senkrechte Verticalebene oder die Frontalansicht des Bewegungsvorganges. Die letztere Projection, d. h. die Ansicht von vorn oder hinten, bietet deshalb kein sehr klares Bild, weil die Bewegungen parallel der Frontalebene zu wenig ausgiebig sind. Die Projectionen auf die Gangebene und die Horizontalebene eignen sich besser zu einer Veranschaulichung des Bewegungsvorganges, weil in ihnen der grössere Abstand der successiven Bewegungsphasen in der Gangrichtung zur Geltung kommt.

Tafel X giebt diese beiden Projectionen für den I. Versuch in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse und Tafel XI dieselben für den II. Versuch, so dass man in der Lage ist, die beiden registrierten Bewegungsvorgänge mit einander zu vergleichen und sich von der in die Augen springenden Uebereinstimmung zu überzeugen. Die entsprechenden Projectionen für den III. Versuch, welcher sich auf das Gehen des belasteten Menschen bezieht, sind nicht wiedergegeben worden, weil die durch die Belastung hervorgerufenen Abweichungen zu gering sind, als dass sie bei dem kleinen Maassstabe der Zeichnungen in genügender Deutlichkeit hervortreten könnten. Es sind vielmehr die hauptsächlichsten Unterschiede, welche die Resultate des letzten Versuches gegenüber denen der beiden anderen Versuche darbieten, durch besondere Figuren in grösserem Massstabe erläutert worden (vgl. z. B. Tafel XIII und XIV).

Auf den Tafeln X und XI finden sich nun nicht allein die successiven Stellungen der einzelnen Gelenkmittelpunkte u. s. w. angegeben, sondern es sind auch durch Verbinden dieser Stellungen die continuirlichen Bahncurven hergestellt worden. Der Kopfscheitelpunkt, die beiden Schultergelenkmittelpunkte und die beiden Hüftgelenkmittelpunkte sind zum Unterschied von den anderen Punkten mit kleinen Kreisen umgeben worden, von denen jeder fünfte stärker ausgezogen ist, wie die anderen. Die Einzelschwerpunkte der Füsse sind durch kleine Sternchen markirt worden. Da die Bahnen der Hand- und Fussgelenke anders gezeichnet worden sind als die der übrigen Gelenke, so kann man bei jeder Extremität die Bahncurven der drei Gelenkmittelpunkte leicht auseinander halten. Denn wie die Kniegelenk- und Ellbogengelenkbahnen von den Fussgelenk- und Handgelenkbahnen dadurch in der Zeichnung unterschieden sind, dass sie mit Ausnahme der 31 gemessenen Stellungen ununterbrochen verlaufen, so kann man andererseits die Hüftgelenk- und Schultergelenkcurven sofort daran erkennen, dass die gemessenen Stellungen mit kleinen Kreisen umgeben sind.

Um auch den Wechsel in der Gestalt und Haltung der Extremitäten zur Darstellung zu bringen, sind die Längsaxen der Gliederabschnitte durch Verbinden der entsprechenden Gelenkmittelpunkte eingezeichnet worden. Beim Fuss findet sich nicht die Längsaxe vor, sondern das Stück des grössten Durchmessers desselben, welches sich

zwischen dem Schwerpunkte des Fusses und einem noch 3 cm hinter der Fussspitze liegenden Punkte erstreckt. Die Hacke ist in Folge dessen auf der Rückwärtsverlängerung dieser Strecke zu suchen, und zwar in einer Entfernung, welche ungefähr $\frac{3}{4}$ der aufgezeichneten Länge beträgt. Die Fussspitze liegt dagegen auf der Verlängerung nach vorn in ungefähr $\frac{1}{4}$ der von dem grössten Fussdurchmesser vorhandenen Länge. Es mag ausdrücklich hervorgehoben werden, dass diese in die Figur eingezeichneten geraden Linien durchaus nicht die Lagen der beim Versuch verwendeten Geissler'schen Röhren darstellen, sondern diejenigen der im Innern der Glieder liegenden Längslinien. Um die zu derselben Bewegungsphase gehörenden Stellungen der verschiedenen Gliederabschnitte leichter übersehen zu können, ist wie bei den kleinen Kreisen der Hüftgelenk- und Schultergelenkmittelpunkte jede fünfte Stellung einer Längslinie durch stärkeres Ausziehen derselben markirt worden. Dadurch ist man in die Lage versetzt, ohne Mühe die Nummer der 31 aufeinander folgenden Phasen anzugeben, so dass diese Nummern im Interesse der Klarheit der Bilder fortgelassen werden konnten. Es darf selbstverständlich darin kein Unterschied zwischen den Resultaten des I. und II. Versuchs gefunden werden, dass die stärkeren Linien beider Figuren sich nicht entsprechen. Dies rührt allein daher, dass die Anfangsphase des für die Messung herausgegriffenen Theiles des Bewegungsvorganges in beiden Versuchen nicht genau dieselbe ist. Es entspricht ungefähr die zweite Phase des zweiten Versuchs der ersten Phase des ersten und allgemein die n^{te} Phase des zweiten Versuchs der $n-1^{ten}$ Phase des zweiten. Infolge dessen könnte man die Zusammengehörigkeit der Phasen beider Versuche dadurch hervorheben, dass man beim II. Versuch durchweg die Linien, welche zu einer Phase weiter in der Gangrichtung gehören, stärker ausziehen würde. Natürlich könnte das nicht absolut genau zutreffen; es wäre dies wenigstens grosser Zufall, da die beiden Versuche vollständig unabhängig von einander angestellt worden sind. Es ist aber von einer derartigen Veranschaulichung der annähernden Zusammengehörigkeit beider Phasenreihen Abstand genommen worden, um nicht eine falsche, zu geringe Vorstellung von dem Grade der Uebereinstimmung zu erwecken, welchen die beiden Bewegungsvorgänge selbst, nicht die zufällig für die Messung herausgegriffenen Phasenreihen, besitzen.

Die Projection auf die Gangebene, oder die Ansicht von rechts, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Dagegen ist die Projection auf die Horizontalebene, die Ansicht von oben, weniger durchsichtig. Es verdecken sich namentlich die successiven Stellungen der unteren Extremitäten in einer Weise, dass man erst nach eingehendem Studium der Figur eine klare Vorstellung von der Bewegung der Beine in der Ansicht von oben erhält. Um dies zu erleichtern, sind die Projectionen der Längsaxen vom Oberschenkel und Unterschenkel beiderseits noch einmal gesondert aufgezeichnet worden. Die Horizontalprojection der Fusslinie ist überhaupt nicht dem Gesammtbild beigefügt, sondern allein abseits angegeben worden. Unter Zuhülfenahme ihrer richtig eingezeichneten Verticalprojection und der Horizontalprojection des I. Fussgelenks ist es nicht schwer, dieselbe in ihre richtige Lage im Gesammtbild versetzt zu denken. Für die Projection der oberen Extremitäten ist ein besonderes Hülfsmittel zur Verdeutlichung nicht nöthig. Dieselbe ist an und für sich durchsichtig genug und lässt ohne Weiteres ein klares Bild der Bewegung der Arme in der Ansicht von oben entstehen.

Da es immerhin einige Uebung erfordert, um sich aus den Projectionen auf zwei zu einander senkrechte Ebenen ein deutliches Bild des Bewegungsvorganges im Raume verschaffen zu können, habe ich mit Hülfe der Coordinaten der Gelenkmittelpunkte, des Kopfscheitelpunktes, des Fussschwerpunktes und der Fussspitze ein räumliches Modell angefertigt, welches eine directe Anschauung von den Bahncurven der einzelnen Punkte und von der sich stetig ändernden Haltung des menschlichen Körpers beim Gange ermöglicht. An diesem Modell ist die Gangebene durch eine dünne Holzplatte festgelegt und auf die letztere die Bewegung in derselben Weise projicirt worden, wie es bei den Tafeln X und XI geschehen ist. An jedem Punkte, welcher die Projection eines Gelenkmittelpunktes u. s. w. darstellt, ist nun senkrecht zu dieser Holzplatte bis zur Mitte eine Nadel eingelassen worden, deren Länge mit der Grösse der zugehörigen y-Coordinate übereinstimmt. Die Endpunkte aller zu ein und demselben Gelenkmittelpunkte gehörenden Nadeln legen auf diese Weise die doppelt gekrümmte Bahncurve desselben im Raume fest. Um auch die Bewegung der Längsaxen der einzelnen Glieder und damit den Wechsel der Körperhaltung zu veranschaulichen, ist für jede Bewegungsphase

zwischen den beiden Gelenkmittelpunkten eines Gliedes ein Seidenfaden ausgespannt worden. Von diesen Seidenfäden besitzt der zu jeder fünften Phase gehörende eine besondere Farbe, damit man leichter die zusammengehörenden Gliederstellungen für eine jede Bewegungsphase auffinden kann. Das Modell ist in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse ausgeführt.

Nach diesem Vorbild ist von Herrn Mechaniker E. Zimmermann in Leipzig (Emilienstrasse 21) ein grösseres Modell in $\frac{3}{10}$ natürlicher Grösse angefertigt worden. Die Platte, welche die Gangebene darstellt, ist

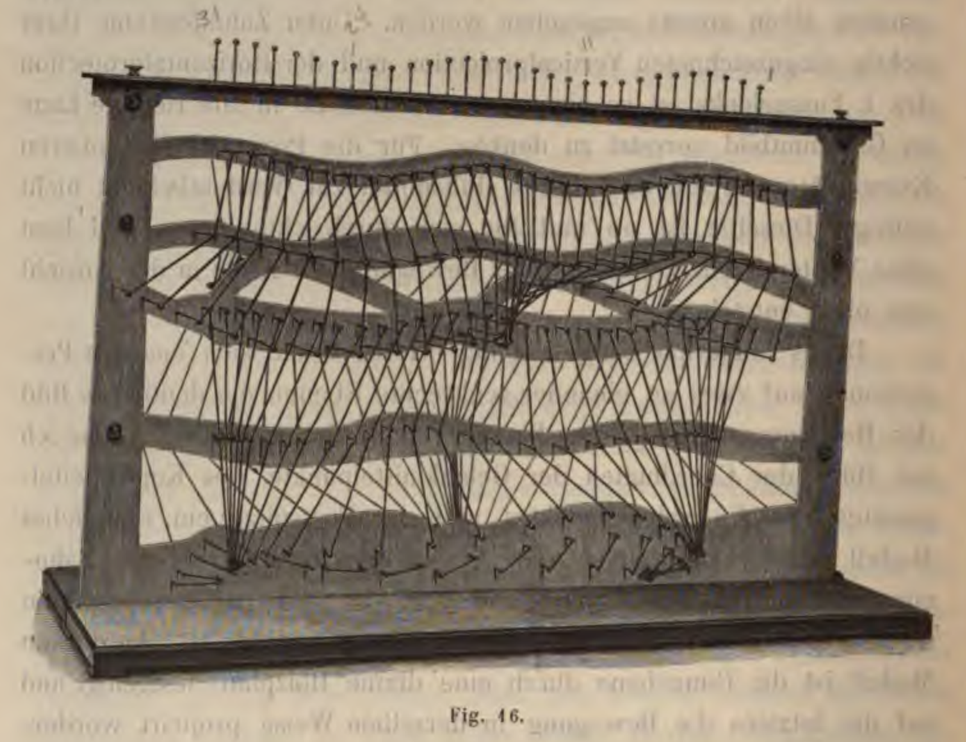


Fig. 16.

aus Aluminium und durchbrochen gearbeitet worden, damit man sich einen gleichzeitigen Ueberblick über die Gliederstellungen auf beiden Körperseiten verschaffen kann. Das ganze Modell lässt sich in fünf Theile zerlegen. Der eine Theil trägt allein die Bahncurve des Kopfscheitelpunktes; jeder der vier anderen Theile stellt die Bewegung einer der vier Extremitäten dar. Figur 16 giebt die Ansicht dieses Modells von links und Figur 17 die Ansicht desselben von hinten wieder. Das Modell entspricht den Resultaten des I. Versuchs.

Die beiden zusammengehörenden Projectionen des Bewegungsvorganges auf den Tafeln X und XI und die Abbildung des räumlichen Modells lassen nun, bis zu einer gewissen, durch den kleinen Maassstab der Zeichnung gesetzten Grenze, deutlich alle Einzelheiten des Bewegungsvorganges erkennen, so dass eine weitere ausführliche

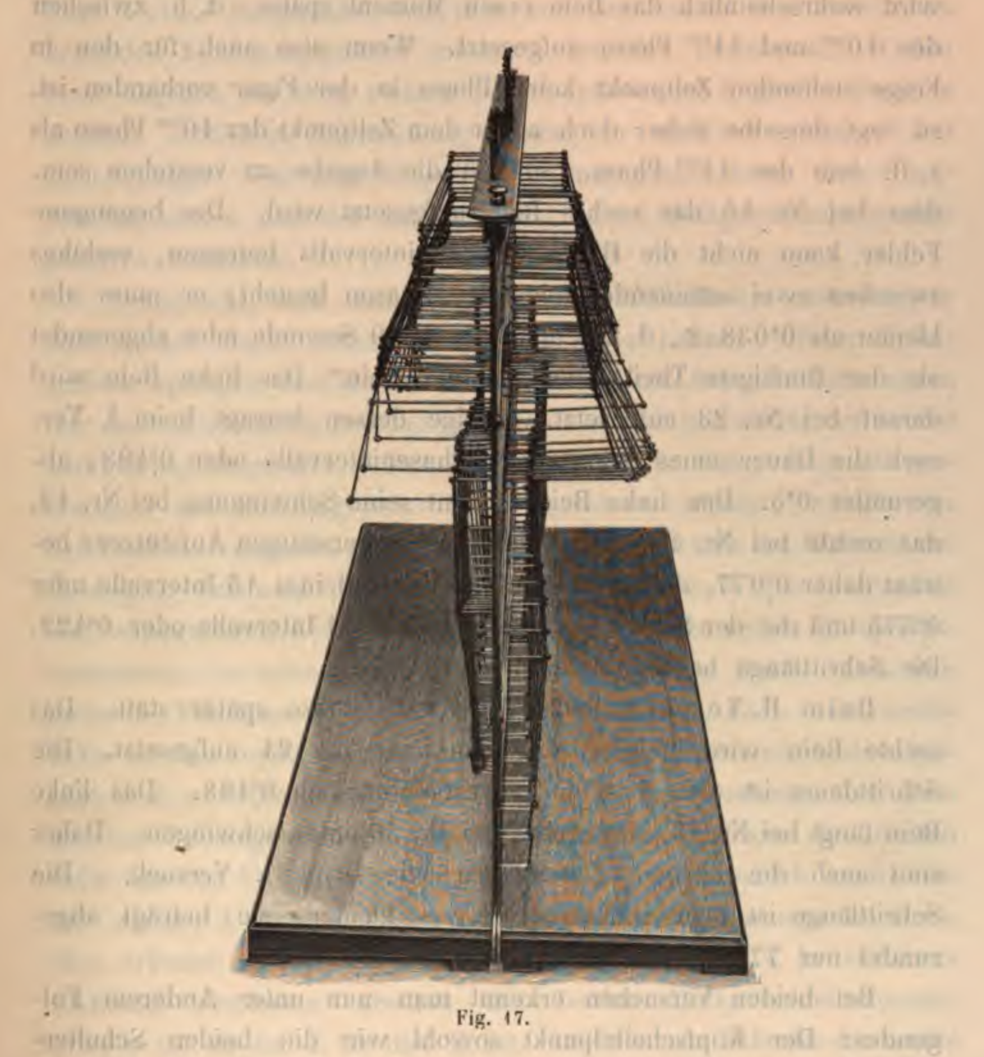


Fig. 17.

Beschreibung überflüssig wird. Es sollen daher im Folgenden nur einige Punkte herausgegriffen werden, welche in der Figur nicht mit genügender Schärfe hervortreten.

Zunächst macht es sich nöthig, einige Zeitangaben vorauszuschicken und insbesondere diejenigen Phasen festzustellen, welche die einzelnen Abschnitte des Bewegungsvorganges begrenzen.

Beim I. Versuch wird das rechte Bein in der 10ten Phase auf den Fussboden aufgesetzt. Man erkennt dies leicht, indem man sich die rechte Fusslinie von Nr. 10 nach rückwärts bis zur Hacke verlängert denkt. Natürlich können diese und die folgenden Zeitangaben nur bis zu einer gewissen Genauigkeit richtig sein. In Wirklichkeit wird wahrscheinlich das Bein einen Moment später, d. h. zwischen der 10ten und 11ten Phase aufgesetzt. Wenn also auch für den in Frage stehenden Zeitpunkt keine Phase in der Figur vorhanden ist, so liegt derselbe sicher doch näher dem Zeitpunkt der 10ten Phase als z. B. dem der 11ten Phase. So soll die Angabe zu verstehen sein, dass bei Nr. 10 das rechte Bein aufgesetzt wird. Der begangene Fehler kann nicht die Hälfte des Zeitintervalls betragen, welches zwischen zwei aufeinander folgenden Phasen besteht; er muss also kleiner als $0^{s}038 : 2$, d. h. kleiner als 0,019 Secunde oder abgerundet als der fünfzigste Theil einer Secunde sein. Das linke Bein wird darauf bei Nr. 23 aufgesetzt. Infolge dessen beträgt beim I. Versuch die Dauer eines Schrittes 13 Phasenintervalle oder $0^{s}498$, abgerundet $0^{s}5$. Das linke Bein beginnt seine Schwingung bei Nr. 12, das rechte bei Nr. 25. Die Dauer des beiderseitigen Aufstützens beträgt daher $0^{s}077$, die des Aufstützens eines Beines 15 Intervalle oder $0^{s}575$ und die der Schwingung eines Beines 11 Intervalle oder $0^{s}422$. Die Schrittlänge beträgt abgerundet 78 cm.

Beim II. Versuch findet Alles eine Phase später statt. Das rechte Bein wird bei Nr. 11, das linke bei 24 aufgesetzt. Die Schrittdauer ist also dieselbe gewesen, nämlich $0^{s}498$. Das linke Bein fängt bei Nr. 13, das rechte bei Nr. 26 an zu schwingen. Daher sind auch die übrigen Zeitangaben wie beim I. Versuch. Die Schrittlänge ist beim II. Versuch etwas kleiner, sie beträgt abgerundet nur 77 cm.

Bei beiden Versuchen erkennt man nun unter Anderem Folgendes: Der Kopfscheitelpunkt sowohl wie die beiden Schultergelenk- und die beiden Hüftgelenkmittelpunkte beschreiben je eine doppelt gekrümmte Bahn, welche in der Projection auf die Gangebene, wie in der auf die Horizontalebene, die Form einer nahezu regelmässigen Wellenlinie (Sinuslinie) besitzt. Diese beiden sollen als »verticale« und »horizontale« Wellenlinie von einander unterschieden sein. Die verticale Wellenlinie besitzt eine Wellenlänge gleich der Schritt-

länge. Die Wellenlänge der horizontalen Wellenlinie ist dagegen doppelt so gross, sie ist gleich der Länge eines Doppelschrittes. Bei der verticalen Wellenlinie wird das Stück zwischen der höchsten Stelle eines Wellenberges und der tiefsten Stelle des darauf folgenden Thales immer in kürzerer Zeit durchlaufen als die kommende Strecke vom Thal bis zur Bergspitze, wie man aus der Anzahl der dazwischen liegenden Bewegungsphasen erkennt. Bei den horizontalen Wellen wird dagegen der Weg zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten grösster seitlicher Ausweichung immer in merklich gleicher Zeit zurückgelegt. So weit zeigen die Bewegungsbahnen des Kopfscheitelpunktes und der Schultergelenk- und Hüftgelenkmittelpunkte gleiches Verhalten.

Untersucht man nun aber die fünf Wellenlinien genauer, so stellen sich doch wesentliche Unterschiede heraus. Diese Unterschiede springen deutlich in die Augen, sowohl bei den Bahncurven der beiden Schultergelenkmittelpunkte, als auch bei denen der beiden Hüftgelenkmittelpunkte. Man sieht auch ein, dass diese Abweichungen aus Richtungsänderungen herrühren müssen, welche die Schulterlinie einerseits und die Hüftlinie andererseits im Verlaufe der Bewegung erfahren. So ist z. B. bei Phase Nr. 9 des I. Versuchs und entsprechend bei Nr. 10 des II. Versuchs der rechte Hüftgelenkmittelpunkt in seiner Bahn weiter vorn als der linke. Das umgedrehte Verhalten zeigt sich bei I, 22 und II, 23[1]). Im ersten Falle ist das rechte Bein nach vorn und das linke nach hinten ausgestreckt, und die Hüftlinie hat eine horizontale Drehung, von oben gesehen im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers, erfahren. Im zweiten Falle hat das Umgekehrte stattgefunden. Dies ist jedoch noch nicht der einzige Unterschied der beiden in Betracht gezogenen Fälle. Man erkennt weiterhin, dass bei I, 9 und II, 10 der in verticaler Richtung geschätzte Abstand der beiden Hüftgelenkmittelpunkte grösser ist als bei I, 22 und II, 23. Im letzteren Falle ist das rechte Hüftgelenk dem linken nach oben hin näher gerückt. Es muss sich also die Hüftlinie ausserdem um eine der Gangrichtung parallele

1) Soll heissen: Phase Nr. 22 des I. Versuchs und Phase Nr. 23 des II. Versuchs. In der Folge sollen die Bewegungsphasen der beiden Versuche immer in dieser kurzen Schreibweise angegeben werden.

Axe in der Weise gedreht haben, dass das rechte Hüftgelenk dabei gehoben worden ist. Diese Drehung ist ganz unabhängig davon, dass die Bahncurve des linken Hüftgelenkmittelpunktes in beiden Figuren im Ganzen höher liegt als die zum rechten Hüftgelenk gehörende. Ich wage nicht zu entscheiden, ob dieses Verhalten durch eine einseitige Beckenhaltung des Versuchsindividuums oder durch eine etwas abweichende Einstellung einer der beiden an den Oberschenkeln befestigten Geissler'schen Röhren herrührt. Selbst wenn das letztere der Fall wäre, so würde doch der Fehler, welcher hieraus für die Gestalt der Bahn des Hüftgelenkmittelpunktes und Kniegelenkmittelpunktes einer der beiden Seiten resultiren müsste, so gering sein, dass er sich nicht, trotz der erreichten Genauigkeit der Messung, wahrnehmen liesse. Denn sowohl die linke Hüftgelenkcurve als auch die Kniegelenkcurve ist mit grösster Annäherung congruent der entsprechenden Curve der anderen Seite und lässt sich durch Zurückschieben um eine Schrittlänge und entsprechende Senkung mit dieser zur Deckung bringen.

Wie die beiden herausgegriffenen Bewegungsphasen Unterschiede in der Stellung der Hüftgelenke hervortreten liessen, so zeigen sich auch Verschiedenheiten in den Lagen der beiden Schultergelenkmittelpunkte. Nur liegt hier bei I, 9 und II, 10 das linke Schultergelenk und umgedreht bei I, 22 und II, 23 das rechte Schultergelenk weiter nach vorn. Dagegen ist im letzten Falle wie an der Hüfte das Schultergelenk der rechten Seite gegen früher gehoben worden, so dass es zuletzt höher als das linke steht, während im ersten Falle das linke Gelenk das höhere war. Dieses doppelte Verhalten deutet einerseits auf eine Drehung der Schulterlinie um eine verticale und eine horizontale, der Gangrichtung parallele Axe hin.

Wenn man nun auch den Erfolg dieser Drehungen der Hüftlinie und Schulterlinie an den Figuren auf Tafel X und XI deutlich wahrnehmen kann, so ist man doch nicht im Stande, die Gesammtgrösse und den ganzen Verlauf dieser Schwankungen an den Figuren mit genügender Genauigkeit zu verfolgen, weil der Maassstab zu klein ist.

Dies gilt in noch viel höherem Maasse von den Bewegungen des Rumpfes und Kopfes, welche Verschiedenheiten zwischen den

Bahnen der Hüftgelenkmittelpunkte einerseits und denen der Schultergelenkmittelpunkte andererseits oder zwischen den letzteren und der Bahn des Kopfscheitelpunktes bedingen.

Es ist daher nothwendig, sich eine noch eingehendere Kenntniss der Gestalt dieser Curven zu verschaffen, als sie durch die in $\frac{1}{10}$ natürlicher Grösse gezeichneten Projectionen vermittelt wird. Es kommt vor allen Dingen darauf an, die Bewegungen senkrecht zur Gangrichtung genau festzustellen, denn diese bedingen hauptsächlich die Wellenform, die Abweichung der Bahncurven von einer geraden, zur Gangrichtung parallelen Linie. Da die Excursionen, welche der Kopfscheitelpunkt und die Mittelpunkte von Schulter- und Hüftgelenken parallel einer zur Gangrichtung senkrechten Ebene ausführen, verhältnissmässig gering sind, so lassen sie sich bequem in natürlicher Grösse wiedergeben. Dieselben stellen nichts anderes dar, als die Projection auf die dritte, zur Gangrichtung senkrechte Coordinatenebene (YZ-Ebene); daher kann man diese Abweichungen von der geradlinigen Fortbewegung ebenfalls ohne alle Rechnung unter Verwendung der y- und z-Coordinaten der obigen Tabellen aufzeichnen. Dies ist auf Tafel XII von beiden Versuchen nicht nur für den Kopfscheitelpunkt und die Mittelpunkte der Schulter- und Hüftgelenke, sondern auch für die Mittelpunkte der Schulterlinie und Hüftlinie in natürlicher Grösse in der Weise ausgeführt worden, dass man die Ansicht in der Gangrichtung, d. h. also von hinten besitzt.

Diese Bilder, welche bei genau geradliniger Fortbewegung des Versuchsindividuums und bei ganz horizontalem Fussboden in sich zurücklaufende Curven darstellen würden, eignen sich sehr gut zur Veranschaulichung der in Frage stehenden Bahncurven. Wäre die in der Gangrichtung geschätzte Geschwindigkeit, mit welcher die Bahnen durchlaufen werden, constant und bekannt, so würde diese eine Projection sogar vollständig ausreichen, um die genaue Gestalt der doppelt gekrümmten Bahncurven zu erhalten. Man hätte sich nur vorzustellen, dass die betreffenden Punkte des menschlichen Körpers mit der durch den wechselnden Abstand der aufeinander folgenden Phasenpunkte erkennbaren variablen Geschwindigkeit die auf Tafel XII aufgezeichneten Curven in der Richtung der Pfeile durchliefen, und dass dabei die Figuren gleichzeitig in der Gangrichtung, d. h. also senkrecht zu der Ebene der Zeichnung, mit der bekannten Fortschreitungsgeschwindigkeit

vom Auge des Beobachters entfernt würden. Da nun ein jeder dieser Punkte nicht mit ganz constanter Geschwindigkeit in der Gangrichtung fortschreitet, so wird seine Bahn an manchen Stellen mehr zusammengedrängt, an anderen Stellen weiter auseinander gezogen sein, als sie bei der angedeuteten Art ihrer Erzeugung erscheint. Ihre Form kann dadurch aber nicht wesentlich verändert werden. Auf alle Fälle wird die Bahncurve auf einer Cylinderfläche verlaufen müssen, deren Erzeugende senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht, und deren Querschnitt gerade durch die auf Tafel XII niedergelegte, im idealen Falle geschlossenen Curve dargestellt wird. Man sieht hieraus auch gleichzeitig, dass die Vorstellung, welche sich Carlet nach seinen Untersuchungen über die Gestalt der Raumcurve bildete, welche der oberste Punkt der Symphysis ossium pubis beschreibt (vgl. Seite 163), nicht ganz zutreffend sein kann. Denn wäre diese Curve thatsächlich in eine einzige Rinne mit der Convexität nach unten einbeschrieben, so müssten die Bilder auf Tafel XII, vor allen Dingen das zur Mitte der Hüftlinie gehörende, ein einziges doppelt zu zählendes Stück einer etwa ellipsenförmigen Curve darstellen. Immerhin weicht jedoch die Anschauung von Carlet nicht zu sehr von der Wirklichkeit ab.

Die zu Kopf, Schulter und Hüfte gehörenden Curven bieten nun ganz charakteristische Unterschiede dar. Zieht man zunächst nur die drei mittelsten Curven, d. h. die zum Kopfscheitelpunkt und den Mitten der Schulter- und Hüftlinie gehörenden in Vergleich, so zeigt sich, dass die beiden ersten zwar nahezu dieselbe Höhe, ca. 5,5 cm, und dieselbe Breite, ca. 3,5 cm, besitzen, die zur Hüftlinienmitte gehörende dagegen geringere Höhe, aber grössere Breite aufweist. Die beiden Curvenabschnitte, welche sich beim I. Versuch zwischen den Phasen 5 bis 17 einerseits und 17 bis 30 andererseits, beim II. Versuch dagegen zwischen 6 bis 18 und 18 bis 31 ausbreiten, sind bei sämmtlichen Curven ungleich hoch. Der erste Abschnitt reicht durchweg tiefer herunter. Diese Ungleichheit kann nur von einer asymmetrischen Art des Gehens herrühren, sonst wäre sie nicht bei allen mittleren Curven und bei beiden Versuchen in so übereinstimmendem Maasse vorhanden. Da in die Mitte des ersten Curvenabschnittes das Aufsetzen des rechten Beines, in die Mitte des zweiten das des linken Beines fällt, so hat das Versuchsindividuum die Eigenthümlichkeit,

vor dem Aufsetzen des rechten Beines mit dem ganzen Körper tiefer herunter zu gehen als vor dem Aufsetzen des linken Beines. Es ist somit aus den Curven ein geringes Hinken auf der rechten Seite zu erkennen, welches dem unbefangenen Beobachter an dem Gange des Individuums nicht auffallen kann, da es nur einige Millimeter beträgt. Bei ganz gleichmässigem Gebrauch der Beine müssen die beiden Curvenabschnitte der drei mittleren Curven vollständige Symmetrie aufweisen.

Die Abschnitte der anderen Curven, welche zu den Schultergelenk- und Hüftgelenkmittelpunkten gehören, sind dagegen auch in diesem idealen Falle nicht symmetrisch. Man bestätigt aus den Figuren leicht, dass bei den zur rechten Körperseite gehörenden Curven das Minimum des ersten und bei den der linken Körperseite angehörenden Curven das des zweiten Abschnittes tiefer heruntergesunken ist. Gleichzeitig zeigt sich, dass an der Schulter rechts der Punkt, in welchem der zweite Curvenabschnitt sich an den ersten anschliesst, dagegen links der Punkt, in welchem der zweite Abschnitt wieder mit dem ersten zusammenkommt, höher gerückt ist. An der Hüfte findet das Umgekehrte statt.

Das Minimum des ersten Curvenabschnittes liegt für den Kopfpunkt bei I, 10½; II, 12, für die drei Schulterpunkte bei I, 11; II, 12½ und für die drei Hüftpunkte bei I, 10; II, 12. Es findet dasselbe daher im Moment oder z. B. für die Schulterpunkte kurz nach dem Moment des Aufsetzens des rechten Beines auf den Fussboden statt und fällt somit in die Periode des gleichzeitigen Aufstützens beider Beine. Das zweite Minimum entspricht für den Kopfpunkt den Phasen I, 23½; II, 25, für die Schulterpunkte den Phasen I, 24; II, 25½ und für die Hüftpunkte den Phasen I, 23; II, 24. Daraus geht hervor, dass das zweite Minimum der Hüftpunktcurven genau mit dem Aufsetzen des linken Beines zusammenfällt, während das entsprechende Minimum der vier anderen Punkte etwas nach diesem Moment und zwar für die Schulterpunkte später als für den Kopfpunkt stattfindet. Es fällt demnach übereinstimmend für sämmtliche sieben Curven auch dieses Minimum in die Periode des beiderseitigen Aufstützens. Dabei ist zu bemerken, dass beim Kopfpunkt und den Schulterpunkten das erste Minimum rechts vom zweiten, bei den Hüftpunkten dagegen das erste links vom zweiten liegt. Dementsprechend sind die beiden

Curvenabschnitte bei den letzteren näher an einander gerückt als bei den ersteren. Daraus geht hervor, dass beim Aufsetzen des rechten Beines die obere Partie des Rumpfes und der Kopf nach der rechten Seite herüber neigen. Es hat also beim Aufsetzen des rechten Beines eine Neigung des Rumpfes nach rechts stattgefunden. Genau das Umgekehrte stellt sich beim Aufsetzen des linken Beines ein. Diesem entspricht eine Neigung des Rumpfes nach links.

Die Punkte, in welchem die beiden Curvenabschnitte zusammenstossen, I, $4\frac{1}{2}$[1]; II, $5\frac{1}{2}$ und I, $17\frac{1}{2}$; II, $18\frac{1}{2}$, stellen die Maxima der verticalen Wellenlinien dar. Dieselben entsprechen dem Moment, in welchem der Mittelpunkt des Hüftgelenks vom aufstützenden Beine senkrecht über dem Schwerpunkt des aufgesetzten Fusses liegt (vgl. die Verticalprojectionen auf Tafel X und XI). Es ist das auch gleichzeitig nahezu der Moment, in welchem der Schwerpunkt des Fusses vom schwingenden Beine sich senkrecht unter seinem Hüftgelenkmittelpunkte vorbei bewegt. Es entsprechen also, um es kurz auszudrücken, die Maxima der gleichzeitig stattfindenden senkrechten Lage beider Beine.

Aus der oben angedeuteten normalen Asymmetrie der zu einem der beiden Schultergelenk- oder Hüftgelenkmittelpunkte gehörenden Curvenabschnitte geht nun hervor, dass sowohl an der Schulter als an der Hüfte auf jeder Körperseite dasjenige Minimum der verticalen Wellenlinie das tiefere ist, welches im Moment oder kurz nach dem Moment des Aufsetzens des Beines derselben Seite eintritt. Bei den Schultergelenkcurven ist im idealen Falle dasjenige Maximum das höhere, welches der senkrechten Stellung des aufstützenden Beines derselben Seite, bei den Hüftgelenkcurven dagegen dasjenige, welches der senkrechten Stellung des schwingenden Beines derselben Seite entspricht.

Endlich zeigt sich insofern noch ein Unterschied zwischen den Schultercurven einerseits und den Hüftcurven andererseits, als bei ersteren, ebenso wie bei der Kopfcurve, die beiden Abschnitte sich in der Projection nur einmal, bei letzteren dagegen dreimal durchschneiden.

---

1) Soll bedeuten, dass der Moment zwischen dem Moment der 4ten und 5ten Bewegungsphase liegt.

Aus den Curven der Tafel XII kann man auch die Lage der Punkte grösster seitlicher Ausweichung, d. h. die Lage der Maxima und Minima der horizontalen Wellenlinien erkennen. Sie sind durch die Stellen angezeigt, an welchen die Curven am weitesten von der verticalen Mittellinie entfernt sind. Beim Kopfpunkt findet dies rechts bei I, 15; II, 16 und links bei I, 3; II, 3 und I, 28; II, 30 statt. Bei genau geradliniger Fortbewegung müssten die linken Maxima bei I, 2 und II, 29 anstatt bei I, 3 und II, 30 vorhanden sein. Der Umstand, dass der Gehende die eingeschlagene Gangrichtung gewöhnlich nicht ganz genau im weiteren Verlaufe der Bewegung beibehält, bringt es mit sich, dass die Lage der Maxima von den horizontalen Wellenlinien etwas weniger constant ist als die der verticalen Wellen. Während bei der Bahn des Kopfscheitelpunktes das horizontale Maximum sowohl rechts als links über zwei Phasenintervalle, also ungefähr 0,08 vor dem verticalen Maximum liegt, fällt es dagegen bei den Curven der Schulterpunkte augenscheinlich mit letzterem zusammen; hier zeigt die Curve in der Projection auf Tafel XII wie auch in der Horizontalprojection (vgl. Tafel X und XI) vor dem Maximum einen nahezu geradlinigen Verlauf. Für die Punkte der Hüftlinie liegt das horizontale Maximum wiederum vor dem verticalen, aber nicht so viel wie für den Kopfscheitelpunkt, etwa nur $1\frac{1}{2}$ Phasenintervall, abgerundet 0,05; es befindet sich rechts bei I, 16; II, 17, links bei I, 1; II, 1 und I, 28; II, 31. Bei letzteren zeigt sich recht deutlich wieder der störende Einfluss eines nicht genau geradlinigen Ganges auf die Lage der horizontalen Maxima, denn dieselben würden sonst bei I, 3; II, 4 und I, 29; II, 30 zu suchen sein.

Sieht man von den Unregelmässigkeiten der Curven ab, welche durch die individuelle asymmetrische und nicht genau geradlinige Gangart bedingt sind, so zeigen die sieben Curven folgenden durch Fig. 18 (S. 280) dargestellten typischen Verlauf. In diesen Curven sind die Stellen, welche dem Aufsetzen des rechten, beziehungsweise linken Beines auf den Fussboden entsprechen, besonders markiert und mit R, beziehungsweise L bezeichnet worden.

Der Typus dieser Curven wird voraussichtlich bei allen Menschen derselbe sein. Die Unterschiede, welche auftreten, werden einerseits in verschiedener Höhen- und Breitenausdehnung und in verschiedenen Verhältnissen beider Ausdehnungen bestehen, andererseits werden sie

sich, wie bei unserem Versuchsindividuum, als Unsymmetrieen der beiden Curvenäste äussern. An letzteren werden namentlich die Gangarten bei pathologischen Zuständen reich sein.

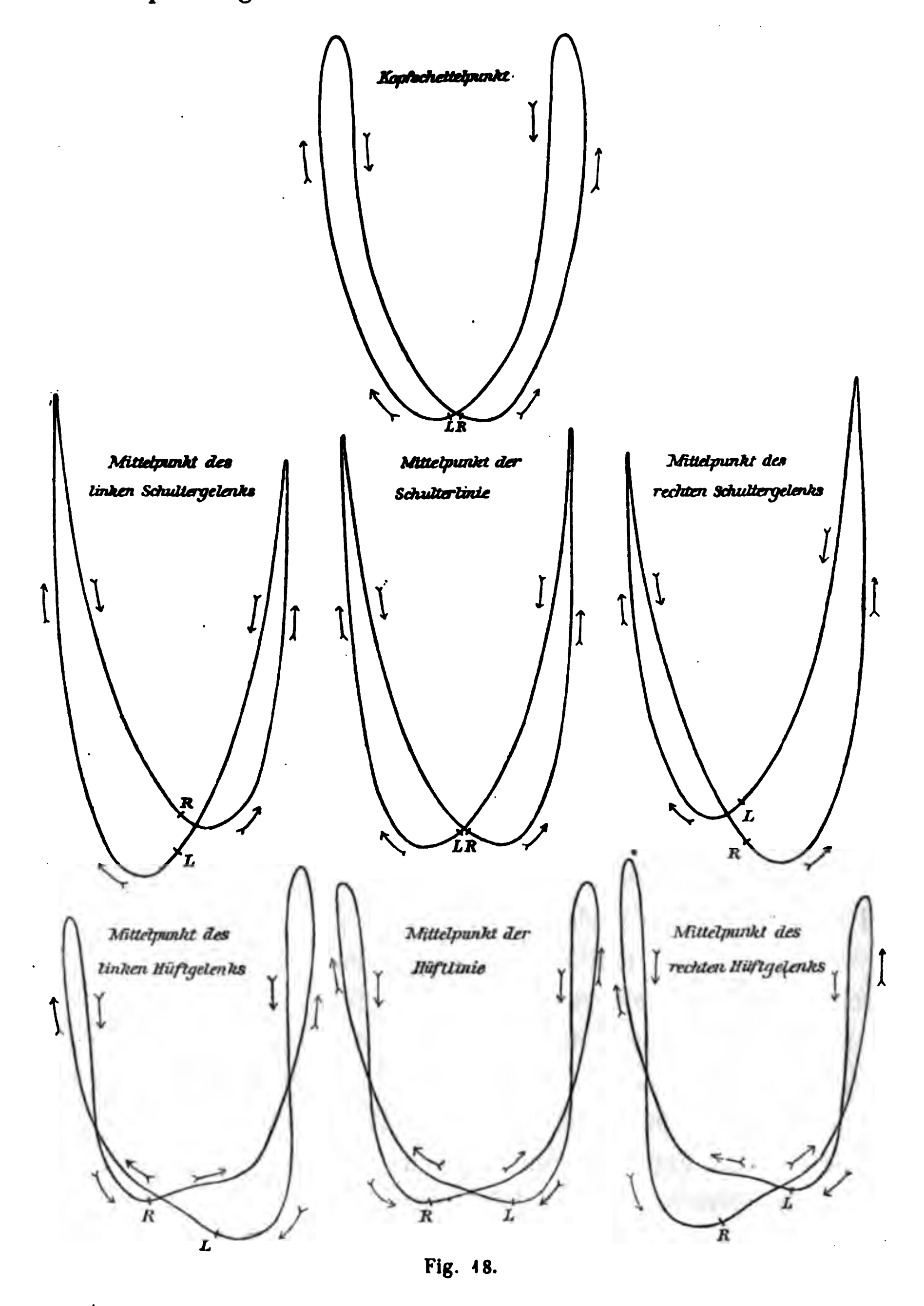


Fig. 18.

Die sieben in Fig. 18 niedergelegten Typen zeigen nun ganz charakteristische Abweichungen von einander. Diese Abweichungen

rühren von ganz bestimmten Bewegungen und Verdrehungen des Rumpfes und Kopfes her, welche nunmehr näher zu untersuchen sind.

Auch die diesbezüglichen Fragen sind implicite durch unsere Coordinatentabellen beantwortet, wenn sich auch erst eine kleine Rechnung nöthig macht, um die Antworten aus den Coordinatenwerthen herauszuschälen.

Die Drehungen und Deformationen des Rumpfes.

Bei den Bewegungen des Rumpfes kommt dreierlei in Betracht: die Richtungsänderungen der Hüftlinie, der Schulterlinie und der Verbindungslinie von Hüftlinien- und Schulterlinienmitte, d. h. der Rumpflinie. Durch die gegenseitige Verdrehung dieser drei Linien sind die Bewegungen und Gestaltsänderungen, welche dem Rumpfe während des Gehens aufgezwungen werden, so weit bekannt, als sie sich überhaupt aus unserer Versuchsanordnung feststellen lassen, bei welcher wir ausser den Schultergelenk- und Hüftgelenkpunkten keine anderen Punkte des Rumpfes für die Messung herausgegriffen hatten.

Im Interesse der grösseren Anschaulichkeit ist es am zweckmässigsten, die Richtungsänderungen der Hüftlinie als Drehungen um deren Mittelpunkt, in gleicher Weise die Richtungsänderungen der Schulterlinie als Drehungen um ihren Mittelpunkt und die Richtungsänderungen der Rumpflinie als Drehungen um ihren unteren Endpunkt, d. h. um den Mittelpunkt der Hüftlinie aufzufassen. Nimmt man dann noch die schon untersuchte Bewegung des Hüftlinienmittelpunktes auf ihrer doppelt gekrümmten Bahn hinzu, so hat man ein klares Bild von der ganzen Bewegung des Rumpfes. Denn durch die Bahncurve der Hüftlinienmitte in Verbindung mit den Drehungen der Hüftlinie ist die Bewegung der beiden Hüftgelenkmittelpunkte bestimmt. Dieselbe Bahncurve gibt im Verein mit den Drehungen der Rumpflinie eine Vorstellung von der Bahncurve der Schulterlinienmitte, und die letztere lässt wiederum in Verbindung mit den Drehungen der Schulterlinie die Bewegung der beiden Schultergelenkmittelpunkte erkennen. Gleichzeitig giebt die Drehung der Rumpflinie um die Hüftlinienmitte eine deutliche Vorstellung von der Vorwärts-, Rückwärts- und Seitwärts-

neigung des ganzen Rumpfes während des Gehens, und die Vergleichung der Drehungen der Hüftlinie und der Schulterlinie um ihre Mittelpunkte macht die Verdrehung und gleichzeitige Deformation des Rumpfes anschaulich.

Schliesslich kann man noch die relative Bewegung des Kopfscheitelpunktes zum Mittelpunkt der Schulterlinie bestimmen und erhält dann wenigstens einen ungefähren Ueberblick über die Bewegungen des Kopfes auf dem Rumpfe, wenn auch dieselben nicht genau in der Weise stattfinden, als ob sich der Kopf um die Schulterlinienmitte als festes Gelenkcentrum drehte. Die Bewegung des Kopfes zum Rumpfe wird überhaupt genau genommen sich nicht als eine Drehung um einen zum Rumpfe festen Punkt darstellen, da ja doch die Halswirbelsäule dabei starke Verbiegungen erfährt. Um die genaue Bewegung des Kopfes relativ zum Rumpfe festzustellen, hätte man noch mehr Punkte am Kopfe, etwa solche an den Ohröffnungen, zur Messung benutzen müssen. Dies ist unterlassen worden, da die Bewegungen des Kopfes während des Ganges von ganz untergeordneter Bedeutung sind.

Die Drehungen der Hüftlinie.

Die Drehung der Hüftlinie um ihren Mittelpunkt ist bekannt, wenn man die relative Bewegung eines der beiden Hüftgelenkmittelpunkte zu der Hüftlinienmitte bestimmt hat. Die Coordinaten dieser relativen Bewegung ergeben sich aber auf sehr einfache Weise aus den in obigen Tabellen niedergelegten, auf ein im Raume festes System bezogenen Coordinaten eines der beiden Hüftgelenkmittelpunkte und der Hüftlinienmitte als Differenz derselben. Bezeichnet z. B. in Fig. 15 auf Seite 242 A den rechten Hüftgelenkmittelpunkt und B den Hüftlinienmittelpunkt, so besitzt, wenn man B zum Coordinatenanfangspunkt nimmt und das Coordinatensystem parallel nach diesem Punkte hin verschoben denkt, der Punkt A nach der für den früheren Zweck gewählten Bezeichnungsweise die drei räumlichen Coordinaten $x'_a - x'_b$, $y'_a - y'_b$ und $z'_a - z'_b$.

Auf diese Weise sind aus den früheren Coordinaten die relativen Coordinaten des rechten Hüftgelenkmittelpunktes zum Hüftlinienmittelpunkte für die beiden ersten Versuche bestimmt worden. Die Werthe derselben finden sich in folgender Tabelle 13 niedergelegt.

Relative Coordinaten des rechten Hüftgelenkmittelpunktes in Bezug auf den Mittelpunkt der Hüftlinie.

Tabelle 13.

Nr.	I. Versuch			II. Versuch		
	x	*y*	*z*	*x*	*y*	*z*
1	— 0,45	+ 8,47	— 1,03	— 1,14	+ 8,39	— 0,77
2	0	+ 8,46	— 0,89	— 0,15	+ 8,42	— 0,62
3	+ 0,42	+ 8,45	— 0,71	+ 0,30	+ 8,43	— 0,60
4	+ 0,78	+ 8,45	— 0,59	+ 0,30	+ 8,44	— 0,65
5	+ 0,98	+ 8,43	— 0,53	+ 0,40	+ 8,46	— 0,67
6	+ 1,05	+ 8,41	— 0,59	+ 0,41	+ 8,47	— 0,59
7	+ 0,99	+ 8,42	— 0,77	+ 0,51	+ 8,46	— 0,54
8	+ 0,92	+ 8,39	— 0,99	+ 0,62	+ 8,46	— 0,66
9	+ 0,98	+ 8,38	— 1,07	+ 0,56	+ 8,43	— 0,90
10	+ 1,04	+ 8,38	— 1,01	+ 0,54	+ 8,41	— 1,07
11	+ 1,15	+ 8,37	— 0,95	+ 0,81	+ 8,40	— 1,03
12	+ 1,03	+ 8,41	— 0,73	+ 0,96	+ 8,39	— 1,01
13	+ 0,77	+ 8,44	— 0,58	+ 0,90	+ 8,40	— 0,83
14	+ 0,57	+ 8,45	— 0,47	+ 0,76	+ 8,44	— 0,60
15	+ 0,23	+ 8,47	— 0,62	+ 0,48	+ 8,47	— 0,58
16	— 0,23	+ 8,47	— 0,83	+ 0,25	+ 8,46	— 0,60
17	— 0,51	+ 8,43	— 0,92	— 0,01	+ 8,47	— 0,73
18	— 0,68	+ 8,42	— 0,93	— 0,33	+ 8,46	— 0,80
19	— 0,71	+ 8,43	— 0,86	— 0,61	+ 8,46	— 0,81
20	— 0,77	+ 8,43	— 0,75	— 0,83	+ 8,42	— 0,83
21	— 0,93	+ 8,42	— 0,58	— 0,95	+ 8,42	— 0,70
22	— 1,11	+ 8,41	— 0,47	— 1,10	+ 8,41	— 0,53
23	— 1,16	+ 8,40	— 0,49	— 1,23	+ 8,40	— 0,43
24	— 1,24	+ 8,38	— 0,59	— 1,24	+ 8,40	— 0,46
25	— 1,08	+ 8,40	— 0,74	— 1,37	+ 8,38	— 0,57
26	— 0,90	+ 8,42	— 0,84	— 1,11	+ 8,39	— 0,75
27	— 0,68	+ 8,44	— 0,96	— 0,88	+ 8,39	— 0,85
28	— 0,35	+ 8,44	— 0,96	— 0,65	+ 8,38	— 0,65
29	— 0,05	+ 8,44	— 0,77	— 0,43	+ 8,35	— 0,51
30	+ 0,23	+ 8,48	— 0,59	— 0,08	+ 8,30	— 0,48
31	+ 0,33	+ 8,48	— 0,54	+ 0,42	+ 8,28	— 0,48

Die relativen Coordinaten des linken Hüftgelenkmittelpunktes werden sich von diesen nur durch das Vorzeichen unterscheiden; sie sollen daher nicht noch einmal besonders angef[illegible]

Da die Richtung der Hüftlinie sich bei allen Drehungen nur wenig von der Richtung der Y-Axe des Coordinatensystems entfernt, was auch in dieser Tabelle aus dem nahezu constanten Werthe der y-Coordinate und den kleinen Werthen der beiden anderen Coordinaten hervorgeht, so erhält man einen vollständig genügenden Einblick in die Schwankungen der Hüftlinie, wenn man allein die Veränderungen der x- und der z-Coordinate untersucht.

Die Aenderungen der z-Coordinate geben ein Bild von der verticalen Erhebung und Senkung der Hüftgelenkmittelpunkte und somit von der Drehung des Beckens um eine durch die Hüftlinienmitte hindurchgehende horizontale Axe. Diese Axe braucht nicht nothwendig die Gangrichtung zu besitzen, wenn sie auch nicht viel von ihr abweichen kann. Sie bildet mit der Gangrichtung denselben Winkel, um welchen das Becken gleichzeitig um die verticale Axe aus seiner normalen Lage, bei welcher die Hüftlinie senkrecht auf der Gangrichtung steht, herausgedreht ist. Um die Erhebungen und Senkungen deutlich zur Anschauung zu bringen, ist es zweckmässig, sie in der Weise graphisch darzustellen, dass man senkrecht zu einer horizontalen Abscissenlinie die Grössen der z-Coordinate nach einander in gleichen seitlichen Abständen als Ordinaten aufträgt. Diese gleichen seitlichen Abstände auf der Abscissenlinie können zwar an und für sich beliebig gewählt werden; sie dürfen aber in keinem Missverhältniss zu den Grössen der Ordinaten stehen, wenn die Anschaulichkeit möglichst gross sein soll. Werden die Abstände zu gross gewählt, so wird die Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, zu flach, als dass man alle Feinheiten der Erhebung und Senkung deutlich wahrnehmen könnte. Für die in Frage stehenden Grössen der verticalen Erhebung und Senkung ist es am zweckmässigsten, die Abscissenabstände gleich einem Millimeter zu wählen. Dann erhält man als Diagramm der Erhebungen und Senkungen des rechten Hüftgelenkmittelpunktes das obere und für die des linken Hüftgelenkmittelpunktes das untere Bild in Feld Nr. 1 der Tafel XIII für den I. Versuch und in Feld Nr. 9 derselben Tafel für den II. Versuch. Diese Diagramme stimmen in der Form überein bis auf je eine Abweichung am Anfang und am Ende des Bildes in Nr. 9, welche wohl einzig und allein dem Umstande zuzuschreiben ist, dass die Coordinaten der Hüftgelenkmittelpunkte beim II. Versuch

für die je vier auf einander folgenden Bewegungsphasen 2 bis 5 und 27 bis 30 nicht durch directe Messung, sondern durch Interpolation gefunden worden waren. Aus den früheren Angaben konnte von vornherein erwartet werden, dass die Maxima und Minima der Curven des II. Versuchs um einen Millimeter (1 Phase) weiter nach rechts verschoben sind als beim I. Versuch. Die Diagramme für die linken Hüftgelenkmittelpunkte bilden naturgemäss die Spiegelbilder der rechten in Bezug auf eine horizontale Spiegelebene. Denn wenn das rechte Hüftgelenk relativ zur Hüftlinienmitte gehoben wird, muss sich das linke um gleichviel senken und umgekehrt.

Die Diagramme muss man sich nun auf eine seitlich gelegene Verticallinie projicirt denken, um eine getreue Vorstellung von der relativen Bewegung der Hüftgelenkmittelpunkte in verticaler Richtung zu erhalten; denn in Wirklichkeit geht die Bewegung in einer einzigen Verticalen vor sich. Das seitliche Auseinanderziehen derselben hatte ja nur den Zweck, den Bewegungsvorgang anschaulicher zu machen. In entsprechender Weise erhält man z. B. ein deutliches Bild von den Schwingungen einer Stimmgabel dadurch, dass man dieselben sich auf die rotierende Trommel eines Kymographions aufzeichnen lässt. Um die verticalen Schwankungen der Hüftlinie selbst aufzufassen, hat man noch in der Richtung der Axe der Wellenlinien der Felder Nr. 1 und 9 seitlich von der Verticallinie, auf welche man sich die Bewegung projicirt denkt, den Mittelpunkt der Hüftlinie festgelegt anzunehmen, und zwar für den rechten Hüftgelenkmittelpunkt in einem Abstand von ca. 8,5 cm links von der Verticalen, für den linken Hüftgelenkmittelpunkt dagegen in demselben Abstand rechts von derselben. Denkt man dann den Hüftlinienmittelpunkt mit dem auf der Verticalen hin und her bewegten Punkte geradlinig verbunden, so erhält man eine deutliche Vorstellung von der verticalen Schwingung der rechten oder linken Hälfte der Hüftlinie in der Ansicht von hinten. Dass der Endpunkt der Hüftlinie sich in Wirklichkeit nicht auf einer geraden Linie bewegt, sondern auf einer Kreislinie vom Radius 8,5 cm und mit der Hüftlinienmitte als Centrum, kann bei so kleinen Excursionen der Hüftlinie die Vorstellung nicht stören. Man könnte sich auch dadurch eine Anschauung von der Schwingung der Hüftlinie verschaffen, dass man den Mittelpunkt derselben im Abstande von 8,5 cm hinter der Ebene der

Zeichnung festgelegt denkt. Je nachdem man das obere oder das untere Diagramm bei dieser Vorstellung verwendet, erhält man dann die Ansicht der Hüftliniendrehung von rechts oder von links. Beachtet man, dass die Bilder auf Tafel XIII die verticalen Erhebungen und Senkungen der Hüftgelenkmittelpunkte in natürlicher Grösse darstellen, so erkennt man daraus, dass bei unserem Versuchsindividuum die verticalen Schwankungen der Hüftlinie sehr gering waren. Man hat aber gleichzeitig wieder einen Beleg dafür, dass die von uns erstrebte Genauigkeit der Messung wirklich erreicht worden ist; denn sonst würden derartig kleine Curven nicht einen so stetigen Verlauf zeigen und die Curven beider Versuche nicht eine so überraschende Uebereinstimmung aufweisen können. Man ändere die Ordinate für eine Phase nur um einen halben Millimeter, sofort wird der glatte Verlauf der Curve wesentlich gestört sein. So machen sich ja thatsächlich die bei der Interpolation einer grossen Lücke, wie sie am Anfang und am Ende des zweiten Versuchs vorhanden waren, ganz unvermeidlichen Fehler sofort an den Diagrammen des Feldes Nr. 9 deutlich bemerkbar.

Das Resultat, welches die Diagramme zu Tage fördern, ist nun sehr merkwürdig.

Aus der grossen Aehnlichkeit der Diagramme mit der Gestalt einer Sinuscurve geht hervor, dass die Hüftlinie um ihren Mittelpunkt in verticaler Ebene, d. h. also um eine horizontale Axe Schwingungen ausführt, welche den einfachen Schwingungen eines an einem Ende festgehaltenen elastischen Stabes, etwa einer Stimmgabelhälfte entsprechen. Die Periode einer solchen Schwingung ist nun nicht etwa gleich der Dauer oder wenigstens gleich einem Vielfachen der Dauer eines Schrittes, sondern es kommen auf zwei Schritte immer drei Schwingungen der Hüftlinie. Ein Schritt erstreckte sich, wie früher angegeben worden ist, über 13 Bewegungsphasen, ein Doppelschritt also über 26 Phasen. Auf 26 Phasen, also z. B. von 4 bis 30, kommen aber in den Diagrammen genau drei Wellenlängen. Untersucht man nun, zu welchen Phasen die Maxima und Minima, d. h. also die Momente gehören, in welchen die Schwingung ihre Richtung umkehrt, so findet man je ein Maximum bei I, 5, 14, 22½ und II, 7, 15, 23½ und je ein Minimum bei I, 9, 17½, 27½ und II, 10, 19, 27. Wären die durch ungenaue Inter-

polation entstandenen Abweichungen der Diagramme des II. Versuchs nicht vorhanden, so würde jedenfalls an Stelle von II, 7 und II, 27 stehen II, 6 und II, 28½ und somit eine vollständige Uebereinstimmung beider Resultate vorhanden sein.

Berücksichtigt man, bei welchen Phasen die verticalen Wellenlinien der Hüftgelenkmittelpunkte ihre Maxima und Minima besitzen, mit welcher Phase ein jedes Bein auf den Boden aufgesetzt wird u. s. w., so ergiebt sich demnach Folgendes:

Bei dem verticalen Maximum einer Hüftgelenkbahn, welches in die Periode des Schwingens des betreffenden Beins fällt, ist die Hüftlinie auf der betreffenden Seite am meisten erhoben; sie senkt sich dann im weiteren Laufe der Bewegung und ist am meisten geneigt, kurze Zeit, ca. 0,04 s, bevor das schwingende Bein sich auf den Boden aufgesetzt hat. Im Moment des Aufsetzens ist die Hüftlinie auf der betreffenden Seite schon wieder in der Bewegung nach oben begriffen und erreicht von neuem ihre Maximalstellung etwa 0,1 s nach dem Aufsetzen des Beins. Sie senkt sich dann wieder und erreicht in dem Moment, für welchen die Hüftgelenkbahn ihr zweites verticales Maximum besitzt, auf der rechten Seite abermals ihre grösste Neigung nach unten. Wenn die Hüftlinie rechts gesenkt ist, so ist sie natürlich links erhoben. Dem Maximum der verticalen Wellenlinie des rechten Hüftgelenks, welches während des Aufstützens des rechten Beins stattfindet, entspricht nun in der Bahncurve des linken Hüftgelenks das in die Periode des Schwebens fallende verticale Maximum. Es zeigt sich also darin eine vollständige Uebereinstimmung zwischen rechts und links, dass jetzt bei diesem Maximum der linken verticalen Wellenlinie die Hüftlinie links am meisten erhoben ist. Thatsächlich ist nun auch im weiteren Verlaufe der Bewegung bis zum nächsten linken Maximum das Verhalten der Hüftlinie von links gesehen genau das entsprechende, wie es bisher für die rechte Seite beschrieben worden ist. Es führt also, um das Resultat kurz zusammenzufassen, die Hüftlinie während der Dauer eines einfachen Schrittes um eine horizontale Axe genau drei halbe Schwingungen aus in der Weise, dass auf jeder Seite immer ein Maximum der Erhebung mit dem Maximum der verticalen Wellenlinie des Hüftgelenks zusammenfällt, bei welchem das betreffende Bein in Schwingung begriffen ist, dass dagegen im Moment des verti-

calen Maximums der Hüftgelenkbahn, bei welchem das Bein auf den Boden aufgestemmt ist, die Hüftlinie auf der betreffenden Seite am meisten gesenkt ist. Wenn Giraud Teulon und Richer[1]) mit ihrer Ansicht über die Neigung der Hüftlinie insofern in Widerspruch stehen, als der erstere behauptet, die Hüftlinie sei auf der Seite des schwingenden Beins erhoben, dagegen der letztere die entgegengesetzte Meinung ausspricht, dass die Hüftlinie sich nach dem schwingenden Bein herabsenke, so kann man nach unseren Ergebnissen sagen, dass beide zum Theil Recht, aber auch beide zum Theil Unrecht haben. Für das erste und letzte Drittel der Periode des Schwingens hat Richer, für das mittlere Drittel Giraud Teulon das Richtige getroffen. Der Fehler von beiden liegt nur darin, dass sie übereinstimmend für den ganzen Zeitabschnitt des Schwingens ein gleichmässiges Verhalten der Hüftlinie in Bezug auf ihre Neigung gegen die Horizontalebene stillschweigend voraussetzen.

Die Kenntniss der verticalen Schwankungen der Hüftlinie giebt nun auch Aufschluss über die Abweichungen in den Bahncurven der beiden Hüftgelenkmittelpunkte.

Abgesehen von der durchschnittlich einseitigen Neigung der Hüftlinie, welche entweder aus einer einseitigen Haltung des Beckens unseres Versuchsindividuums oder von einer Ungenauigkeit bei der Befestigung der Geissler'schen Röhren herrührt, liegt der Anfang des ersten Curvenabschnittes I, 5; II, 6 höher bei der Curve des rechten Hüftgelenks als bei der des linken (vgl. Tafel XII und Figur 18 auf Seite 280). Dies ist eine Folge davon, dass bei der Stellung I, 5; II, 6 die Hüftlinie rechts erhoben ist. Trotzdem hat sich nun bis I, 9; II, 10 der Curvenabschnitt rechts tiefer gesenkt als links, weil die Abwärtsbewegung des Hüftgelenkmittelpunktes rechts durch die gleichzeitige Senkung der Hüftlinie verstärkt, links dagegen geschwächt wird. Die tiefere Senkung des ganzen ersten Curvenabschnittes auf der rechten Seite ist ebenfalls diesem Umstande zuzuschreiben. Von I, 10; II, 11 an erhebt sich nun der Curvenabschnitt rechts schneller als links, so dass er nach zwei weiteren Phasenintervallen schon wieder dieselbe

1) La station et la marche chez l'homme sain et chez les malades myopathiques, par M. Paul Richer. Revue scientifique, 4e série, tome 2 No. 4, pag. 104.

Höhe erreicht hat als links, und nach abermals zwei Phasenintervallen rechts viel höher gestiegen ist. Zuletzt bei I, 17; II, 18 ist jedoch der rechte Abschnitt wieder hinter dem linken zurückgeblieben. Dies rührt daher, dass in dem letzten Stadium der Erhebung des ersten Curvenabschnittes die Hüftlinie sich auf der linken Seite erhebt und dadurch ein viel stärkeres Wachsthum des zum linken Hüftgelenk gehörenden Abschnittes hervorruft. Der sich an den ersten anschliessende zweite Curvenabschnitt steigt zunächst rechts nicht so weit herab als links, trotzdem sein Ausgangspunkt auf der rechten Seite der niedrigere ist. Dies ist eine Folge der gleichzeitigen Erhebung der Hüftlinie auf der rechten Seite. Nachdem er seinen tiefsten Punkt bei I, 23; II, 24 erreicht hat, steigt er dann zunächst sanft an, links etwas steiler wie rechts, weil jetzt die Hüftlinie sich links erhebt. In der zweiten Hälfte des ansteigenden Astes überwiegt dann wiederum rechts die Geschwindigkeit, so dass der Ast sich auf der rechten Seite im Ganzen höher erhebt als auf der linken. Man ist damit wieder am Ausgangspunkt des ersten Curvenabschnittes angelangt.

Auf diese Weise erklären sich also die Abweichungen der zu den beiden Hüftgelenken gehörenden Curven auf Tafel XII und in Figur 18 vollständig durch die verticalen Schwankungen der Hüftlinie.

Ausser in einer verticalen Ebene führt die Hüftlinie nun auch Drehungen in der Horizontalebene, d. h. Drehungen um die durch die Hüftlinienmitte gehende Verticale aus. Die Grösse und der Sinn dieser Drehung wird durch die in der Tabelle 13 auf Seite 283 niedergelegten Werthe der x-Coordinate bestimmt. Um dieselben zur Anschauung zu bringen, empfiehlt es sich wieder, das Diagramm für die x-Coordinate in der Weise aufzuzeichnen, dass man in Abscissenabständen von je 1 mm die Grössen dieser Coordinate als Ordinaten aufträgt. Dies ist für den I. Versuch in Feld Nr. 2 und für den II. Versuch in Feld Nr. 10 der Tafel XIII geschehen. Das obere Diagramm gehört wieder zum rechten, das untere zum linken Hüftgelenkmittelpunkt. Die entsprechenden Diagramme beider Versuche stimmen ebenfalls bis auf kleine Abweichungen am Anfang und Ende so vollkommen überein, als man es überhaupt bei zwei vollständig von einander unabhängig angestellten Versuchen und bei der Kleinheit der in Frage kommenden Ordinatenwerthe erwarten kann.

Der Grund der Abweichungen am Anfang und Ende ist schon früher erörtert worden.

Diese Diagramme besitzen im Wesentlichen wieder die Form einer einfachen Wellenlinie (Sinuscurve). Sie weichen von der Gestalt einer solchen kurz vor jedem Maximum und Minimum etwas ab und sind ausserdem nach jedem Maximum oder Minimum etwas zu steil. Diese kleinen Schwankungen sind bei beiden Versuchen zu beobachten. Sie sind daher nicht etwa auf Ungenauigkeiten in der Messung zurückzuführen, sondern sie werden bestimmte mechanische Bedeutung besitzen. Die Wellenlänge dieser Wellenlinien ist gerade dreimal so gross, wie bei den bisher betrachteten Diagrammen in Feld Nr. 1 und Nr. 9. Daraus geht hervor, dass die Drehungen der Hüftlinie um die verticale Axe nahezu einfache Schwingungen darstellen, deren Dauer gleich der Dauer eines Doppelschrittes ist.

Je ein Maximum und ein Minimum der rechten Wellenlinie befindet sich bei I, 11; II, 12 und I, 24; II, 25. Dies entspricht Momenten, welche kurz nach dem Aufsetzen des rechten oder linken Beines liegen.

Um eine deutliche Vorstellung von der Schwingung der Hüftlinie in der horizontalen Ebene zu erhalten, muss man sich eine jede Wellenlinie wieder auf eine seitlich gelegene Verticallinie projicirt denken. Den als ruhend angenommenen Mittelpunkt der Hüftlinie hat man dann in der Richtung der Axe der Wellenlinie seitlich von dieser Verticalen anzunehmen, und zwar für den rechten Hüftgelenkmittelpunkt links von derselben und für den linken Hüftgelenkmittelpunkt rechts von der Verticalen in je einem Abstande von 8,5 cm. Denkt man sich dann endlich den seitlich gelegenen Hüftlinienmittelpunkt mit dem auf der Verticalen sich hin und her bewegenden Punkte geradlinig verbunden, so erhält man ein klares Bild von den horizontalen Schwingungen der rechten oder linken Hälfte der Hüftlinie in der Ansicht von oben. Um sich die Ansicht von rechts oder links zu verschaffen, hätte man nur den ruhenden Hüftlinienmittelpunkt im Abstand von 8,5 cm hinter der Ebene der Zeichnung anzunehmen und im ersten Falle das obere, im zweiten das untere Diagramm zu verwenden.

Aus der Grösse der Diagramm-Ordinaten erkennt man, dass die horizontalen Schwingungen der Hüftlinie eine grössere Amplitude be-

sitzen als die verticalen; die der ersteren ist ungefähr fünfmal so gross als die der letzteren. Während das Verhältniss zwischen den Schwingungsdauern beider Schwingungsarten sicher bei allen Individuen dasselbe, nämlich 1 : 3 ist, wird das angeführte Verhältniss der Schwingungsamplituden jedenfalls individuell verschieden sein.

Aus der Lage der Maxima und Minima der die horizontale Schwingung graphisch darstellenden Diagramme in Feld Nr. 2 und Nr. 10 geht nun folgendes Resultat hervor.

Die Hüftlinie dreht sich immer so, dass derjenige Endpunkt derselben dabei nach vorn geht, welcher auf der Seite des schwingenden Beines liegt. Kurz nach dem Moment, in welchem das schwingende Bein auf den Fussboden aufgesetzt wird, kehrt sich der Sinn der Drehung um, so dass sich nunmehr der andere Hüftgelenkmittelpunkt nach vorn bewegt.

Was nun endlich die kleinen Abweichungen von der reinen Form der Sinuslinie in den Diagrammen anlangt, welche darauf hindeuten, dass die horizontale Drehung der Hüftlinie sich nicht vollständig als eine einfache Schwingung darstellt, so rühren dieselben jedenfalls von der Gelenkbewegung im Kniegelenk des schwingenden Beines her. Es würde vorläufig zu weit führen, auf den vermuthlichen Zusammenhang beider Erscheinungen näher einzugehen.

Die horizontalen Schwingungen der Hüftlinie bewirken fast keine Abweichungen in der Gestalt der auf Tafel XII niedergelegten Projectionen der Hüftgelenkbahnen, weil bei den Schwingungen die Hüftgelenkmittelpunkte sich nahezu senkrecht zu diesen Projectionscurven bewegen. Ihr Einfluss besteht vielmehr darin, dass sie an gewissen Stellen die Bahncurve eines Hüftgelenkmittelpunktes in der Richtung des Gehens gleichsam auseinanderziehen, an anderen Stellen dagegen dieselbe zusammendrücken. So stellt bei jeder Hüftgelenkbahn der Theil eine gestrecktere Wellenlinie dar, welcher der Periode des Schwingens des betreffenden Beines entspricht. Die Wellenlänge dieses Theils ist um die doppelte Gesammtausweichung eines Hüftgelenks infolge der horizontalen Schwingung grösser als die Wellenlänge des in die Periode des Aufstützens des Beines fallenden Theils der Bahncurve.

Die beiden Schwingungen der Hüftlinie um eine horizontale und eine verticale Axe finden nun zu gleicher Zeit statt und setzen sich daher zu einer complicirten Schwingungsart zusammen. Man kann

sich den Vorgang entweder so vorstellen, dass man die Axen zum Becken fest annimmt, dann verändern beide bei der Drehung ihre Richtung, oder dass man für die Axen bei allen Stellungen des Beckens die verticale Richtung einerseits und die horizontale Gangrichtung andererseits beibehält, dann verändern dieselben bei der Drehung ihre relative Lage im Becken. Da die Amplitude beider Schwingungen klein ist, so unterscheiden sich die beiden Arten der Hervorbringung des resultirenden Schwingungsvorganges nur wenig. Da es viel leichter ist, Schwingungen zusammenzusetzen, deren Richtungen im Raume fest liegen, so wollen wir hier von der letzteren Vorstellung Gebrauch machen.

Es handelt sich dann in dem vorliegenden Falle darum, zwei Schwingungen um zwei zu einander senkrechte Axen zusammenzusetzen, von denen die eine Schwingung, um die verticale Axe, eine dreimal so grosse Schwingungsdauer und fünfmal so grosse Schwingungsamplitude besitzt als die andere, um eine horizontale Axe. Nimmt man den Durchkreuzungspunkt der beiden Axen (Mittelpunkt der Hüftlinie) als fest an, so erhält man einen vollständigen Einblick in die resultirende Schwingung der Hüftlinie, wenn man sich die Bahn eines beliebigen Punktes derselben verschafft. Im Interesse der Anschaulichkeit liegt es, diesen Punkt möglichst von dem Schwingungscentrum entfernt anzunehmen, damit die zurückgelegten Wege nicht zu klein ausfallen. Ein jeder Hüftgelenkmittelpunkt führt in horizontaler Richtung Excursionen von ungefähr 2,5 cm (Tafel XIII, Feld Nr. 2 und Nr. 10) und in verticaler Richtung solche von nur 0,5 cm (Feld Nr. 1 und Nr. 9) aus. Wählt man daher einen Punkt der Hüftlinie, welcher auf der rechten Seite liegt und viermal so weit von deren Mitte entfernt ist, als der rechte Hüftgelenkmittelpunkt, so werden die Excursionen desselben in den beiden zu einander senkrechten Richtungen auf das Vierfache vergrössert, sodass dieselben bezüglich 10 cm und 2 cm betragen. Die Bahn, welche dieser Punkt bei der Schwingung um die verticale Axe beschreibt sei *A'OA* (Fig. 19) und die Bahn, welche der Schwingung um die horizontale Axe entspricht, *BOB'*. Während der Punkt einmal zwischen *A* und *A'* hin- und herschwingt, wird er dreimal den Weg von *B* nach *B'* und zurück durchlaufen haben.

Es sei nun zunächst angenommen, dass es sich in beiden Fällen

um einfache Schwingungen (Sinusschwingungen) handelt. Theilt man die Schwingungsdauer der horizontalen Schwingung in 36 gleiche Theile, so würde am Ende der einzelnen Zeitabschnitte der Punkt auf jeder seiner beiden Bahnen die in der Figur durch die fortlaufende Nummerierung markirten Stellen passiren. Dabei ist angenommen worden, dass der Punkt auf beiden Bahnen gleichzeitig durch die Mittellage hindurchgeht, und dass von einem solchen Moment an die Zeit gerechnet wird. Wird der Punkt beiden Schwingungsbewegungen zu gleicher Zeit unterworfen, so muss er die in Figur 19 gezeichnete krumme Bahn $C'OC$ beschreiben und zwar so, dass er während einer ganzen von O aus gerechneten horizontalen Schwingung auf dieser Bahn den Weg $OCOC'O$ zurücklegt. Diese Thatsache ist an der Hand

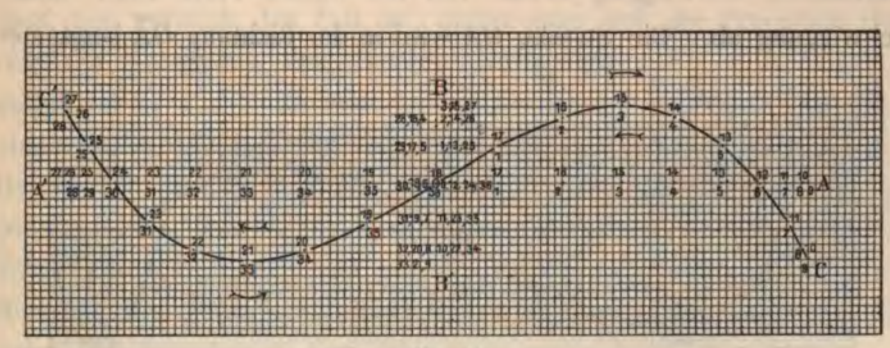


Fig. 19.

der Figur leicht einzusehen. Während der Punkt infolge der verticalen Schwingung sich von O bis B bewegt, legt er bei der horizontalen Schwingung nur die Hälfte der Strecke OA zurück. Es erhebt sich daher die krumme Bahn desselben zunächst bis zu dem mittelsten oberen Punkte des durch OA und OB gebildeten Rechtecks. Da nun die Bewegung in der Richtung OA sich noch verlangsamt, während der Punkt in verticaler Richtung von B nach O zurückkehrt, so ist der folgende absteigende Ast der Curve bis zur Horizontalen OA kürzer als der von O aufsteigende; derselbe senkt sich noch weiter bis zum Punkte C infolge der weiteren verticalen Abwärtsbewegung von O bis B'. Die Bewegung auf OA ist in der zweiten Hälfte der Bahn so langsam geworden, dass zum Zurücklegen der letzteren dieselbe Zeit nöthig gewesen ist, in welcher der Punkt sich in verticaler Richtung von B bis B' bewegt hat. Es wird nun auch

rückwärts wieder der Punkt von A aus nur bis halbwegs AO gekommen sein, während er die ganze Strecke $B'B$ in entgegengesetzter Richtung durchlaufen hat, wie man aus den Zahlen in Figur 19 erkennt. Daher wird der Punkt in Wirklichkeit auf demselben krummen Wege zurückkehren, auf dem er bis C gekommen ist. Der weitere Verlauf der Bahncurve des Punktes bedarf keiner näheren Erläuterung, da er sich unter Zuhülfenahme der Fig. 19 leicht verfolgen lässt.

Diese resultirende Bahncurve entspricht nun nicht genau den thatsächlichen Verhältnissen. Es trifft zwar für die Bewegung eines Punktes der Hüftlinie die Voraussetzung zu, dass derselbe bei beiden Schwingungen gleichzeitig die Mittellage passirt, dagegen weicht die horizontale Schwingung etwas von der reinen Form einer Sinusschwingung ab. Die Strecke OA wird in der Richtung $\overline{OA}$ langsamer

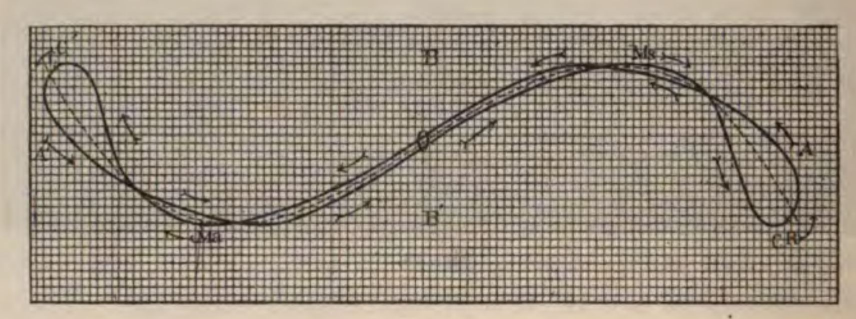


Fig. 20.

durchschritten als in der umgekehrten Richtung $\overline{AO}$; entsprechend wird die andere Strecke OA' in der Richtung $\overline{OA'}$ mit geringerer Geschwindigkeit zurückgelegt als in der Richtung $\overline{A'O}$. Dies lehrt die Betrachtung der Diagramme in Feld Nr. 2 und Nr. 10 der Tafel XIII. Es tritt daher der Fall ein, dass, während der Punkt sich in verticaler Richtung von O bis B und dann zurück von B über O nach B' bewegt hat, er bei seiner horizontalen Schwingung noch nicht von O bis A gekommen ist. Daher wird der Punkt C, bis zu welchem sich der Curvenast herabsenkt, links von der in Fig. 19 eingezeichneten Lage zu suchen sein, etwa an der in Fig. 20 angenommenen Stelle. Während der Punkt auf der Verticalen von B' aus zurückgeht er dann auf der Horizontalen erst noch das fehlende Stüc

zurücklegen müssen, sodass die Bahn dann zunächst einen nach oben concaven Bogen beschreibt, bevor sie in den nach O zurückkehrenden Bogen mit der Convexität nach oben übergeht. Da dieselben Verhältnisse sich aus Symmetriegründen bei der weiteren Bewegung wiederholen, so wird die von einem Punkte der Hüftlinie beschriebene Bahn die in Fig. 20 aufgezeichnete Form besitzen müssen.

Um die Deutlichkeit zu vergrössern, wurde die Bahn eines Punktes der Hüftlinie betrachtet, welcher viermal so weit von der Hüftlinienmitte entfernt ist, als der Mittelpunkt des rechten Hüftgelenks. Die Bahncurve des letzteren, welche der gleichzeitigen Schwingung um eine verticale und eine horizontale Axe entspricht, wird daher zwar der Form nach genau dieselbe sein müssen; ihre Grösse muss dagegen viermal so gering sein. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies wirklich der Fall ist, indem man sich die Projection der relativen Bewegung des rechten Hüftgelenkmittelpunktes zur Hüftlinienmitte auf die Gangebene verschafft. Denn da die Hüftlinie im Durchschnitt senkrecht zur Gangebene gerichtet ist und im Ganzen in Folge der kleinen Schwingungsamplituden nur wenig von dieser Richtung abweicht, so wird die Bahn des Hüftgelenkmittelpunktes in der Projection auf die Gangebene nahezu in ihrer wirklichen Gestalt und Grösse erscheinen. Diese Projection lässt sich nun ohne Weiteres unter der Benutzung der x- und z-Coordinaten der Tabelle 13 auf Seite 283 aufzeichnen. Dies ist in Fig. 21 für den I. Versuch in natürlicher Grösse gethan worden. Gleichzeitig ist die Fig. 20 verkleinert darüber gezeichnet worden, um besser einen Vergleich zu ermöglichen. Es ist zu beachten, dass die den einzelnen Punkten der unteren Curve beigesetzten Zahlen die Nummer der Bewegungsphase des Ganges angeben, während die in Figur 19 eingetragenen Zahlen zu der willkürlich vorgenommenen Zerlegung der ganzen Dauer einer horizontalen Schwingung in 36 gleiche Teile gehören. Mit Ausnahme einiger geringer Unregelmässigkeiten entspricht, wie man sieht, die untere Curve in Fig. 21 in ihrer Form der Curve in Fig. 20 und besitzt viermal so geringe Dimensionen. Es ist daher durch die vorhergehenden Betrachtungen die relative Bewegung des Hüftgelenks zur Hüft-



Fig. 21.

linienmitte, und dadurch auch die Art der resultirenden Schwingung der Hüftlinie genügend mechanisch zergliedert und auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht worden.

Durch die Drehungen der Hüftlinie ist die Bewegung des Beckens während des Gehens noch nicht vollständig bestimmt. Es ist möglich, ja sogar wahrscheinlich, dass das Becken ausser den Bewegungen, welche sich in Drehungen der Hüftlinie äussern, auch noch Drehungen um die Hüftlinie ausführt. Diese letzteren lassen sich jedoch nicht direct aus unseren Messungen ableiten, da es leider versäumt worden war, ausser den beiden Punkten der Hüftlinie noch einen ausserhalb derselben liegenden, mit dem Becken starr verbundenen Punkt zu markieren und für die Messung zu verwenden, obgleich dies ausführbar zu sein scheint.

Die Drehungen der Schulterlinie.

Die Coordinaten der relativen Bewegung eines Schultergelenkmittelpunktes in Bezug auf die Schulterlinienmitte ergeben sich aus den in den Tabellen 10 und 11 niedergelegten räumlichen Coordinaten des Schultergelenkmittelpunktes einerseits und der Schulterlinienmitte andererseits durch Subtraction. Die Werthe dieser Differenzen finden sich für den rechten Schultergelenkmittelpunkt in folgender Tabelle 14 niedergelegt, welche der für die Hüftgelenke geltenden Tabelle 13 auf Seite 283 genau entspricht. Die relativen Coordinaten des linken Schultergelenkmittelpunktes unterscheiden sich von diesen wieder nur durch das Vorzeichen und sind daher nicht besonders angeführt worden.

Relative Coordinaten des rechten Schultergelenkmittelpunktes in Bezug auf den Mittelpunkt der Schulterlinie.

Tabelle 14.

Nr.	I. Versuch			II. Versuch		
	x	y	z	x	y	z
1	+ 0,56	+ 17,37	— 0,08	— 0,08	+ 17,48	+ 0,56
2	+ 0,48	+ 17,37	— 0,12	— 0,22	+ 17,43	+ 0,51
3	+ 0,37	+ 17,37	— 0,15	— 0,32	+ 17,38	+ 0,40
4	+ 0,33	+ 17,43	— 0,23	— 0,49	+ 17,37	+ 0,20
5	+ 0,21	+ 17,47	— 0,14	— 0,66	+ 17,40	— 0,05
6	+ 0,05	+ 17,43	— 0,02	— 0,83	+ 17,38	— 0,25
7	— 0,12	+ 17,33	+ 0,06	— 0,93	+ 17,39	— 0,30
8	— 0,27	+ 17,25	+ 0,05	— 0,96	+ 17,30	— 0,25
9	— 0,38	+ 17,13	— 0,02	— 0,97	+ 17,19	— 0,21
10	— 0,47	+ 17,04	— 0,10	— 0,98	+ 17,10	— 0,21
11	— 0,28	+ 16,99	— 0,17	— 0,97	+ 17,05	— 0,24
12	+ 0,02	+ 16,98	— 0,25	— 0,82	+ 17,02	— 0,25
13	+ 0,26	+ 16,97	— 0,28	— 0,35	+ 17,10	— 0,22
14	+ 0,42	+ 16,99	— 0,17	+ 0,02	+ 17,13	— 0,25
15	+ 0,64	+ 16,98	+ 0,02	+ 0,32	+ 17,13	— 0,21
16	+ 0,91	+ 17,00	+ 0,18	+ 0,49	+ 17,14	— 0,02
17	+ 1,12	+ 17,06	+ 0,28	+ 0,65	+ 17,21	+ 0,18
18	+ 1,23	+ 17,04	+ 0,25	+ 0,76	+ 17,37	+ 0,30
19	+ 1,41	+ 16,87	+ 0,21	+ 0,83	+ 17,37	+ 0,39
20	+ 1,52	+ 16,81	+ 0,21	+ 0,89	+ 17,06	+ 0,32
21	+ 1,59	+ 16,76	+ 0,23	+ 1,00	+ 16,95	+ 0,20
22	+ 1,56	+ 16,69	+ 0,24	+ 1,11	+ 16,99	+ 0,22
23	+ 1,45	+ 16,75	+ 0,19	+ 1,15	+ 16,95	+ 0,24
24	+ 1,15	+ 16,85	+ 0,28	+ 1,15	+ 16,93	+ 0,26
25	+ 0,92	+ 16,89	+ 0,31	+ 1,00	+ 17,03	+ 0,29
26	+ 0,74	+ 16,93	+ 0,26	+ 0,82	+ 17,00	+ 0,34
27	+ 0,58	+ 17,18	+ 0,14	+ 0,78	+ 17,11	+ 0,32
28	+ 0,29	+ 17,24	— 0,05	+ 0,62	+ 17,31	+ 0,17
29	— 0,05	+ 17,30	— 0,21	+ 0,36	+ 17,32	+ 0,10
30	— 0,35	+ 17,39	— 0,25	+ 0,08	+ 17,33	— 0,01
31	— 0,56	+ 17,40	— 0,18	— 0,08	+ 17,39	— 0,03

Es ist zweckmässig, bei der Schulterlinie, wie bei der Hüftlinie, Drehungen um eine horizontale, der Gangrichtung parallele Axe von solchen um eine verticale Axe zu unterscheiden. Bei den ersteren

werden die Schultergelenkmittelpunkte eine Bewegung nach oben und unten, bei den letzteren eine solche nach vorn und hinten erfahren. Da die Excursionen in diesen beiden Richtungen, trotz des weiteren Abstandes der Schultergelenke von der Mitte der Schulterlinie, nicht grösser sind, wie die entsprechenden der Hüftgelenkmittelpunkte, so werden die Aenderungen der z-Coordinate bezüglich x-Coordinate hier erst recht eine deutliche Anschauung von den Drehungen der Schulterlinie um die horizontale, bezüglich verticale Axe vermitteln.

Die Aenderungen dieser beiden Coordinaten sind nun in genau derselben Weise wie für die Hüftlinie graphisch dargestellt worden. Die Felder Nr. 3 und Nr. 11 von Tafel XIII geben ein Bild von den Erhebungen und Senkungen der Schultergelenkmittelpunkte und die Felder Nr. 4 und Nr. 12 ein solches von den Verschiebungen derselben nach vorn und hinten für die beiden ersten Versuche. Die zur rechten Körperseite gehörenden Diagramme sind wieder oben, die der linken Seite entsprechenden unten gezeichnet worden.

Die Diagramme für die Erhebungen und Senkungen der Schultergelenke (Feld Nr. 3 und Nr. 11) zeigen nicht eine so einfache Form wie bei den Hüftgelenken. Sieht man von kleinen Unregelmässigkeiten ab, so besitzen sie etwa die Gestalt einer Wellenlinie, bei welcher alternirend immer ein Wellenthal und ein Wellenberg in ihrer verticalen Ausdehnung verringert worden sind, so wie es durch Figur 22 versinnlicht wird, welche eine etwas schematisirte Reproduction des oberen Diagramms von Feld Nr. 3 der Tafel XIII ist. Aus der ursprünglichen, durch die punktierte Linie angegebenen Gestalt sieht man, dass die Schwingungsdauer genau dieselbe ist, wie bei den verticalen Schwingungen der Hüftlinie, so dass also ebenfalls auf zwei Schritte drei ganze Schwingungen kommen. Da, wie ein Vergleich mit Feld Nr. 1 der Tafel XIII lehrt, die Maxima in Figur 22 an denselben Stellen sich befinden, an welchen bei dem entsprechenden Diagramm für die Hüftlinie Minima vorhanden sind, und umgekehrt, so finden die Schwingungen der Schulterlinie um die horizontale Axe durchweg in entgegengesetzter Richtung statt, wie die entsprechenden der Hüftlinie.

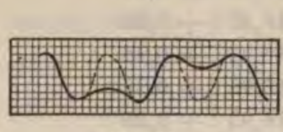


Fig. 22.

Berücksichtigt man die Lage der Maxima und Minima der Verticalprojection der Bahncurven der Schultergelenkmittelpunkte (vgl. Tafel X und XI), so findet man, dass die verticalen Schwingungen der Schulterlinie sich in folgender Weise in die Gangbewegung einreihen.

Bei dem verticalen Maximum einer Schultergelenkbahn, welches in die Periode des Schwingens des auf derselben Körperseite befindlichen Beins fällt, ist die Schulterlinie auf der betreffenden Seite am meisten gesenkt; sie erhebt sich dann etwas, kehrt aber noch bevor sich das schwingende Bein auf den Boden aufsetzt, ihre Schwingungsrichtung wieder um und erreicht von neuem ihren tiefsten Stand etwa $0\overset{s}{.}11$ nach dem Aufsetzen des Beins. Darauf erhebt sie sich nun stärker, etwa um einen dreimal so grossen Winkel wie vorher, und erreicht ihren höchsten Stand in dem Moment, für welchen die Schultergelenkbahn ihr nächstes verticales Maximum besitzt, welches nunmehr in die Periode des Aufstützens des betreffenden Beins fällt. Die Schulterlinie ist natürlich in demselben Moment auf der anderen Seite am meisten gesenkt. Da aber gleichzeitig das andere Schultergelenk in seiner Bahn das verticale Maximum besitzt, welches in die Periode der Beinschwingung dieser anderen Seite fällt, so wiederholt sich jetzt der eben geschilderte Schwingungsvorgang der Schulterlinie symmetrisch.

Es führt demnach auch die Schulterlinie während der Dauer eines einfachen Schrittes drei halbe Schwingungen um die horizontale, der Gangrichtung parallele Axe aus. Diese Schwingungen besitzen aber nicht, wie bei der Hüftlinie gleiche, sondern abwechselnd kleine und grosse Amplitude in der Weise, wie es Figur 22 veranschaulicht. Da das linke Bein von der 12. bis 23. Phase beim I. Versuch schwingt, so erkennt man aus derselben Figur, dass die Schulterlinie nur im Anfang der Schwingung eines Beines auf der Seite des aufgestützten Beines gesenkt ist, während des grössten Theiles aber auf der Seite des schwingenden Beines nach abwärts neigt.

In gleicher Weise, wie die verticalen Schwingungen der Hüftlinie die aus Tafel XII und Figur 18 auf Seite 280 ersichtlichen Abweichungen in der Gestalt der Bahncurven beider Hüftgelenkmittelpunkte erklärlich machten, geben die verticalen Schwingungen der Schulterlinie Aufschluss über die Verschiedenheiten in den Schultergelenkbahnen. In Folge der

Senkung der Schulterlinie auf der rechten Seite während des verticalen Maximums der Schultergelenkbahn bei schwingendem rechten Bein liegt der Anfang des ersten Curvenabschnittes I, 5; II, 6 rechts tiefer als links. Da die Schulterlinie auch noch beim Aufsetzen des rechten Beines rechts nach unten neigt, so geht der erste Curvenabschnitt auch rechts tiefer herunter als links (I, 11; II, 12); er erhebt sich jedoch dann auf der rechten Seite mehr als links, da bald nach dem Aufsetzen des rechten Beines die Schulterlinie rechts stark erhoben wird und sich längere Zeit nahezu auf der erreichten Höhe hält. Es ist daher im Punkte des Zusammentreffens beider Curvenabschnitte (I, 17; II, 18) die Projectionscurve auf Tafel XII und in Figur 18 rechts stärker gehoben als links. Es vertauschen von da an die rechte und linke Seite ihre Rollen, wie es ja auch bei der Hüftlinie der Fall war, und wie es bei symmetrischem Gange nicht anders sein kann.

Was nun die, durch die Diagramme in den Feldern Nr. 4 und Nr. 12 der Tafel XIII dargestellten Drehungen der Schulterlinie um die verticale Axe anlangt, so sind dieselben ziemlich genau einfache Sinusschwingungen. Die Schwingungsdauer ist dreimal so gross, wie bei den Schwingungen um die horizontale Axe, und die Amplitude der ersteren ist ca. $3\frac{1}{2}$ mal so gross als die der letzteren. Im Vergleich zu den horizontalen Schwingungen der Hüftlinie liegen die Maxima hier nahezu an derselben Stelle, wo dort die Minima lagen, und umgekehrt. Genau genommen liegt das Minimum bezüglich Maximum des Diagramms der Schulterlinie jedoch zwei Phasen, also abgerundet $0^s{,}08$ früher als das Maximum bezüglich Minimum der Hüftlinie, da die letzteren infolge der vor ihnen stattfindenden Abweichung von der einfachen Schwingungsart um etwa dieselbe Zeitstrecke verspätet sind. Es ergiebt sich daraus das Resultat, dass die Schulterlinie kurz vor dem Aufsetzen eines Beines anfängt, auf der betreffenden Seite nach vorn zu schwingen und erst kurz vor dem Aufsetzen des anderen Beines die Richtung der Schwingung umkehrt, so dass sie nun auf der anderen Seite nach vorn schwingt.

Um sich eine klare Vorstellung von den Schwingungsarten der Schulterlinie um die horizontale und die verticale Axe an der Hand der Diagramme bilden zu können, hat man nur noch zu berücksichtigen, dass der Abstand der Schulterlinienmitte von jedem der beiden Schultergelenkmittelpunkte ca. 17,5 cm beträgt.

Da die beiden Schwingungen zu gleicher Zeit stattfinden, so ist das Resultat ebenfalls ein ziemlich verwickelter Schwingungsvorgang. Um sich eine deutliche Vorstellung von demselben bilden zu können, ist es wiederum zweckmässig, die Schwingungen eines Punktes der Schulterlinie ins Auge zu fassen, welcher weiter, z. B. viermal so weit von dem Mittelpunkt der Schulterlinie entfernt ist wie der Mittelpunkt des Schultergelenks. Da die Gesamtexcursionen des letzteren in horizontaler Richtung ca. 2,1 cm und in verticaler Richtung ca. 0,6 cm betragen, so wird der betreffende Punkt der Schulterlinie auf seiner horizontalen Bahn zwischen zwei um 8,4 cm entfernten Punkten *A* und *A'* (Fig. 23) und gleichzeitig in verticaler Richtung zwischen zwei um 2,4 cm entfernten Punkten *B* und *B'* hin- und herschwingen.

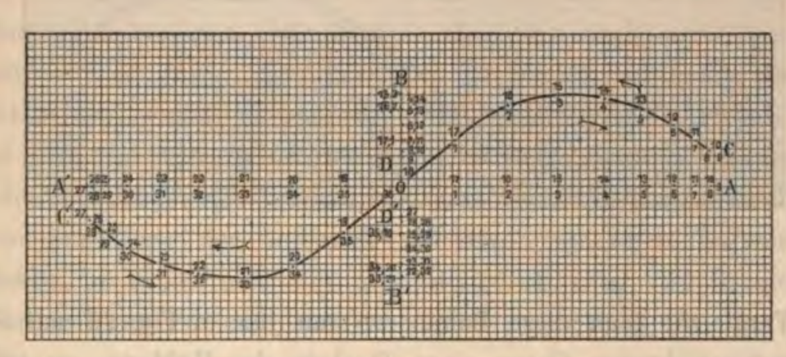


Fig. 23.

Beide Bahnen durchkreuzen sich in ihrer Mitte im Punkte *O*. Die erstere, horizontale, Schwingung findet ganz nach Art einer Sinusschwingung statt. Theilt man die ganze Schwingungsdauer wieder in 36 gleiche Theile, so befindet sich am Ende der einzelnen Zeitabschnitte der Punkt an den durch die Nummerierung von *O* aus markierten Stellen. Während nun der Punkt den Weg *OAOA'O* zurücklegt, wird er infolge der verticalen, weniger einfachen Schwingung in der verticalen Richtung etwa den Weg *OBDBOB'D'B'O* machen, wo *D* und *D'* zwei Punkte bedeuten, welche die Strecke *BB'* in drei gleiche Theile zerlegen. Aus den Diagrammen der Felder Nr. 3 und Nr. 4 der Tafel XIII ist ersichtlich, dass der Punkt nahezu gleichzeitig (vgl. Phase I, 15) bei seiner Schwingung nach vorn und bei der nach oben die Mittellage *O* passiert. Es hat daher die entsprechende Nummerierung auf der verticalen Linie der Fig. 23 ebenfalls

bei O zu beginnen. Durch Zusammensetzung beider Schwingungsarten entsteht die krummlinige Bahn $OCOC'O$. Wie man unter Hinzuziehung der Diagramme in den Feldern Nr. 11 und Nr. 12 erkennt, wird in Wirklichkeit der Punkt in seiner verticalen Bewegung noch nicht ganz die Mittellage erreicht haben, wenn er in horizontaler Bahn durch O hindurchgeht. Daher wird die krumme Bahn bei O etwas auseinandergehen in der Weise, wie es Fig. 24 versinnlicht. Die Bahn des rechten Schultergelenksmittelpunktes wird nun genau dieselbe Form besitzen, aber viermal so klein ausfallen.

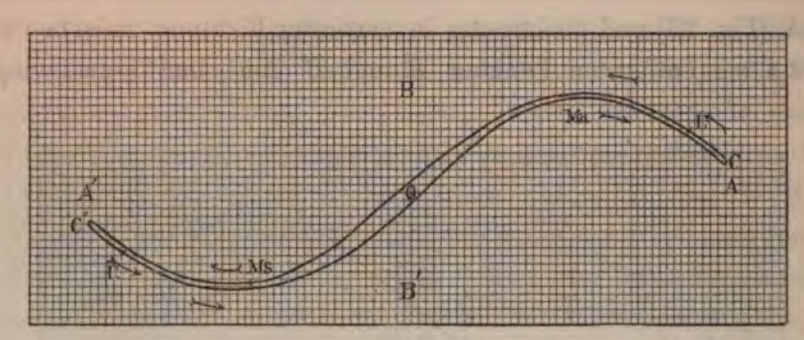


Fig. 24.

Vergleicht man diese Bahncurve mit der in Fig. 20 auf Seite 294 aufgezeichneten Curve eines Punktes der Hüftlinie, so stellen sich im Wesentlichen keine sehr grossen Unterschiede in der Form heraus. Einmal geht die Hüftlinienbahn an den Enden in den Punkten C und C' weiter nach unten und oben als die Schulterlinienbahn, und dann gehen die beiden in verschiedener Richtung durchlaufenen Theile des Curvenzugs für die Hüftlinie an den Enden, für die Schulterlinie dagegen in der Mitte etwas auseinander. Beachtet man dagegen, in welcher Weise diese Schwingungen sich dem ganzen Bewegungsvorgang anschliessen, so erkennt man ein gerade entgegengesetztes Verhalten bei beiden Linien. Um dieses deutlich zu machen, sind in den Bahncurven Fig. 20 und 24 die Stellen hervorgehoben und mit R und L bezeichnet worden, an welchen sich der Punkt der Hüftlinie, bezüglich Schulterlinie befindet in den beiden Momenten, in welchen das rechte Bein einerseits und das linke Bein andererseits auf den Fussboden aufgesetzt wird. Ausserdem sind noch diejenigen Stellen markirt worden, welche zu einem verticalen Maximum

der absoluten (nicht blos relativ zur Schulterlinienmitte genommenen) Schultergelenkbahn gehören. *Ms* bedeutet das Maximum, bei welchem das Bein der betreffenden Seite in Schwingung ist, *Ma* dasjenige, bei welchem das Bein auf dem Boden aufsteht. Aus der Lage dieser vier Punkte in den beiden Figuren erkennt man auf den ersten Blick, dass beide Bahncurven in genau entgegengesetzter Weise durchlaufen werden. Um sich ein deutliches Bild von der verwickelten Schwingung einer jeden der beiden Linien zu verschaffen, hat man sich in *O* auf der Ebene der Zeichnung auf der dem Auge abgewandten Seite ein Loth errichtet zu denken und auf diesem Loth bei Fig. 20 in der Entfernung von $4 \times 8{,}5 = 34$ cm den Hüftlinienmittelpunkt und bei Fig. 21 in der Entfernung von $4 \times 17{,}5$ cm $= 70$ cm den Schulterlinienmittelpunkt in fester Lage anzunehmen. Hüft- und Schulterlinie bewegen sich dann so, dass ihre nach rechts gerichtete Hälfte immer durch die Curve Fig. 20 bezüglich Fig. 21 hindurchgeht. Man erkennt daraus, dass die Schulterlinie sich nach hinten und oben bewegt, wenn die Hüftlinie sich vorwärts und abwärts dreht und umgekehrt. Beschreibt man die Bewegung der Hüftlinie unter Benutzung der Ausdrücke vorwärts, rückwärts, aufwärts und abwärts, so erhält man die gleichzeitige Drehung der Schulterlinie, wenn man an Stelle eines jeden dieser vier Ausdrücke den gerade entgegengesetzten verwendet.

Endlich sei noch erwähnt, dass die Amplituden der Schwingungen bei beiden Linien sehr verschieden sind, trotzdem die Dimensionen der Curven in Fig. 20 und Fig. 21 nur wenig von einander abweichen. Dies rührt daher, dass der Mittelpunkt der Schulterlinie ungefähr doppelt so weit von der Ebene der Zeichnung entfernt zu denken ist, als der der Hüftlinie. Zieht man die geringen Unterschiede in der Ausdehnung beider Curven in horizontaler und verticaler Richtung in Rücksicht, so erkennt man daraus, dass bei der Schulterlinie die Amplitude der Schwingung um die verticale Axe etwa nur $\frac{2}{5}$ und diejenige der Schwingung um die horizontale Axe ungefähr $\frac{3}{5}$ von der Amplitude der entsprechenden Hüftlinienschwingung beträgt. Dieses letztere Ergebniss besitzt nur individuellen Werth. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, dass man z. B. das Verhältniss der Amplituden der Schwingungen um die verticale Axe innerhalb gewisser Grenzen willkürlich abändern kann.

Aus den gleichzeitigen Schwingungen der Hüft- und Schulterlinie folgt nun, dass der Rumpf beim Gehen Verdrehungen um die Verbindungslinie der Hüft- und Schulterlinienmitte erfährt, deren Grösse nahezu durch die Summe der Amplituden der beiden Schwingungen um die verticale Axe gemessen wird. Ein ganz genaues Maass für die Verdrehung des Rumpfes würde diese Amplitudensumme nur dann abgeben, wenn die Rumpflinie bei allen Bewegungsphasen immer vertical gestellt bliebe. Dieses ist aber nicht der Fall. Die Rumpflinie führt vielmehr ebenfalls Schwingungen während des Gehens aus, welche nunmehr einer näheren Betrachtung unterzogen werden sollen.

Die Drehungen der Rumpflinie.

Die Drehungen der Rumpflinie sollen auf den Mittelpunkt der Hüftlinie als festes Drehungscentrum bezogen werden. Sie sind daher bekannt, wenn man die relative Bewegung der Schulterlinienmitte zu der Hüftlinienmitte festgestellt hat. Die Coordinaten dieser relativen Bewegung sind die Differenzen der für die beiden ersten Versuche in den Tabellen 10 und 11 aufgezeichneten Coordinaten der Mittelpunkte von Schulter- und Hüftlinie. Die Werthe dieser Differenzen finden sich für beide Versuche in der folgenden Tabelle niedergelegt.

Relative Coordinaten des Mittelpunktes der Schulterlinie in Bezug auf den Mittelpunkt der Hüftlinie.

Tabelle 15.

Nr.	I. Versuch			II. Versuch		
	x	y	z	x	y	z
1	— 2,72	+ 0,59	+ 45,61	— 1,04	— 0,31	+ 46,14
2	— 2,91	+ 0,36	+ 46,13	— 2,07	— 0,43	+ 45,76
3	— 2,84	+ 0,15	+ 46,71	— 2,59	— 0,43	+ 45,53
4	— 2,71	+ 0,05	+ 46,72	— 2,32	— 0,31	+ 46,29
5	— 2,34	+ 0,15	+ 46,89	— 2,27	— 0,14	+ 46,92
6	— 1,91	+ 0,27	+ 47,10	— 1,89	— 0,03	+ 47,22
7	— 1,36	+ 0,50	+ 47,45	— 1,26	+ 0,21	+ 47,27
8	— 0,91	+ 0,77	+ 47,60	— 0,97	+ 0,43	+ 47,53
9	— 0,96	+ 1,02	+ 47,18	— 0,30	+ 0,63	+ 47,95
10	— 1,35	+ 1,18	+ 46,72	+ 0,03	+ 0,78	+ 47,80
11	— 2,24	+ 1,28	+ 46,23	— 0,14	+ 0,96	+ 47,16
12	— 2,67	+ 1,22	+ 45,90	— 0,90	+ 1,10	+ 46,87
13	— 2,66	+ 0,77	+ 46,10	— 1,67	+ 0,98	+ 46,47
14	— 3,24	+ 0,29	+ 46,12	— 1,91	+ 0,78	+ 46,60
15	— 3,14	— 0,02	+ 46,35	— 2,13	+ 0,15	+ 47,11
16	— 3,52	— 0,13	+ 46,70	— 2,29	— 0,08	+ 47,35
17	— 2,81	— 0,12	+ 46,97	— 2,36	— 0,12	+ 47,03
18	— 2,58	+ 0,04	+ 47,04	— 2,43	+ 0,04	+ 47,17
19	— 2,18	+ 0,09	+ 47,11	— 2,20	— 0,05	+ 47,17
20	— 1,76	+ 0,04	+ 47,23	— 1,78	— 0,39	+ 47,24
21	— 1,42	— 0,06	+ 47,16	— 1,40	— 0,21	+ 47,51
22	— 1,38	— 0,10	+ 46,70	— 1,04	— 0,43	+ 47,53
23	— 1,68	— 0,03	+ 46,13	— 0,89	— 0,41	+ 47,10
24	— 2,48	+ 0,22	+ 45,73	— 1,00	— 0,53	+ 46,71
25	— 2,46	+ 0,58	+ 45,69	— 1,76	— 0,18	+ 46,24
26	— 2,14	+ 0,68	+ 45,65	— 1,96	+ 0,15	+ 46,09
27	— 2,96	+ 0,69	+ 45,76	— 2,00	+ 0,33	+ 46,02
28	— 3,41	+ 0,73	+ 46,37	— 2,50	+ 0,60	+ 45,79
29	— 3,90	+ 0,69	+ 46,67	— 3,09	+ 0,66	+ 46,16
30	— 3,66	+ 0,67	+ 46,89	— 3,52	+ 0,57	+ 46,76
31	— 3,36	+ 0,81	+ 47,04	— 3,30	+ 0,48	+ 47,13

Da die Rumpflinie bei ihren Bewegungen nur wenig von der verticalen Richtung abweicht, so empfiehlt es sich, Drehungen derselben um zwei horizontale Axen zu unterscheiden, von

eine die Gangrichtung besitzt, während die andere senkrecht zu der Gangebene gerichtet ist. Bei den ersteren wird die Schulterlinienmitte Bewegungen nach rechts und links, bei den letzteren solche nach vorn und hinten ausführen. Da die Amplituden beider Schwingungsarten noch geringer sind wie bei den Schwingungen der Schulter- und Hüftlinie, so wird diese Zerlegung der Drehungen der Rumpflinie zu nicht wesentlich anderen Resultaten führen, als wenn man beide durch die Hüftlinienmitte gelegte Drehungsaxen zum Rumpfe fest, die eine in sagitaler, die andere in frontaler Richtung annimmt.

Die Bewegungen der Schulterlinienmitte, welche der Drehung um die zur Gangrichtung parallelen Axe entsprechen, werden durch die Aenderungen der y-Coordinate, die anderen durch die Aenderungen der x-Coordinate dargestellt, welche sich aus der Tabelle 15 ergeben. Diese Coordinatenänderungen sind in der schon wiederholt angewendeten Weise durch Diagramme graphisch dargestellt worden, welche sich in den Feldern Nr. 5 und Nr. 6 der Tafel XIII für den I. Versuch und in den daneben befindlichen Feldern Nr. 13 und Nr. 14 für den II. Versuch aufgezeichnet finden.

Diese Diagramme zeigen an einigen Stellen Unebenheiten (vgl. z. B. Feld Nr. 6), welchen jedenfalls keine wesentliche mechanische Bedeutung zukommt, da dieselben nicht bei beiden Versuchen in übereinstimmender Weise vorkommen. Der Grund, weshalb z. B. die zur Drehung der Hüftlinie gehörenden Diagramme derartige Unebenheiten fast gar nicht oder doch in viel geringerem Maasse zeigen, mag wohl mit darin zu suchen sein, dass die Länge der Rumpflinie 5 bis 6 mal so gross ist als die der halben Hüftlinie, und dass infolgedessen kleine Unregelmässigkeiten in der Schwingung bei den Diagrammen der Rumpflinie sich 5 bis 6 mal stärker geltend machen müssen, als bei denen der Hüftlinie. Sieht man von diesen Unebenheiten ab, so lassen die Diagramme erkennen, dass die Rumpflinie um die zur Gangrichtung parallele Axe Schwingungen ausführt, welche eine ganz ähnliche Form besitzen, wie die Schwingungen der Schulterlinie um die zur Gangrichtung parallele Axe. Während zweier Schritte führt die Rumpflinie drei Schwingungen aus, welche wie bei der Schulterlinie in Bezug auf ihre Amplituden sehr ungleichwerthig sind. Es wechseln sich verhältnissmässig grosse und sehr kleine Amplituden ab. Kurz nach dem Moment des Aufsetzens des

rechten Beines ist die Rumpflinie am meisten nach rechts, nachdem das linke Bein aufgesetzt worden ist, dagegen am meisten nach links geneigt. Die Bewegung der Rumpflinie ist nicht ganz symmetrisch; dieselbe zeigt vor dem Aufsetzen des rechten Beins ein etwas anderes Verhalten, als vor dem Aufsetzen des linken Beins. Nachdem ein Bein aufgesetzt ist, schwingt die Rumpflinie der Medianebene zu und darüber hinaus. Sie schwankt dann noch während der Schwingung des anderen Beins wieder etwas zurück, kehrt aber bald wieder zu ihrer anfänglichen Bewegungsrichtung um, so dass sie nach dem Aufsetzen des anderen Beins ihre grösste Neigung nach der anderen Seite von Neuem erreicht. Die gesammte seitliche Ausweichung der Schulterlinienmitte infolge dieser Schwingungsart betrug bei beiden Versuchen nur ca. 1,5 cm.

Was nun die Schwingungen um die zur Gangebene senkrechte Axe, d. h. die Schwingungen nach vorn und hinten anlangt, so ist die Rumpflinie immer etwas vor dem Aufsetzen eines Beins am meisten nach vorn geneigt. Ihre stärkte Rückwärtsneigung findet dagegen immer etwas vor dem Moment statt, in welchem die Bahncurven der Hüft- oder Schultergelenke ein verticales Maximum besitzen; sie fällt also zeitlich noch vor die Mitte des Aufstemmens oder Schwingens eines Beins. In der letzten Hälfte des Schwingens eines Beins bewegt sich daher die Rumpflinie und damit der ganze Rumpf immer nach vorn; er fängt aber, wie schon angedeutet, noch kurz bevor das Bein auf den Boden aufgesetzt wird an, sich wieder nach rückwärts zu bewegen. Die Dauer einer Schwingung um die zur Gangebene senkrechte Axe ist gleich der Dauer eines Schrittes. Die Gesammtexcursion der Schulterlinienmitte relativ zur Hüftlinienmitte beträgt in der Gangrichtung 2,5 cm.

Um sich ein klares Bild von dem resultirenden Schwingungsvorgang zu machen, empfiehlt es sich wieder, die Schwingungen eines Punktes der Rumpflinie zusammenzusetzen, welcher weiter von der Hüftlinienmitte entfernt ist, als der Mittelpunkt der Schulterlinie. Es sei wieder ein Punkt in vierfachem Abstand ausgewählt; derselbe führt daher in beiden Schwingungsrichtungen viermal so grosse Excursionen aus als die Schulterlinienmitte. Die Gesammtexcursion BB' (Fig. 25 auf Seite 308) der Schwingung dieses Punktes senkrecht zur Gangebene (infolge der Drehung um die zur Gangrichtung parallele Axe) beträgt

dann $4 \times 1{,}5$ cm $= 6$ cm und die Amplitude AA' der Schwingung in der Gangrichtung $4 \times 2{,}5$ cm $= 10$ cm. Bei der ersten Schwingungsart legt der Punkt jedoch nicht jedesmal den ganzen Weg $\overline{BB'}$ zurück, sondern nachdem er einmal $\overline{B'B}$ durchmessen hat, kehrt er etwa nur 1 cm zurück, wendet sich dann wieder nach B und beginnt erst, nachdem er wieder in B angelangt ist, die Bewegung von B bis B' u. s. w. Theilt man den ganzen Zeitraum, welcher während zweier Schritte verfliesst, in 36 gleiche Theile, so entspricht die in Fig. 25 auf der Strecke BB' angebrachte Nummerierung ungefähr der

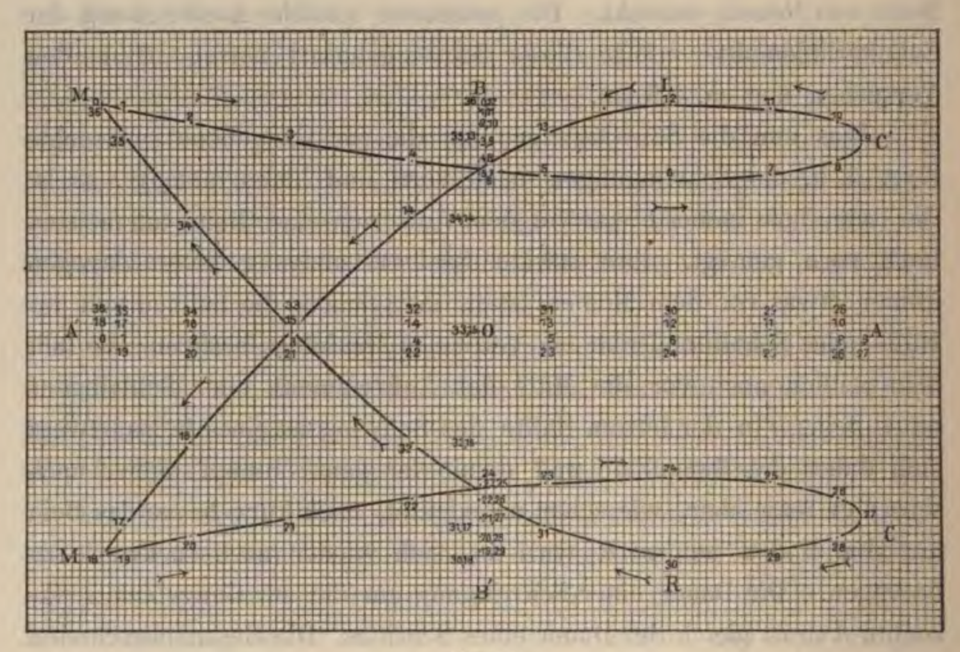


Fig. 25.

Art, wie der Punkt sich senkrecht zur Gangebene bewegt. Es kann dies natürlich nur ein Schema für die Schwingungsart in dieser Richtung sein, da in den Diagrammen Nr. 5 und Nr. 13 keine vollständige Symmetrie zu finden ist. Während derselben Zeit schwingt nun der Punkt in der Richtung $\overline{AA'}$ ziemlich regelmässig zweimal hin und her. Dem entspricht die Nummerierung in der Fig. 25 längs AA'. Es entsprechen sich, wie man aus den Diagrammen deutlich erkennen kann, der Moment, in welchem der Punkt auf der einen Linie in B angekommen ist und die kleinere Strecke zurückzuschwingen beginnt

einerseits, und der Moment, in welchem der Punkt in A' angekommen ist und nun im Begriff steht nach A zurückzuschwingen andererseits. Daher ist von diesen beiden Stellen aus die Nummerierung begonnen worden.

Daraus ergiebt sich dann die in Fig. 25 eingetragene krumme Bahn für den betreffenden Punkt der Rumpflinie. Die in die Bahn eingezeichneten Punkte R, L und M bezeichnen die Stellen, an welchen sich der Punkt der Rumpflinie auf seiner zur Hüftlinienmitte relativen Bahn befindet in den Momenten, wo das rechte Bein (R) und das linke Bein (L) aufgesetzt wird, und in denen ferner die Hüft- und Schultergelenke auf ihren absoluten Bahncurven durch ein verticales Maximum (M) hindurchgehen.

Die Bahn der Schulterlinienmitte relativ zum Mittelpunkt der Hüftlinie besitzt dieselbe Form, wie die Curve in Fig. 25, sie ist nur nach allen Richtungen viermal kleiner.

Um sich an der Hand der Fig. 25 eine Vorstellung von den Drehungen der Rumpflinie um die Hüftlinienmitte zu bilden, braucht man nur auf dem durch den Punkt O nach hinten gehenden Lothe auf der Ebene der Zeichnung in der Entfernung von ca. 4×48 cm $= 192$ cm den Mittelpunkt der Hüftlinie angebracht und die über die Schulterlinienmitte hinaus verlängerte Rumpflinie durch die Curve von Fig. 25 bei ihrer Bewegung geführt zu denken.

Wie man die Abweichungen in den Bahncurven der beiden Hüftgelenkmittelpunkte bezüglich der beiden Schultergelenkmittelpunkte durch die Drehungen der Hüftlinie bezüglich Schulterlinie um ihren Mittelpunkt erklären konnte, so werden die Unterschiede in der Gestalt der Bahncurven von Schulterlinienmitte und Hüftlinienmitte (vgl. Fig. 18) durch die Schwingungen der Rumpflinie um den Mittelpunkt der Hüftlinie verständlich. Im Moment des Aufsetzens des rechten Beines ist die Rumpflinie am meisten nach der rechten Seite geneigt. Da dieser Moment nahezu in beiden Curven dem Minimum des ertens Curvenabschnittes entspricht, so erklärt sich, dass dieses Minimum in der Projection der Schultercurven weiter nach rechts fällt als in der der Hüftcurven. Das Entsprechende gilt für die linke Seite. Bei dem auf das Aufsetzen des rechten Beins folgenden verticalen Maximum der einzelnen Bahncurven ist die Rumpflinie schon nach links geneigt, wie aus Fig. 25 hervorgeht. Daher liegt der Punkt der

Curven von Fig. 18 auf Seite 280 und Taf. XII, in welchem der erste Abschnitt beginnt und auch der Punkt, in welchem die beiden Abschnitte zusammenstossen, in der Bahnprojection der Schulterlinienmitte mehr nach der Mitte zu, als in der Projection der Bahn von der Hüftlinienmitte. Da das auf beiden Seiten stattfindet, so gehen die Schultercurven oben etwas mehr zusammen als die Hüftcurven. Da nun auf dem grösseren Theil des Weges von *R* nach *M* die Rumpflinie nach rechts und für die darauf folgende bis *L* reichende Wegstrecke nur nach links geneigt ist, so erklärt sich, dass der aufsteigende Ast des ersten und der absteigende Ast des zweiten Curvenabschnittes bei der Schultercurve in der Weise auseinandergedrängt sind, wie es in Fig. 18 oder auf Taf. XII zu sehen ist. Eine weitere Folge davon ist, dass die beiden Punkte *R* und *L* bei der Hüftcurve weiter auseinander liegen als bei der Schultercurve u. s. w.

Die Drehungen des Kopfes.

Auch der Kopf wird während des Gehens nicht ganz fest auf dem Rumpfe sitzen, sondern geringe Schwankungen nach der Seite und nach vorn und hinten ausführen. Die Bewegung desselben gegen den Rumpf wird theils durch Drehung im Gelenk zwischen Hinterhaupt und Atlas, theils durch solche im Gelenk zwischen Atlas und Epistropheus, theils endlich durch Verbiegungen der Halswirbelsäule hervorgerufen. Sie lässt sich streng genommen nicht als einfache Drehung um ein zum Rumpfe festes Drehcentrum auffassen. Es würde sich aber die Mühe nicht lohnen, welche aufgewendet werden müsste, um die wechselnde Lage des Drehcentrums und der instantanen Drehungsaxe in dem vorliegenden Falle zu bestimmen; denn die Schwankungen des Kopfes auf dem Rumpfe kommen für die Gehbewegungen noch viel mehr erst in zweiter Linie in Betracht, als z. B. die Pendelbewegungen der Arme. Beide Bewegungsarten sind für die Fortbewegung des menschlichen Körpers nicht unbedingt erforderlich. Sie lassen sich daher ohne wesentliche Störung des

Ganges unterdrücken. Lässt man ihnen freien Lauf, so fügen sich aber auch die zum Rumpfe relativen Bewegungen des Kopfes wie die der Arme in bestimmter Weise den Bewegungen der Beine und des Rumpfes an. Es wird bei bestimmten Bewegungsphasen der Kopf sich nach vorn senken, bei anderen wird er am meisten nach rechts oder links geneigt sein u. s. w. Die Frage, wann dies geschieht, und ähnliche auf die Bewegungsrichtung und deren Wechsel gerichtete lassen sich in ebenso genügender Weise beantworten, wenn man die vereinfachende Annahme macht, dass sich der Kopf um einen im oberen Theile des Rumpfes befindlichen festen Punkt dreht, als wenn man der Wanderung des Drehcentrums Rechnung tragen wollte. Bei unserer Anordnung des Versuches kann man ja so wie so nur einen ungefähren Ueberblick über die Bewegung des Kopfes zum Rumpfe erhalten, da für eine strenge Analyse derselben die Messung der Coordinaten des Kopfscheitelpunktes nicht ausreichen würde.

Aus Gründen der bequemeren Ableitung soll der Drehungspunkt des Kopfes in die Mitte der Schulterlinie verlegt sein. Die Drehungen um die sagitale und frontale Axe durch diesen Punkt können dann durch die Bewegungen der Verbindungslinie von Schulterlinienmitte und Kopfscheitelpunkt, welche kurz als »Kopflinie« bezeichnet sein soll, gemessen werden, natürlich abgesehen von den Drehungen des Kopfes um diese Linie selbst.

Die Drehungen der Kopflinie um den Mittelpunkt der Schulterlinie lassen sich durch die relative Bewegung des Kopfscheitelpunktes zu der Schulterlinienmitte veranschaulichen. Die Coordinaten dieser relativen Bewegung stellen sich als die Differenzen der in den Tabellen 10 und 11 niedergelegten Coordinaten des Kopfscheitelpunktes und der Schulterlinienmitte dar. Dadurch erhält man jedoch noch nicht die relativen Drehungen der Kopflinie zum Rumpfe allein. Würde der Kopf zum Rumpfe festgestellt sein, so würde man auf diesem Wege trotzdem eine relative Bewegung des Kopfscheitelpunktes zur Schulterlinienmitte erhalten, und infolge dessen auf eine Drehung der Kopflinie zu schliessen haben. Letztere würde aber nichts anderes sein, als die Drehung der Rumpflinie, denn man könnte dann die Kopflinie einfach als Verlängerung der Rumpflinie auffassen. Dies würde auch daraus zu erkennen sein, dass die Diagramme, welche

die relative Bewegung des Kopfscheitelpunktes zur Schulterlinienmitte darstellen, genau dieselbe Form besässen, wie die Diagramme für die Rumpflinie in den Feldern Nr. 5, 6, 13 und 14 der Taf. XIII. Ein Unterschied würde sich nur insofern herausstellen, als die Ordinaten der Diagramme in demselben Verhältniss verkleinert erschienen, als die Entfernung des Kopfscheitelpunktes von der Schulterlinienmitte kleiner ist, als die Entfernung der letzteren von der Rumpflinienmitte. Dieses Verhältniss besitzt den Werth 0,7.

Will man nun die relative Drehung der Kopflinie zum Rumpfe erhalten, so hat man von der auf obigem Wege erhaltenen Drehung der Kopflinie diejenige der Rumpflinie abzuziehen. In Anbetracht der kleinen Amplituden der in Frage kommenden Drehungen erhält man dementsprechend mit genügender Genauigkeit die Coordinaten der relativen Bewegung des Kopfscheitelpunktes zum ganzen Rumpfe (nicht allein zur Schulterlinienmitte), indem man von den Differenzen der Coordinaten des Kopfscheitelpunktes und der Schulterlinienmitte die im Verhältniss 0,7 verkleinerten, in Tabelle 15 auf Seite 305 niedergelegten Differenzen der Coordinaten der Schulter- und Rumpflinienmitte abzieht. Dies ist für die beiden in Frage kommenden Coordinaten, für die x- und y-Coordinaten ausgeführt worden. Die Resultate dieser Rechnung finden sich in der folgenden Tabelle 16 für den I. und II. Versuch niedergelegt.

Relative Coordinaten des Kopfscheitelpunktes in Bezug auf den Rumpf.

Tabelle 16.

Nr.	I. Versuch		II. Versuch	
	x	y	x	y
1	+ 3,98	— 0,37	— 0,43	+ 0,38
2	+ 4,83	— 0,26	+ 0,57	+ 0,25
3	+ 5,19	— 0,07	+ 1,53	+ 0,20
4	+ 5,28	+ 0,12	+ 1,86	+ 0,18
5	+ 5,09	+ 0,06	+ 2,21	+ 0,20
6	+ 4,83	+ 0,11	+ 2,23	+ 0,43
7	+ 4,45	— 0,07	+ 2,03	+ 0,44
8	+ 4,05	— 0,28	+ 2,02	+ 0,36
9	+ 3,90	— 0,48	+ 1,71	+ 0,26
10	+ 3,92	— 0,70	+ 1,49	+ 0,14
11	+ 4,01	— 1,09	+ 1,49	— 0,05
12	+ 3,46	— 1,15	+ 1,97	— 0,37
13	+ 2,80	— 0,73	+ 2,29	— 0,47
14	+ 3,21	— 0,24	+ 2,02	— 0,38
15	+ 3,27	0	+ 2,26	+ 0,16
16	+ 3,48	+ 0,04	+ 2,72	+ 0,34
17	+ 3,02	— 0,04	+ 2,91	+ 0,29
18	+ 3,07	— 0,21	+ 3,04	— 0,08
19	+ 3,01	— 0,27	+ 2,90	+ 0,01
20	+ 2,96	— 0,10	+ 2,66	+ 0,51
21	+ 2,82	+ 0,04	+ 2,40	+ 0,28
22	+ 2,79	+ 0,14	+ 2,03	+ 0,56
23	+ 2,93	+ 0,07	+ 1,69	+ 0,56
24	+ 3,25	— 0,16	+ 1,52	+ 0,75
25	+ 2,54	— 0,50	+ 1,76	+ 0,49
26	+ 1,81	— 0,79	+ 1,28	+ 0,21
27	+ 2,91	— 0,77	+ 0,81	— 0,12
28	+ 4,07	— 0,77	+ 1,47	— 0,59
29	+ 5,09	— 0,65	+ 2,53	— 0,72
30	+ 5,18	— 0,40	+ 3,39	— 0,51
31	+ 5,25	— 0,21	+ 3,47	— 0,20

Die sich aus Tabelle 16 ergebenden Diagramme für die Drehungen der Kopflinie sind in genau derselben Weise wie die Diagramme der Rumpflinie auf Tafel XIII in den Feldern Nr. 7 und Nr. 8 für den I. Versuch und Nr. 15 und Nr. 16 für den II. Versuch aufgezeichnet worden. Man

sieht es diesen Diagrammen an, dass sie kein genaues Bild der Kopfbewegungen abgeben, was nach dem oben Gesagten verständlich ist. Immerhin lassen sie doch die Art der Kopfschwankungen erkennen. Ein Vergleich mit den entsprechenden Diagrammen für die Rumpflinie lehrt, dass sowohl in frontaler als in sagitaler Richtung der Kopfscheitelpunkt in Bezug auf die Schulterlinienmitte sich fast genau in entgegengesetzter Weise bewegt als die Schulterlinienmitte relativ zur Hüftlinienmitte. Es führt also die Kopflinie Drehungen um die sagitale und frontale Axe aus, welche in jedem Moment in entgegengesetzter Richtung stattfinden als die entsprechenden Drehungen der Rumpflinie. Man braucht sich infolge dessen die Fig. 25 auf Seite 308 nur durch 180° um eine zur Ebene der Zeichnung senkrechte Axe herumgedreht zu denken, um einen Ueberblick über die Art der aus beiden Schwingungen resultierenden Drehung der Kopflinie zu erhalten.

Der Gang des belasteten Menschen.

Um festzustellen, in welcher Weise der Bewegungsvorgang beim Gehen durch eine getragene Last beeinflusst wird, hatten wir beim letzten der für die Messung herausgegriffenen Versuche, welcher als III. Versuch bezeichnet worden ist, das Versuchsindividuum mit der feldmarschmässigen Ausrüstung des deutschen Infanteristen versehen. Wir wählten das Militärgepäck hauptsächlich aus dem Grunde, weil es diejenige Last darstellt, mit welcher die meisten gesunden und kräftigen Männer einmal in ihrem Leben für kürzere oder längere Zeit grosse Wegstrecken zurückzulegen haben. Die räumlichen Coordinaten dieses Versuchs finden sich in Tabelle 12 auf den Seiten 262 und 263 niedergelegt.

Es sollen nun in erster Linie diejenigen Unterschiede hervorgehoben werden, welche sich beim Gang des belasteten Menschen gegenüber dem des unbelasteten in Bezug auf die Bewegungsbahnen des Kopfscheitelpunktes, der Schulterpunkte und der Hüftpunkte einerseits und in Bezug auf die Drehungen der Hüft-, Schulter-, Rumpf- und Kopflinie andererseits einstellen.

Was zunächst die Bahncurven der sieben schon früher herausgegriffenen Punkte des Kopfes und Rumpfes anlangt, so sind dieselben auf Tafel XIV in derselben Weise wie für den I. und II. Versuch auf Tafel XII in ihrer Projection auf eine zur Gangrichtung senkrechte Ebene in natürlicher Grösse aufgezeichnet worden. Dadurch ist man in den Stand gesetzt, mit einem Blicke die charakteristischen Abweichungen zu erkennen, welche diese Bahncurven beim belasteten Menschen im Vergleich zu dem Falle des unbelasteten Menschen aufweisen. Diese bestehen im Wesentlichen darin, dass die Curven in horizontaler Richtung weiter auseinander gezogen erscheinen. Die Höhe derselben ist dagegen nicht wesentlich verändert. Die Verbreiterung der Curven weist darauf hin, dass der belastete Mensch grössere seitliche Schwankungen des ganzen Oberkörpers ausführt als der unbelastete.

Die Curven auf Tafel XIV sind in einer Hinsicht viel weniger regelmässig als die auf Tafel XII. Während die zum Kopfscheitelpunkte gehörende nahezu in sich zurückkehrt, liegt das Ende der anderen Curven durchweg nach links von dem Anfange und zwar am meisten bei den Hüftcurven. Daraus kann man nun aber nicht eine Unregelmässigkeit des Ganges ableiten. Diese Thatsache rührt daher, dass bei der Drehung des Coordinatensystems, welche die XZ-Ebene der Gangebene parallel richten sollte, die Richtung der Axe der Kopfscheitelbahn als massgebend verwendet worden ist. Aus den Curven der Tafel XIV geht aber hervor, dass die Axe der Wellenbahn des Kopfpunktes nicht genau dieselbe Richtung besessen hat, wie die Axen der Bahncurven der Schulter- und Hüftpunkte. Hieraus ist aber wiederum der Schluss zu ziehen, dass der Rumpf mit dem Kopf am Ende des für die Messung herausgegriffenen Abschnittes der Gangbewegung eine etwas mehr nach rechts geneigte Stellung besessen hat, als zu Anfang desselben. Hätte man dies vorausgewusst, so wäre es richtiger gewesen, die Richtung der X-Axe mit der Richtung der Axe von der Wellenbahn der Hüftlinienmitte durch entsprechende Drehung des Coordinatensystems in Uebereinstimmung zu bringen.

Sieht man von den hierdurch bedingten Unregelmässigkeiten und ausserdem von der Verbreiterung der Curven auf Tafel XIV ab, so erkennt man, dass im Uebrigen fast nichts durch die Belastung an der Gestalt der Curven, an der Lage der Maxima und Minima u. s. w.

geändert worden ist. Man hat nur dabei zu berücksichtigen, dass beim III. Versuch das rechte Bein in der Phase Nr. 9 und das linke in der Phase Nr. 22, also je eine Phase früher wie beim ersten Versuche auf den Boden aufgesetzt worden ist.

Einen weiteren, nicht aus den Curven auf den Tafeln XII und XIV zu ersehenden Unterschied zwischen den beiden ersten Versuchen einerseits und dem dritten Versuche andererseits, erkennt man, wenn man die Schrittlänge aufsucht. Dieselbe ergiebt sich z. B. als Differenz der x-Coordinaten für die Lage des rechten I. Fussgelenks im Moment des Aufsetzens des rechten Beines und die Lage des linken I. Fussgelenks in dem früheren Moment, welcher dem Aufsetzen des linken Beines entspricht. Man erhält sie auch, wenn man die Differenz der x-Coordinaten irgend eines Gelenkes halbirt, welche zwei um die Dauer zweier Schritte auseinander liegenden Momenten entsprechen. Beim I. Versuch ergiebt sich auf diese Weise eine Schrittlänge von abgerundet 78 cm, beim II. Versuch eine solche von abgerundet 77 cm, sodass dem Gange unseres Versuchsindividuums im unbelasteten Zustande eine Schrittlänge von durchschnittlich 77,5 cm entsprach. Als Schrittlänge beim III. Versuch erhält man dagegen nur 72 cm. Hieraus folgt, dass die Wellenbahnen des Kopfscheitelpunktes, der Schulterpunkte und Hüftpunkte beim III. Versuch nicht nur breiter, sondern auch kürzer ausfallen als bei den beiden ersten Versuchen. Eine weitere Folge davon ist, dass diese Bahnen für den belasteten Zustand des Menschen an jeder Stelle eine etwas grössere Krümmung zeigen müssen.

Was nun weiterhin die Drehungen der vier als Hüft-, Schulter-, Rumpf- und Kopflinie bezeichneten Strecken im menschlichen Körper anlangt, so kann man sich am besten eine Anschauung von den Abweichungen verschaffen, welche der III. Versuch gegenüber den beiden ersten aufweist, wenn man in genau derselben Weise wie früher die Diagramme aufzeichnet, welche die beim III. Versuch auftretenden Schwingungen je eines Endpunktes dieser vier Linien graphisch darstellen. Die Ordinaten für diese Diagramme ergeben sich mittelst ganz entsprechender Rechnung wie für die ersten Versuche aus den räumlichen Coordinaten der Tabelle 12.

Die Resultate dieser Rechnung finden sich in folgender Tabelle 17 niedergelegt.

Die sich aus dem III. Versuch ergebenden relativen Coordinaten des einen Endpunktes in Bezug auf den Mittelpunkt oder anderen Endpunkt für die

Tabelle 17.

Nr.	Hüftlinie			Schulterlinie			Rumpflinie			Kopflinie	
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y
1	− 0,81	+ 8,45	+ 0,39	− 0,55	+ 16,83	− 0,66	+ 3,43	+ 2,22	+ 47,24	+ 0,82	− 2,11
2	− 0,70	+ 8,45	+ 0,65	− 0,49	+ 16,86	− 0,65	+ 3,99	+ 2,01	+ 47,33	+ 0,56	− 1,89
3	− 0,56	+ 8,45	+ 0,81	− 0,46	+ 16,90	− 0,59	+ 4,54	+ 1,89	+ 47,51	+ 0,31	− 1,72
4	− 0,41	+ 8,44	+ 0,90	− 0,41	+ 16,87	− 0,49	+ 4,98	+ 1,83	+ 47,45	+ 0,11	− 1,61
5	− 0,33	+ 8,45	+ 0,87	− 0,38	+ 16,89	− 0,40	+ 5,51	+ 1,74	+ 47,47	+ 0,03	− 1,52
6	− 0,19	+ 8,47	+ 0,77	− 0,36	+ 16,90	− 0,29	+ 5,89	+ 1,99	+ 47,60	+ 0,05	− 1,87
7	− 0,05	+ 8,48	+ 0,66	− 0,33	+ 16,85	− 0,23	+ 6,13	+ 2,01	+ 47,59	− 0,11	− 1,81
8	+ 0,07	+ 8,48	+ 0,61	− 0,22	+ 16,75	− 0,21	+ 6,34	+ 2,10	+ 47,25	− 0,50	− 1,80
9	+ 0,14	+ 8,48	+ 0,59	− 0,01	+ 16,76	− 0,21	+ 6,08	+ 2,23	+ 47,01	− 0,58	− 2,14
10	+ 0,16	+ 8,47	+ 0,68	+ 0,18	+ 16,79	− 0,23	+ 5,43	+ 1,89	+ 46,76	− 0,58	− 2,02
11	+ 0,16	+ 8,45	+ 0,86	+ 0,41	+ 16,75	− 0,28	+ 4,48	+ 1,53	+ 46,63	− 0,24	− 2,06
12	+ 0,07	+ 8,44	+ 1,01	+ 0,50	+ 16,66	− 0,08	+ 3,96	+ 1,13	+ 47,12	+ 0,17	− 2,09
13	− 0,11	+ 8,44	+ 1,01	+ 0,65	+ 16,65	0	+ 3,45	+ 0,84	+ 47,28	+ 0,52	− 2,03
14	− 0,29	+ 8,45	+ 0,85	+ 0,81	+ 16,66	+ 0,05	+ 3,17	+ 0,85	+ 47,42	+ 1,03	− 2,14
15	− 0,42	+ 8,45	+ 0,75	+ 0,91	+ 16,57	+ 0,18	+ 3,02	+ 0,86	+ 47,41	+ 1,42	− 2,07
16	− 0,48	+ 8,46	+ 0,61	+ 0,95	+ 16,54	+ 0,25	+ 2,96	+ 0,99	+ 47,46	+ 1,58	− 2,15
17	− 0,50	+ 8,47	+ 0,55	+ 0,98	+ 16,47	+ 0,17	+ 2,94	+ 1,22	+ 47,46	+ 1,55	− 2,24
18	− 0,50	+ 8,46	+ 0,58	+ 1,04	+ 16,42	+ 0,37	+ 3,30	+ 1,32	+ 47,12	+ 1,24	− 2,32
19	− 0,44	+ 8,46	+ 0,67	+ 1,15	+ 16,36	+ 0,33	+ 3,66	+ 1,33	+ 47,18	+ 0,80	− 2,37
20	− 0,53	+ 8,44	+ 0,81	+ 1,21	+ 16,33	+ 0,29	+ 3,76	+ 1,41	+ 47,15	+ 0,41	− 2,29
21	− 0,64	+ 8,43	+ 0,92	+ 1,25	+ 16,36	+ 0,28	+ 3,69	+ 1,38	+ 46,94	+ 0,15	− 2,18
22	− 0,67	+ 8,43	+ 0,89	+ 1,24	+ 16,43	+ 0,23	+ 3,21	+ 1,67	+ 46,58	+ 0,16	− 2,29
23	− 0,66	+ 8,44	+ 0,78	+ 1,10	+ 16,42	+ 0,02	+ 2,41	+ 2,01	+ 46,27	+ 0,54	− 2,39
24	− 0,63	+ 8,45	+ 0,65	+ 1,02	+ 16,47	− 0,24	+ 1,78	+ 2,54	+ 46,37	+ 0,70	− 2,72
25	− 0,58	+ 8,46	+ 0,54	+ 0,94	+ 16,62	− 0,42	+ 1,49	+ 2,70	+ 46,53	+ 0,75	− 2,70
26	− 0,53	+ 8,47	+ 0,53	+ 0,75	+ 16,68	− 0,56	+ 1,16	+ 2,94	+ 46,88	+ 1,02	− 2,92
27	− 0,44	+ 8,46	+ 0,67	+ 0,54	+ 16,85	− 0,64	+ 1,21	+ 2,77	+ 46,99	+ 1,07	− 2,59
28	− 0,34	+ 8,43	+ 0,78	+ 0,37	+ 16,72	− 0,61	+ 1,45	+ 2,61	+ 47,25	+ 0,80	− 2,14
29	− 0,29	+ 8,45	+ 0,86	+ 0,29	+ 16,70	− 0,49	+ 1,82	+ 2,48	+ 47,49	+ 0,41	− 1,82
30	− 0,20	+ 8,45	+ 0,94	+ 0,17	+ 16,69	− 0,41	+ 2,36	+ 2,38	+ 47,45	+ 0,08	− 1,67
31	− 0,16	+ 8,45	+ 0,94	+ 0,05	+ 16,59	− 0,26	+ 3,03	+ 2,30	+ 47,32	− 0,31	− 1,48

Die aus dieser Tabelle hervorgehenden Diagramme finden sich neben den ihnen entsprechenden der beiden ersten Versuche auf Tafel XIII, in den Feldern Nr. 17 bis Nr. 24, aufgezeichnet. Aus ihnen ist Folgendes zu erkennen:

Die Schwingungen der Hüftlinie um die zur Gangrichtung parallele Axe finden im belasteten Zustande (vgl. Feld Nr. 17) in genau derselben Weise statt, wie im unbelasteten.

Dagegen besitzen die Schwingungen der Hüftlinie um die verticale Axe (vgl. Feld Nr. 18) beim Gange des belasteten Menschen geringere Amplitude wie bei dem des unbelasteten Menschen. Die Art der Schwingung ist indess dieselbe geblieben. Die Hüftlinie ist auch hier auf jeder Seite am meisten nach vorn gedreht kurz nach dem Moment, in welchem das Bein der betreffenden Seite sich auf dem Boden aufsetzt. Denn dies findet für das rechte Bein in der 9ten, für das linke in der 22ten der beim III. Versuch zur Messung herausgegriffenen 31 Phasen statt. Die Verkürzung der Schwingungsamplitude erklärt sich bei unserer Art der Belastung des Versuchsindividuums leicht aus dem Umstande, dass durch das Koppel, an welchem die mit scharfen Patronen gefüllten drei Patronentaschen befestigt sind, die Drehungen des Beckens um die verticale Axe gehindert werden müssen. Ob bei jeder beliebigen Art der Belastung eine Verringerung der Schwingungsweite in horizontaler Schwingungsebene sich einstellt, lässt sich aus unseren Versuchen nicht allgemein entscheiden.

Was nun die Schwingungen der Schulterlinie anlangt, so lässt sich voraussagen, dass dieselben infolge der einseitigen Schulterbelastung mit dem Gewehr einseitig ausfallen müssen. Die Diagramme in den Feldern Nr. 19 und Nr. 20 zeigen denn auch in der That eine starke Einseitigkeit. Hiervon abgesehen ist dagegen die Form der Schwingung dieselbe wie bei den beiden ersten Versuchen. Man kann sich beispielsweise das Diagramm in Nr. 19 auf dieselbe Weise aus der Form einer regelmässigen Sinuslinie abgeleitet denken, wie dies früher in Fig. 22 für die entsprechenden Diagramme in Nr. 3 und Nr. 11 geschehen ist. Die beifolgende Fig. 26 lässt dies deutlich erkennen. Die Einseitigkeit der Schwingung um die der Gangrichtung parallele Axe besteht nun darin, dass eine deutliche Tendenz vorhanden ist, die Hüftlinie auf der rechten Seite abnorm zu heben oder, was auf dasselbe hinauskommt, das linke Ende der Hüftlinie zu senken. Dies wird durch die fortwährend auf der linken Schulter aufgelegte Last des Gewehres erklärlich. Nur in dem Moment des Aufsetzens des

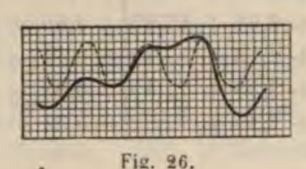


Fig. 26.

linken Beines (Phase Nr. 22) wird die Hüftlinie rechts sehr schnell gesenkt, also links ebenso schnell erhoben. Diese Erhebung auf der linken Seite bleibt jedoch nicht lange bestehen. Nachdem das linke Bein die Stellung passirt hat, in welcher das linke Hüftgelenk sich senkrecht über dem linken Fussgelenk befindet, beginnt wieder die Erhebung auf der rechten, d. h. also die Senkung auf der linken Seite. Neben dieser, gegenüber den beiden ersten Versuchen neu hinzutretenden, einseitigen, allmählichen Senkung, und beim Auftreten des linken Beines stattfindenden schnellen Erhebung auf der linken Seite, führt die Schulterlinie beim III. Versuch, wie bei den früheren, ihre schon beschriebenen Schwingungen von abwechselnd kleiner und grosser Amplitude aus.

Ein ganz entsprechendes einseitiges Verhalten wie die Schwingungen um die Axe in der Gangrichtung zeigen die Schwingungen um die verticale Axe (Feld Nr. 20). Während bei jenen eine Tendenz zur Senkung auf der linken Seite vorhanden war, zeigt sich bei diesen eine allerdings etwas weniger ausgesprochene Tendenz, die rechte Seite der Schulterlinie nach vorn zu nehmen, d. h. also die linke Seite nach rückwärts zu drehen. Dies wird dadurch verständlich, dass das Gewehr, welches mit der rechten Hand festgehalten wird, und dessen Schwerpunkt zwischen Hand und Schulter liegt, auch einen Druck auf die Schulter in der Richtung von vorn nach hinten ausübt.

Die Schwingungen der Rumpflinie haben sich durch die Belastung im Grossen und Ganzen wenig geändert, wie man aus den Diagrammen in den Feldern Nr. 21 und Nr. 22 der Tafel XIII erkennt. Einerseits hat sich bei den Drehungen um die zur Gangrichtung parallele Axe die Amplitude vergrössert. Andererseits findet die Drehung um die zur Gangebene senkrechte Axe, das abwechselnde Neigen des Rumpfes nach vorn und hinten, in etwas einseitiger Weise statt: vor dem Aufsetzen des linken Fusses geht die Rumpflinie mit ihrem oberen Ende nicht so weit nach vorn, als vor dem Aufsetzen des rechten Fusses.

Ueber die Drehungen der Kopflinie gegen den Rumpf ist endlich nur zu sagen, dass dieselben auch beim Gang des belasteten Menschen, wenigstens der Form nach, nahezu in entgegengesetzter Weise stattfinden als die Drehungen der Rumpflinie. Es geht dies aus den Diagrammen Nr. 23 und Nr. 24 der Tafel XIII hervor.

Man darf nun nicht etwa die Resultate, welche für den III. Versuch bis jetzt abgeleitet sind, ohne Weiteres auf jeden beliebigen Fall des Ganges mit irgend welcher Belastung übertragen. Dieselben haben zunächst ihre volle Gültigkeit nur bei Belastung durch das Militärgepäck. Da diese Last infolge des auf der Schulter getragenen Gewehres etwas einseitig ist, so zeigen sich auch in den Bewegungen des Rumpfes, insbesondere der Schultern, Asymmetrieen. Letztere würden jedenfalls nicht vorhanden sein, wenn man die Last ganz symmetrisch vertheilen könnte, z. B. dadurch, dass man von einem Soldaten zwei Gewehre gleichmässig auf beiden Schultern tragen liesse.

Eine andere, merkliche Abweichung von dem Gange des unbelasteten Menschen zeigte sich beim III. Versuch in den Schwingungen der Hüftlinie um die verticale Axe. Auch dieses Resultat braucht nicht für jede andere Art der Belastung gültig zu sein, da die Verringerung der Schwankung der Hüftlinie nach vorn und hinten jedenfalls mit der Lage des durch Patronentaschen beschwerten Leibriemens in Verbindung gebracht werden konnte.

Es dürften demnach von den bisher behandelten Einzelheiten der Gehbewegung nur die Abweichungen eine allgemeinere Bedeutung besitzen, welche in der Ausdehnung der Bahncurven der Kopf-, Schulter- und Hüftpunkte in der zur Gangebene senkrechten Richtung und in der Gangrichtung bestehen. Die hauptsächlichsten Unterschiede des Ganges vom belasteten und des Ganges vom unbelasteten Menschen werden sich jedenfalls erst herausstellen, wenn man auf die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Rücksicht nimmt, mit welchen die einzelnen Gelenkmittelpunkte u. s. w. ihre Bahn durchlaufen.

Dies wird in einer späteren Arbeit geschehen.

Schlussbemerkung.

Die wenigen angeführten Beispiele lassen zur Genüge erkennen, dass die neue Methode, einen Bewegungsvorgang mittelst zweiseitiger chronophotographischer Aufnahme auf ein räumliches Coordinatensystem zu beziehen, ein brauchbares Hülfsmittel für die Analyse der Bewegungen des menschlichen und thierischen Körpers darstellt. Dieselbe dürfte geeignet sein, bei der Untersuchung der Bewegungs-

vorgänge an Körpern eine ähnliche Rolle zu spielen, wie das Mikroskop bei der Untersuchung der Formen und Zusammensetzung der Körper. Wie jede Verbesserung des Mikroskops einen Fortschritt in der Erkennung des Aufbaues der einzelnen Organismen nach sich ziehen musste, so wird es auch nicht ausbleiben, dass eine jede Verbesserung der von uns angewandten Methode der Registrierung von Bewegungsvorgängen unsere Kenntniss der Bewegungsgesetze, welche die Organismen befolgen, erweitert.

Die Methode ist aber ohne Zweifel noch verbesserungsfähig. Wir haben keineswegs die Grenze der Genauigkeit erreicht, bis zu welcher man bei der Beziehung der Bewegungsvorgänge auf ein räumliches Coordinatensystem gehen kann.

Eine Erhöhung der Genauigkeit könnte beispielsweise dadurch erzielt werden, dass man bei weiteren Versuchen die beiden photographischen Apparate so aufstellte, dass ihre optischen Axen sich nicht nur unter einem Winkel von 60° durchkreuzten, sondern dass sie aufeinander senkrecht ständen. Da es nicht angeht, der einen optischen Axe die Gangrichtung zu geben, so würde es sich vielleicht empfehlen, als Winkel zwischen der optischen Axe und der Gangebene für alle vier photographischen Apparate 45° zu wählen.

Eine weitere Vervollkommnung der Methode würde es bedeuten, wenn man sich von der Coordinatentafel unabhängig machte. Als wir an die Versuche herangingen, waren wir noch nicht im Besitze des neu construierten Coordinatenmessers (vgl. Seite 205 ff.). Wir liessen daher, wie schon in einer früheren Arbeit, das Coordinatennetz direct durch die Photographie einzeichnen, um dann in der Lage zu sein, die ebenen Coordinaten der Punkte auf den photographischen Platten direct abzulesen. Der Coordinatenmesser macht nun das Netz ganz überflüssig. Er fordert nur, dass man auf allen photographischen Platten einen bestimmten Punkt des Raumes, eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Länge projiciert findet. Unter Verwendung Geissler'scher Röhren könnte diese Projection kurz vor oder auch nach dem Versuche auf alle photographischen Platten zu gleicher Zeit bewirkt werden.

Ferner wäre durch geeignete Abmessung der Entfernungen der photographischen Apparate von dem Coordinatenanfangspunkt eine Vereinfachung der Formeln anzustreben u. s. w.

Methodisch ist dies Alles von Wichtigkeit. Man wird in Zukunft bei der photographischen Registrierung von Bewegungen des lebenden Menschen oder Thieres diesen und ähnlichen Gesichtspunkten Rechnung zu tragen haben.

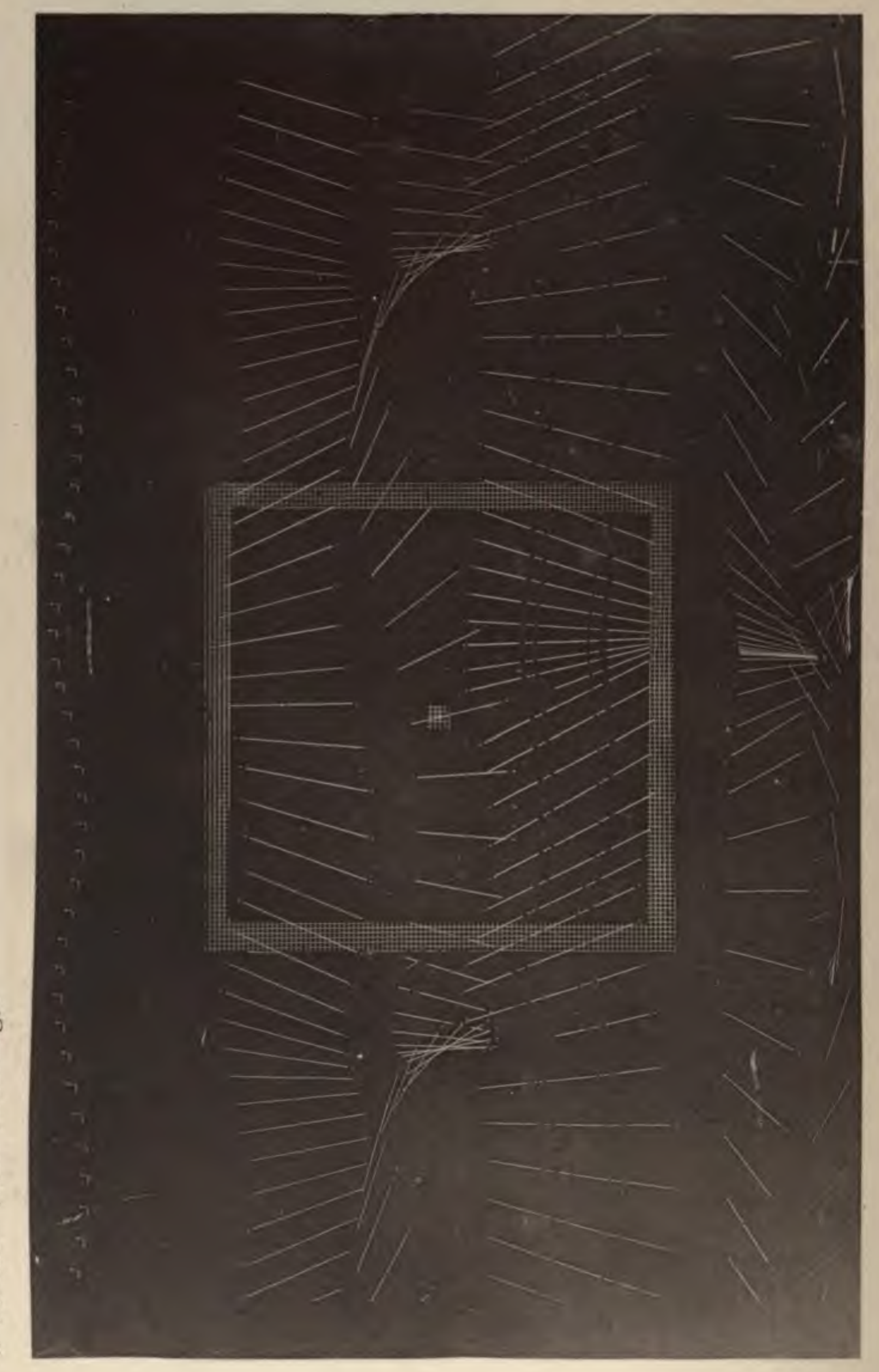
Nachdem in diesem ersten Theile der Arbeit die photographische Registrierung des menschlichen Ganges und die damit gewonnene Beziehung desselben auf ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem dargelegt und an einigen Beispielen gezeigt worden ist, dass die resultierenden Coordinatentabellen die Unterlage für die Lösung aller Probleme bilden können, welche sich in irgend welcher Hinsicht auf das beim Gang des Menschen befolgte Bewegungsgesetz beziehen, wird die ausführliche Ableitung dieses Bewegungsgesetzes den Gegenstand eines demnächst erscheinenden zweiten Theiles der Untersuchung »Ueber den Gang des Menschen« bilden.

Inhaltsverzeichniss.



Das Versuchsindividuum in voller Ausrüstung.

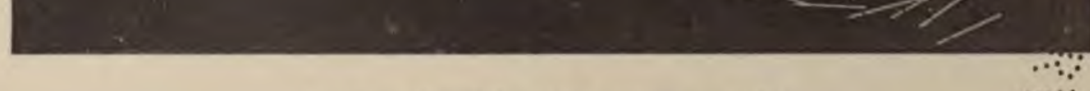




I. Versuch *(ohne Belastung).*

No. 1a: Ansicht von rechts.

I. Versuch *(ohne Belastung)*.



No. 2a: Ansicht von vorn rechts.



I. Versuch *(ohne Belastung).*

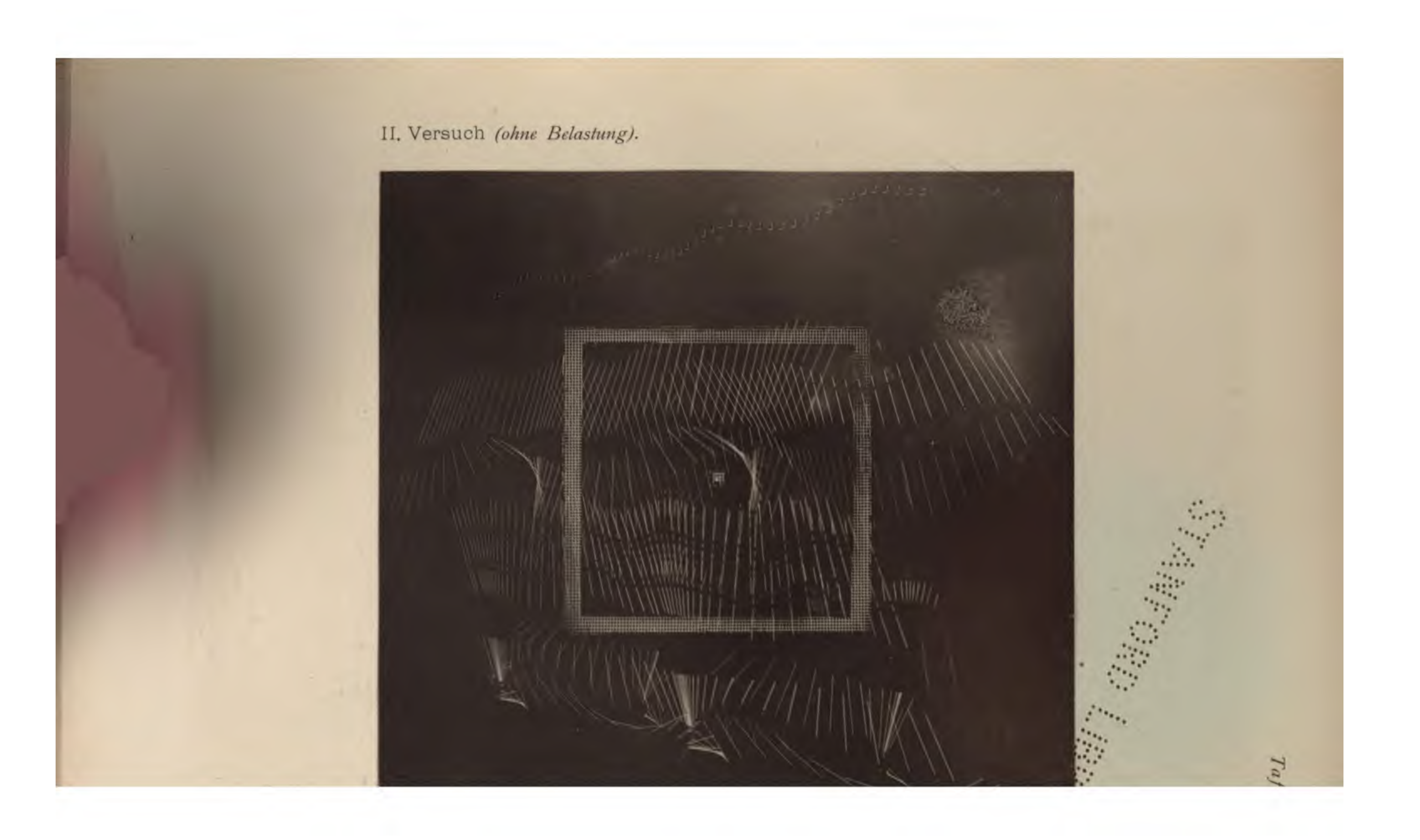
No. 1b: Ansicht von links.

I. Versuch *(ohne Belastung).*

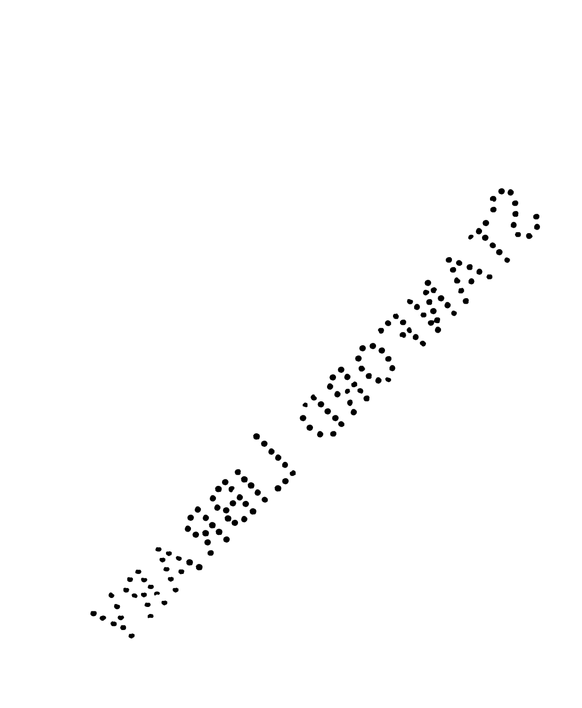


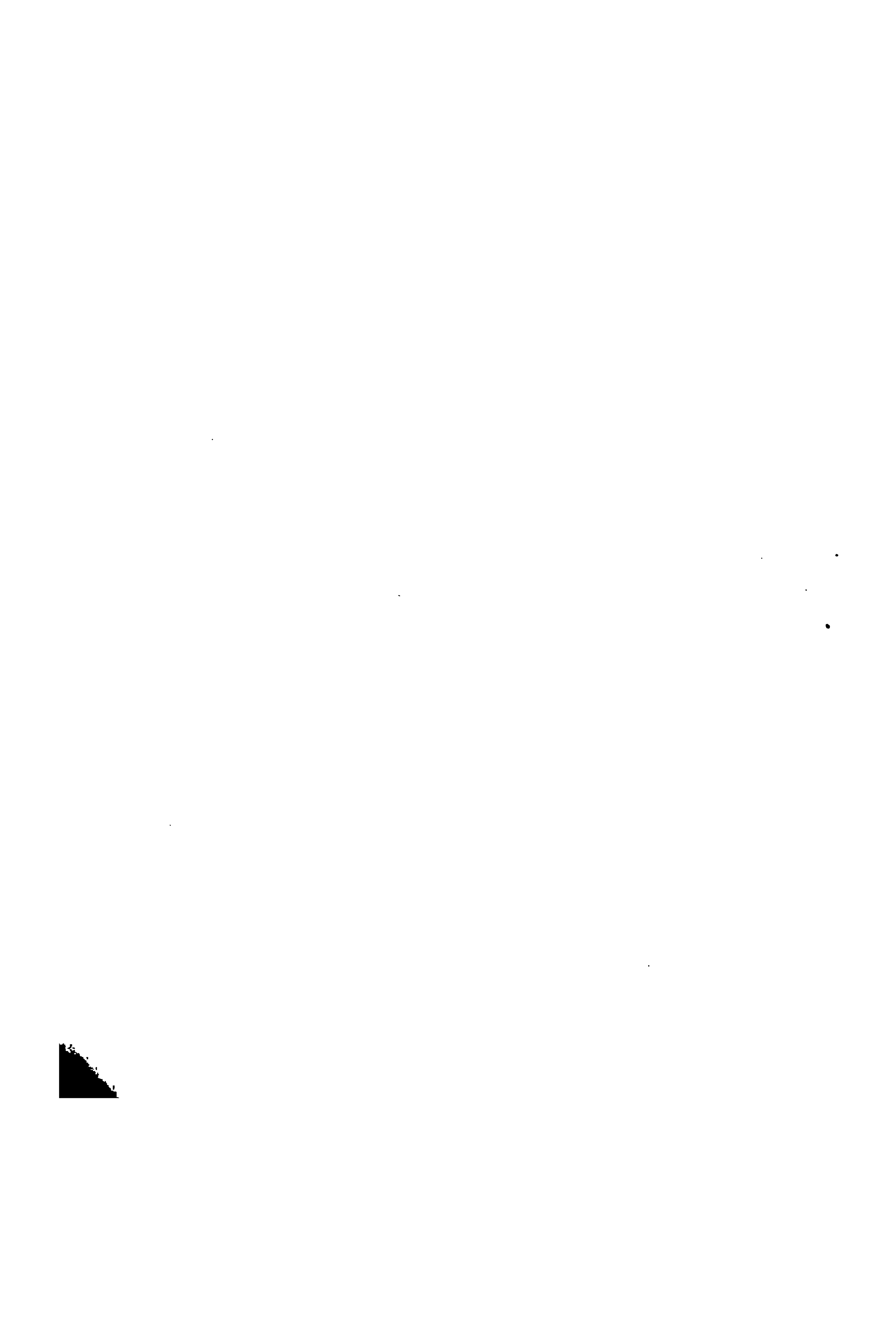
III. Versuch *(mit Belastung).*

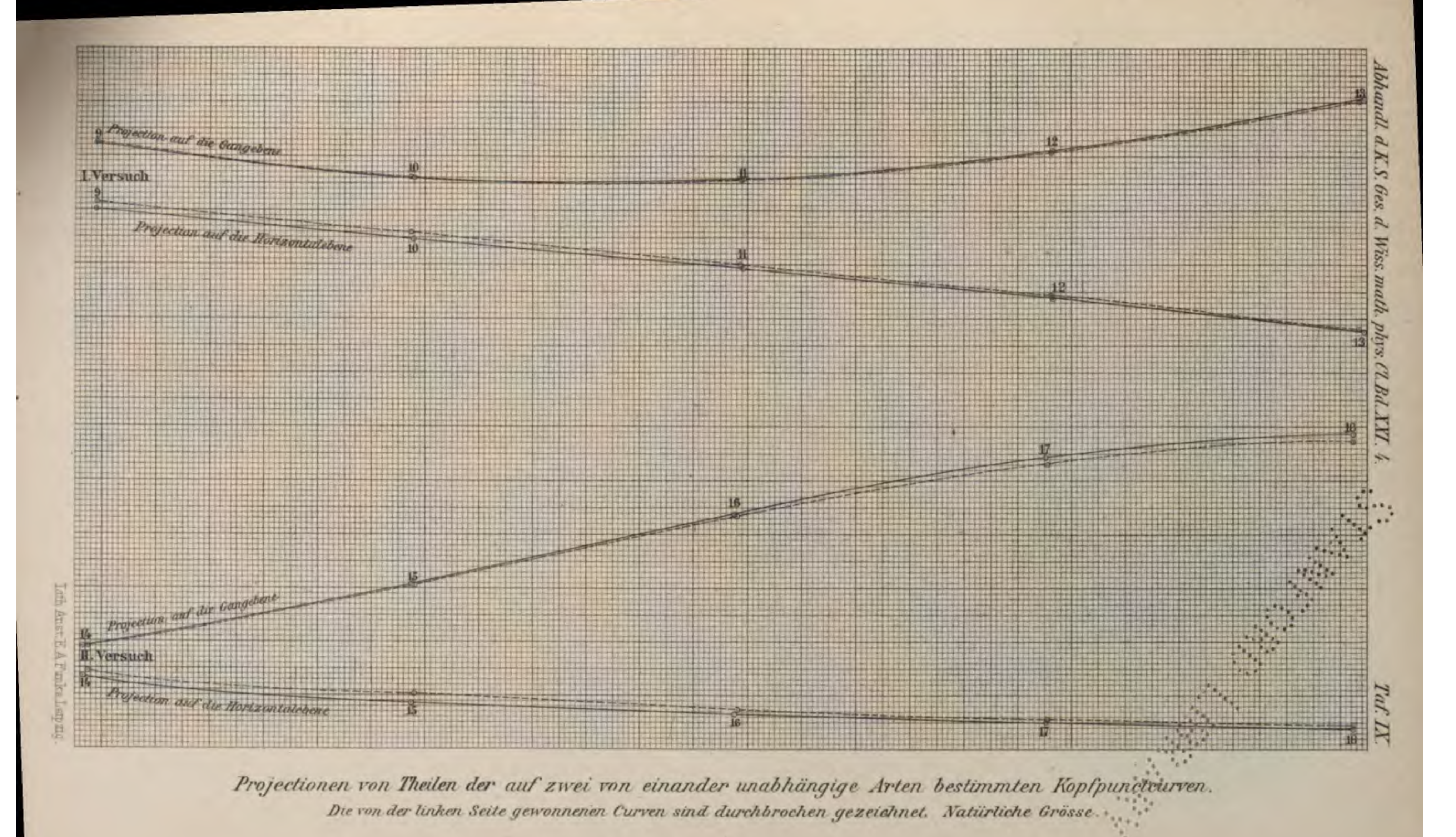
No. 1a: Ansicht von rechts.



II. Versuch *(ohne Belastung)*.





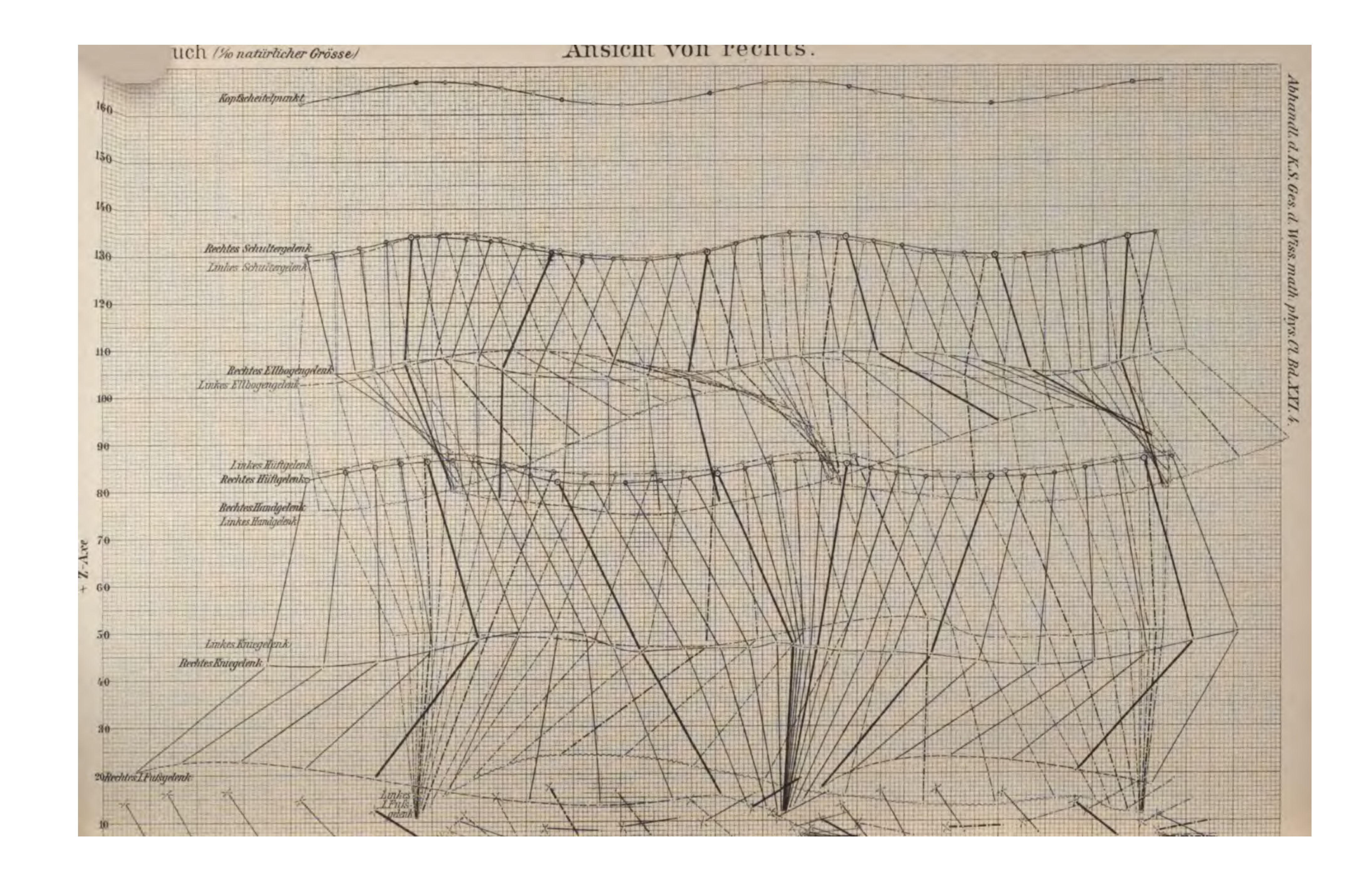


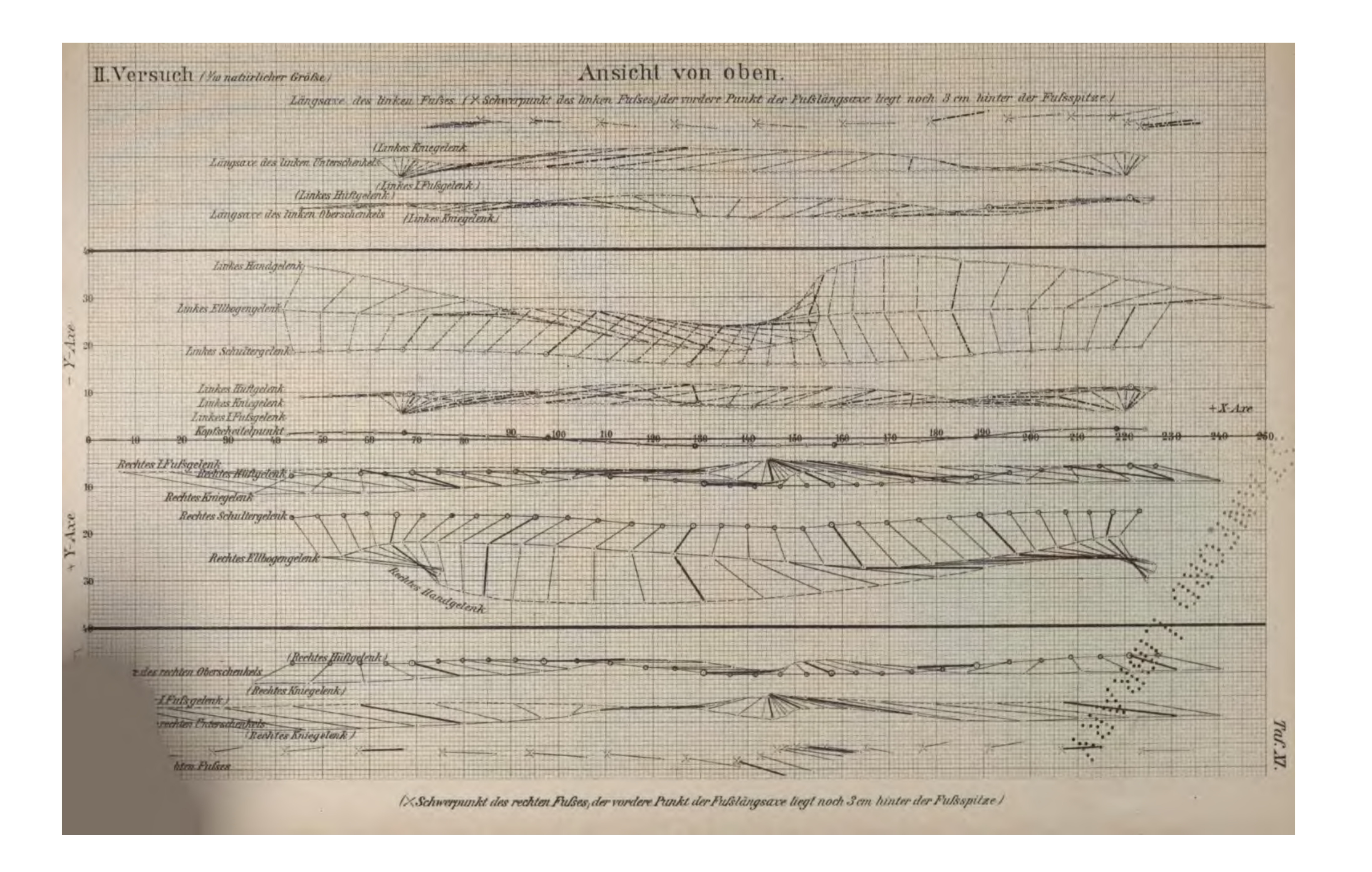
Projectionen von Theilen der auf zwei von einander unabhängige Arten bestimmten Kopfpunctcurven.

Die von der linken Seite gewonnenen Curven sind durchbrochen gezeichnet. Natürliche Grösse.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.




uch (1/10 natürlicher Grösse)
Ansicht von rechts.
Kopfscheitelpunkt
Rechtes Schultergelenk
Linkes Schultergelenk
Rechtes Ellbogengelenk
Linkes Ellbogengelenk
Linkes Hüftgelenk
Rechtes Hüftgelenk
Rechtes Handgelenk
Linkes Handgelenk
Linkes Kniegelenk
Rechtes Kniegelenk
Rechtes I. Fußgelenk
Linkes I. Fußgelenk
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
+ Z-Axe


II. Versuch (1/10 natürlicher Größe)
Ansicht von oben.
Längsaxe des linken Fußes (× Schwerpunkt des linken Fußes, der vordere Punkt der Fußlängsaxe liegt noch 3 cm hinter der Fußspitze)
(Linkes Kniegelenk
Längsaxe des linken Unterschenkels
(Linkes I. Fußgelenk)
(Linkes Hüftgelenk)
Längsaxe des linken Oberschenkels
(Linkes Kniegelenk)
Linkes Handgelenk
Linkes Ellbogengelenk
Linkes Schultergelenk
Linkes Hüftgelenk
Linkes Kniegelenk
Linkes I. Fußgelenk
Kopfscheitelpunkt
+ X-Axe
− Y-Axe
+ Y-Axe
Rechtes I. Fußgelenk
Rechtes Hüftgelenk
Rechtes Kniegelenk
Rechtes Schultergelenk
Rechtes Ellbogengelenk
Rechtes Handgelenk
(Rechtes Hüftgelenk)
(Rechtes Kniegelenk)
(Rechtes Kniegelenk)
(× Schwerpunkt des rechten Fußes, der vordere Punkt der Fußlängsaxe liegt noch 3 cm hinter der Fußspitze)

	I. Versuch (ohne Belastung)	II. Versuch (ohne Belastung)	III. Versuch (mit Belastung)
Relative Bewegung der Hüftgelenkmittelpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt der Hüftlinie (natürliche Grösse) — in vertikaler Richtung (M. d. recht. Hüftgel., M. d. link. Hüftgel.; n. oben, n. unten)	No. 1	No. 9	No. 17
Relative Bewegung der Hüftgelenkmittelpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt der Hüftlinie (natürliche Grösse) — in der Gangrichtung (M. d. rechten Hüftgelenks, M. d. linken Hüftgelenks; n. vorn, n. hinten)	No. 2	No. 10	No. 18
Relative Bewegung der Schultergelenkmittelpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt der Schulterlinie (natürliche Grösse) — in vertikaler Richtung (M. d. recht. Schultergel., M. d. link. Schultergel.; n. oben, n. unten)	No. 3	No. 11	No. 19
Relative Bewegung der Schultergelenkmittelpunkte in Bezug auf den Mittelpunkt der Schulterlinie (natürliche Grösse) — in der Gangrichtung (M. d. rechten Schultergelenks, M. d. linken Schultergelenks; n. vorn, n. hinten)	No. 4	No. 12	No. 20

Graphische Darstellung der Schwingungen der Hüftlinie (Verbindungslinie der beiden Hüftgelenkmittelpunkte) und der Schulterlinie (Verbindungslinie der beiden Schultergelenkmittelpunkte).

	I. Versuch *(ohne Belastung)*	II. Versuch *(ohne Belastung)*	III. Versuch *(mit Belastung)*
Relative Bewegung des Schulterlinienmittelpunktes *in Bezug auf den Mittelpunkt der Hüftlinie* (natürliche Grösse) — senkrecht zur Gangebene (n. links / n. rechts)	N° 5	N° 13	N° 21
in der Gangrichtung (n. vorn / n. hinten)	N° 6	N° 14	N° 22
Relative Bewegung des Kopfscheitelpunktes *in Bezug auf den Mittelpunkt der Schulterlinie* (natürliche Grösse) — senkrecht zur Gangebene (n. links / n. rechts)	N° 7	N° 15	N° 23
in der Gangrichtung (n. vorn / n. hinten)	N° 8	N° 16	N° 24

Graphische Darstellung der Schwingun

(Verbindungslinie der Mittelpunkte von Hüft- und Schulterlinie (u.

des Mittelpunktes der Schulterlinie mit a

III. Versuch *(mit Belastung.)*

DAS EIKONAL

VON

HEINRICH BRUNS,

ORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

eine Gerade Σ in Ω und umgekehrt. Die beiden Räume bedeuten dabei das erste und letzte Medium irgend eines optischen Systems, die σ sind die Strahlen, die von leuchtenden Punkten des ersten Mediums ausgehen, die »conjugirten« Σ dagegen die entsprechenden Fortsetzungen der Lichtwege im letzten Medium. Strahlen, die durch einen Punkt hindurchgehen, bilden ein »homocentrisches« Büschel.

Sucht man zu einem homocentrischen σ-Büschel das Büschel der conjugierten Σ auf, so ist dieses im Allgemeinen »astigmatisch«, d. h. nicht-homocentrisch, und die Abweichung von der homocentrischen Strahlenvereinigung ist der »Astigmatismus« oder die »Astigmasie« des Büschels. Ebenso ist umgekehrt das σ-Büschel, das zu einem homocentrischen Σ-Büschel gehört, im Allgemeinen astigmatisch. Sind die conjugierten Büschel in ω und Ω in Folge besonderer Umstände gleichzeitig homocentrisch, so bilden sie ein »anastigmatisches« Büschelpaar und ihre Vereinigungspunkte ein anastigmatisches Punktepaar. Wenn über die strahlenweise Abbildung der beiden Räume ω, Ω nichts Näheres festgesetzt ist, so sind hinsichtlich des Auftretens anastigmatischer Punkte vorläufig folgende Fälle möglich: 1) die anastigmatischen Punktepaare fehlen überhaupt; 2) sie sind vorhanden und treten, sei es vereinzelt, sei es als geometrische Oerter auf, die Linien oder Flächen oder Körper bilden können. Tritt der letztgenannte Unterfall ein, sind also anastigmatische Körper vorhanden, so werden die von diesen Körpern in ω und Ω eingenommenen Raumgebiete nicht nur strahlenweise, sondern auch punktweise aufeinander abgebildet, indem die Vereinigungspunkte der anastigmatischen Paare von Strahlenbüscheln zugleich die einander conjugierten Elemente der punktweisen Abbildung bestimmen. Fragt man nun mit ABBE nach den allgemeinen Eigenschaften der so erzeugten punktweisen Abbildung, so ergiebt sich — wie man bei CZAPSKI (a. a. O. Seite 24 ff.) nachlesen mag — dass sie nichts anderes ist, als eine Collineation zwischen den beiden betrachteten Räumen. Mit diesem Ergebnisse ist aber die Aufgabe, die in der Theorie der optischen Bilder durch die erste Annäherung gelöst werden soll, im Wesentlichen bereits erledigt, denn es handelt sich nun nur noch darum, wohlbekannte Eigenschaften der collinearen Abbildung in ein optisches Gewand zu kleiden, um alle die allgemeinen Sätze zu erhalten, die in der ersten Annäherung hergeleitet zu werden pflegen.

Dahin gehören z. B. die Sätze über die Brennpunkte, Hauptpunkte, Knotenpunkte und ihre entsprechenden Ebenen, ferner die Sätze über die Lage von Object und Bild, über Vergrösserung und Helligkeit, über Wirkung der Blenden und Gesichtsfeld, u. s. w. Diese Sätze sind hiernach in Wahrheit gar keine optischen Sätze, sondern gehören der allgemeinen Raumlehre oder der Geometrie an; ebenso hängt ihre Anwendbarkeit auf die Optik nicht von dieser oder jener besonderen Eigenschaft des gerade betrachteten optischen Systems, sondern von zwei weit allgemeineren Dingen ab, nämlich einerseits von der Vorstellung, dass erstes und letztes Medium strahlenweise auf einander abgebildet seien, andererseits von der Voraussetzung, dass anastigmatische Körper auftreten, dass also der Astigmatismus fehle oder doch in erster Annäherung vernachlässigt werden dürfe. Das eigentlich optische Gebiet wird erst betreten, wenn es sich um die Frage handelt, wie Abbildungen der betrachteten Art, sei es streng, sei es angenähert, realisiert werden können.

Der vorstehend skizzierte, von ABBE eingeschlagene Gedankengang leistet offenbar für die erste Annäherung der geometrischen Optik das, was man bei jeder wissenschaftlichen Untersuchung zu erreichen bestrebt sein soll, nämlich die reinliche Ausscheidung der logisch nothwendigen und hinreichenden Voraussetzungen; als Gewinn ergiebt sich dafür die Thatsache, dass sich die Gesammtheit der allgemeinen Sätze aus diesem Kapitel der geometrischen Optik in den einen einfachen Ausspruch »Object und Bild sind collinear« gewissermassen zusammenpressen lässt.

In dem CZAPSKI'schen Buche bricht die rein geometrische Theorie der optischen Abbildung mit der ersten Annäherung ab; die zweite Annäherung oder die Darstellung des astigmatischen Strahlenganges legt bereits gewisse besondere Formen von optischen Systemen zu Grunde. Es ist aber kein innerer Grund vorhanden, die rein geometrische Untersuchung nicht auch auf die zweite Annäherung auszudehnen; die nachfolgenden Abschnitte sollen zeigen, dass eine solche Fortsetzung des ABBE'schen Gedankenganges nicht nur ausführbar, sondern auch zweckmässig ist. Es wird gerade dadurch möglich, den Ansatz für Aufgaben allgemeinerer Natur von vornherein auf die mathematisch einfachste Form zu reducieren.

Geht man wieder von der Vorstellung aus, dass zwei Räume,

ω und Ω, strahlenweise auf einander abgebildet seien, so hat man es zunächst, falls keine weitere Voraussetzung hinzugefügt wird, mit den Sätzen zu thun, die allgemein für alle solche Abbildungen gelten. Diese Sätze verwandeln sich, wenn man ihnen eine optische Einkleidung giebt, in ebenso viele Aussagen über die Eigenschaften des Strahlenganges durch irgend ein optisches System, wobei natürlich der Werth dieser Aussagen für die praktischen Zwecke der geometrischen Optik sehr verschieden ausfallen kann. Eine solche geometrische Theorie würde nun aber auch Abbildungen umfassen, die — zur Zeit wenigstens — für die Lehre von den optischen Instrumenten ohne Interesse sind; die Festsetzung, dass ausser der strahlenweisen Abbildung zwischen ω und Ω weiter nichts gegeben sein solle, ist unnöthig allgemein, und es ist gestattet, für die hier zu behandelnden Aufgaben aus der Gesammtheit aller möglichen strahlenweisen Abbildungen eine bestimmte Klasse auszuscheiden.

Man denke sich im ersten Medium ω eine beliebige Fläche und betrachte die Normalen dieser Fläche als ein Strahlenbüschel, das wir, wegen dieser Erzeugungsweise, kurz als »flächennormal« bezeichnen wollen, dann sind zwei Fälle möglich, nämlich das conjugierte Büschel im letzten Medium Ω ist ebenfalls flächennormal oder nicht. Der erste Fall tritt, wie man weiss, ein, sobald der Strahlengang vom ersten zum letzten Medium nach den Gesetzen der gewöhnlichen Brechung und Spiegelung vor sich geht, und die Aussage dieser Eigenschaft bildet den Inhalt des bekannten Satzes von MALUS. Wir wollen deshalb die Forderung, dass alle flächennormalen Büschel des ersten Mediums wiederum flächennormale Büschel im letzten Medium erzeugen sollen, kurz als die MALUS'sche Bedingung bezeichnen und können dann alle strahlenweisen Abbildungen in zwei grosse Gruppen ordnen, je nachdem sie die genannte Bedingung erfüllen oder nicht erfüllen. Nun spielen in der Theorie der optischen Instrumente die Fälle, wo der MALUS'sche Satz nicht gilt, nur eine untergeordnete Rolle und werden in der Regel ganz bei Seite gelassen; es hat daher seinen guten Sinn, wenn wir hier als Ausgangspunkt einer geometrischen Theorie der optischen Abbildung folgende zwei Sätze nehmen:

1) das erste Medium ist strahlenweise auf das letzte abgebildet;

2) die Abbildung genügt der MALUS'schen Bedingung.

Fragt man jetzt nach den allgemeinen Eigenschaften der vorstehend bezeichneten Klasse von Abbildungen, so ergiebt die Untersuchung, dass jede einzelne Abbildung vollständig charakterisiert ist durch eine bestimmte Abbildungsfunction mit vier Veränderlichen, für die ich, um einen kurzen Ausdruck zu haben, den Namen »Eikonal« gebrauchen werde. Zu jeder Abbildung, die dem MALUS'schen Satze genügt, gehört also ein bestimmtes Eikonal und umgekehrt; alle Besonderheiten einer gegebenen Abbildung finden ihr Gegenstück in entsprechenden Besonderheiten des Eikonals. Das Eikonal ist, und hierin besteht seine Haupteigenschaft, die Erzeugende für die Gleichungen einer Berührungstransformation, durch welche die je vier Bestimmungsstücke mit einander verbunden sind, deren man zur Festlegung der beiden conjugierten Strahlen σ und Σ' bedarf. An die Stelle der collinearen Beziehung in der ersten Annäherung tritt hiernach die Berührungstransformation.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, durch die Vergleichung mit einem anderen Theile der angewandten Mathematik die Rolle zu erläutern, die das Eikonal in der geometrischen Theorie des astigmatischen Strahlenganges spielt. In den Darstellungen der analytischen Mechanik wird den Problemen, für die das HAMILTON'sche Princip gilt, gemeinhin eine bevorzugte Rolle eingeräumt. Diese Bevorzugung hat ihren guten Grund, denn die Gültigkeit des HAMILTON'schen Ansatzes gestattet alle Fragen, die der gedachten Klasse von Problemen gemeinsam sind, auch gemeinsam und einheitlich zu behandeln. Eine ganz ähnliche Rolle, wie der HAMILTON'sche Ansatz in der Mechanik, spielt nun der Eikonalbegriff auf dem allerdings weit engeren Gebiete der geometrischen Optik; er liefert für die allgemeine Behandlung allgemeiner Fragen die mathematisch einfachste Form des Ansatzes. Dass daneben Schwierigkeiten, die irgend ein besonderes Problem bietet, vor der Hand noch mit besonderen, für den einzelnen Fall berechneten Hülfsmitteln überwunden werden müssen, ist eine Sache für sich. Ich möchte in dieser Beziehung, schon um Missverständnissen vorzubeugen, bemerken, dass, neben der Untersuchung der allen optischen Systemen gemeinsamen Eigenschaften, den in der ausführenden Optik gebrauchten rein numerischen Berechnungsmethoden voraussichtlich noch auf geraume Zeit ihr Recht gewahrt sein dürfte. Gerade auf Grund der weiterhin gegebenen Entwickelungen

halte ich es für wahrscheinlich, das sich die Auffindung eines brauchbaren, rein analytischen oder algebraischen Ersatzes für die erwähnten numerischen Methoden gar nicht mit den gewöhnlich hierbei aufgebotenen elementaren Hülfsmitteln bewerkstelligen lässt, wenn man auch in der Literatur gelegentlich langathmigen Entwickelungen begegnet, die diese Schwierigkeit überwunden zu haben vorgeben.

Nach den vorstehenden Erörterungen wende ich mich jetzt zu der Behandlung der oben angedeuteten Aufgabe. Ich werde dabei, um Wiederholungen zu vermeiden, mit einer Reihe von Festsetzungen beginnen und zugleich, um Alles beisammen zu haben, einige bekannte Dinge, so weit als nöthig, kurz mit entwickeln.

I.

Ein gegebener Raum ω werde auf ein beliebig gewähltes, rechtwinkliges Axensystem (xyz) bezogen; die y-Axe und die z-Axe sollen als Seitenaxen, die yz-Ebene als Grundebene bezeichnet werden. Die Gleichungen für die Punkte einer Geraden σ oder, wie wir auch sagen wollen, eines Strahls σ schreiben wir in der Form

$$\frac{x-0}{m} = \frac{y-h}{p} = \frac{z-k}{q}, \tag{1}$$

wo die m, p, q die Richtungscosinus von σ bedeuten, und $(0, h, k)$ der Ort des Durchschnittes von σ mit der Grundebene ist. Die vier von einander unabhängigen Grössen h, k, p, q sind die nothwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke von σ oder, kürzer ausgedrückt, die Strahlencoordinaten. Die Gesammtheit der σ bildet eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Zur Abkürzung dieser etwas schleppenden Ausdrucksweise soll das Zeichen μ_n gebraucht werden, um eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, ohne Rücksicht auf ihre sonstige Beschaffenheit, zu bezeichnen, wobei dann μ_0 das Zeichen für eine endliche Anzahl von Dingen ist. Hiernach bilden die σ zusammen eine μ_4.

Erlegt man den σ gewisse Bedingungen auf, so wird dadurch aus der μ_4 je nach den Umständen eine μ_0, μ_1, μ_2 oder μ_3 ausgeschieden. Die μ_1, μ_2, μ_3 können auch dadurch erhalten werden, dass man sich die h, k, p, q als Functionen von 1, 2, 3 veränderlichen Parametern dargestellt denkt. Eine μ_1 von Strahlen soll als

Schaar, eine μ_2 als Büschel bezeichnet werden. Gehen die Strahlen einer Schaar oder eines Büschels durch einen festen Punkt π hindurch, so nennen wir das Gebilde homocentrisch und bezeichnen den Vereinigungspunkt π als die Spitze der Schaar oder des Büschels; ist das Gebilde nicht homocentrisch, so soll es astigmatisch heissen. Denkt man sich durch den Nullpunkt zu den Strahlen σ eines beliebigen Büschels Parallelen τ gezogen, so schneiden diese eine um den Nullpunkt mit dem Radius Eins beschriebene Kugel in Punkten, deren Coordinaten die m, p, q der einzelnen Strahlen sind. Die von den Durchschnittspunkten erzeugte sphärische Figur kann als Repräsentant der Büschelöffnung dienen und soll Oeffnungsfigur heissen.

Greift man aus einem Büschel einen beliebigen Strahl σ_0 mit den Coordinaten h, k, p, q heraus, so bilden die zu σ_0 unendlich nahe benachbarten Strahlen des Büschels ein »Elementarbüschel« mit dem »Mittelstrahl« σ_0; die Coordinaten der Nachbarstrahlen sind durch

$$h + dh, \qquad k + dk, \qquad p + dp, \qquad q + dq$$

gegeben, wo die h, k, p, q als Functionen zweier veränderlicher Parameter, sagen wir α und β, ausgedrückt zu denken sind. Der kürzeste Abstand zwischen Mittel- und Nachbarstrahl ist im Allgemeinen von derselben Ordnung unendlich klein, wie die Grösse

$$\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2},$$

kann jedoch für besondere Lagen des Nachbarstrahls von einer höheren Ordnung werden. Tritt letzteres ein, so sagt man, dass der Nachbarstrahl den Mittelstrahl schneide und bezeichnet den Durchschnitt als Brennpunkt des Elementarbüschels. Bildet man

$$dh = h_1 d\alpha + h_2 d\beta, \qquad dk = k_1 d\alpha + k_2 d\beta,$$
$$dm = m_1 d\alpha + m_2 d\beta, \quad dp = p_1 d\alpha + p_2 d\beta, \quad dq = q_1 d\alpha + q_2 d\beta$$

und schreibt die Strahlengleichungen (1) in der Form

$$x = \lambda m, \qquad y = h + \lambda p, \qquad z = k + \lambda q, \tag{2}$$

so erhält man für den Durchschnitt von Mittel- und Nachbarstrahl zunächst die drei Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= m d\lambda + \lambda m_1 d\alpha + \lambda m_2 d\beta, \\ 0 &= p d\lambda + (\lambda p_1 + h_1) d\alpha + (\lambda p_2 + h_2) d\beta, \\ 0 &= q d\lambda + (\lambda q_1 + k_1) d\alpha + (\lambda q_2 + k_2) d\beta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

die durch Elimination von $d\lambda$, $d\alpha$, $d\beta$ zu der Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} m, & \lambda m_1 & , & \lambda m_2 \\ p, & \lambda p_1 + h_1, & & \lambda p_2 + h_2 \\ q, & \lambda q_1 + k_1, & & \lambda q_2 + k_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

führen. Ist λ aus dieser quadratischen Gleichung bestimmt, so folgen aus (2) die Coordinaten des Brennpunktes, und aus (3) die Verhältnisse der $d\alpha$, $d\beta$, die die Lage des schneidenden Nachbarstrahls bestimmen.

Sucht man für alle Strahlen des betrachteten Büschels die Brennpunkte auf, so ist ihr Ort eine bestimmte Fläche, die sogenannte Kaustik des Büschels, die wegen der Zweideutigkeit von λ im Allgemeinen aus zwei distincten Schalen besteht. Um die Gleichung der Kaustik zu erhalten, hat man aus (2) und (4) die Grössen λ, α, β zu eliminieren. Bleibt man bei der durch (2) und (4) gegebenen Parameterdarstellung der Kaustik stehen und setzt

$$dx = x_1 d\alpha + x_2 d\beta, \quad dy = y_1 d\alpha + y_2 d\beta, \quad dz = z_1 d\alpha + z_2 d\beta,$$
$$\lambda = \lambda_1 d\alpha + \lambda_2 d\beta$$

an, so geht die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} m, & x_1, & x_2 \\ p, & y_1, & y_2 \\ q, & z_1, & z_2 \end{vmatrix}$$

über in

$$D = \begin{vmatrix} m, & m\lambda_1 + \lambda m_1 & , & m\lambda_2 + \lambda m_2 \\ p, & p\lambda_1 + \lambda p_1 + h_1, & & p\lambda_2 + \lambda p_2 + h_2 \\ q, & q\lambda_1 + \lambda q_1 + k_1, & & q\lambda_2 + \lambda q_2 + k_2 \end{vmatrix},$$

woraus wegen (4)

$$D = 0 \tag{5}$$

folgt. Betrachtet man nun (xyz) einerseits als Punkt der Kaustik, andererseits als Brennpunkt des Elementarbüschels mit dem Mittelstrahl $(hkpq)$, so besagt die Gleichung (5), dass Mittelstrahl und Normale an die Kaustik aufeinander senkrecht stehen, oder dass der Mittelstrahl die Kaustik berührt. Hiernach stellt sich das betrachtete Büschel dar als die Gesammtheit der Geraden, die die beiden Schalen der Kaustik berühren. In besonderen Fällen können eine oder alle beide Schalen in kaustische Linien ausarten; ferner können beide

Schalen zusammen sich auf einen einzigen Punkt reducieren, was bei homocentrischen Büscheln eintritt.

Legt man bei einem Elementarbüschel die x-Axe für den Augenblick in den Mittelstrahl und wählt als veränderliche Parameter die Grössen p, q selber, so kann man, da nur unendlich kleine Werthe der p, q in Betracht kommen, mit Vernachlässigung der Grössen höherer Ordnung die Gleichungen

$$m = 1, \qquad h = h_1 p + h_2 q, \qquad k = k_1 p + k_2 q,$$
$$y = (h_1 + x)p + h_1 q, \qquad z = k_1 p + (k_2 + x) q,$$
$$\Delta = (h_1 + x)(k_2 + x) - h_2 k_1,$$
$$p\Delta = (k_2 + x)y - h_2 z, \qquad q\Delta = -k_1 y + (h_1 + x)z$$

bilden. Setzt man nun für die Begrenzung des betrachteten Elementarbüschels fest, dass die Oeffnungsfigur ein unendlich kleiner Kreis sein soll, der mit dem Halbmesser ε um den Mittelstrahl beschrieben ist, so ist der Spielraum der p, q durch die Bedingung

$$p^2 + q^2 \leqq \varepsilon^2$$

gegeben. Schneidet man ferner das Büschel durch eine Ebene, die parallel zur Grundebene im Abstande x vom Nullpunkte gelegt ist, so wird der Umriss der Querschnittsfigur durch die Gleichung

$$\varepsilon^2 \Delta^2 = ((k_2 + x)y - h_2 z)^2 + (k_1 y - (h_1 + x)z)^2$$

bestimmt, ist also eine Ellipse. Für die beiden Abscissen, die Δ zum Verschwinden bringen, reducieren sich die Ellipsen auf geradlinige Strecken, die sogenannten Brennlinien. Hieraus folgt unmittelbar die bekannte Construction eines Elementarbüschels aus Mittelstrahl und Brennlinien.

In dem Raume ω sei $x = \varphi(y, z)$ die Gleichung einer beliebigen Fläche, dann bilden die Normalen der Fläche ein Strahlenbüschel; solche Büschel sollen flächennormal heissen. Schreibt man

$$dx = d\varphi = \varphi_1 dy + \varphi_2 dz, \tag{6}$$

so sind die Strahlencoordinaten der zum Punkte (xyz) gehörigen Normale durch die Gleichungen

$$\frac{m}{1} = \frac{p}{-\varphi_1} = \frac{q}{-\varphi_2}, \tag{7}$$

$$h = y - \frac{px}{m} = y + x\varphi_1, \quad k = z - \frac{qx}{m} = z + x\varphi_2 \tag{8}$$

bestimmt. Bildet man $v = mx + py + qz$, so wird

$$dv = (mdx + pdy + qdz) + (xdm + ydp + zdq)\,.$$

Die erste Klammer rechts verschwindet wegen (6) und (7), und man erhält wegen

$$m^2 + p^2 + q^2 = 1\,, \qquad mdm + pdp + qdq = 0$$

mit Rücksicht auf (8)

$$dv = hdp + kdq\,. \tag{9}$$

Der Ausdruck $hdp + kdq$ ist also bei flächennormalen Büscheln ein totales Differential und man hat, wenn v, h, k als Functionen der p, q dargestellt gedacht werden,

$$h = \frac{\partial v}{\partial p}\,, \quad k = \frac{\partial v}{\partial q}\,, \quad \frac{\partial h}{\partial q} = \frac{\partial k}{\partial p}\,. \tag{10}$$

Dieses Ergebniss lässt sich auch umkehren. Es sei bei einem gegebenen Büschel, wenn die h, k als Functionen der p, q ausgedrückt werden,

$$\frac{\partial h}{\partial q} = \frac{\partial k}{\partial p}\,, \tag{11}$$

dann existirt eine bestimmte Function $u(p,q)$, für die

$$h = \frac{\partial u}{\partial p}\,, \qquad k = \frac{\partial u}{\partial q}\,, \qquad du = hdp + kdq \tag{12}$$

ist. Man führe statt der p, q die neuen Veränderlichen f, g durch die Gleichungen

$$m^2(1 + f^2 + g^2) = 1\,, \qquad p = -mf\,, \qquad q = -mg \tag{13}$$

ein, bilde die Function

$$w(f,g) = -\frac{u(p,q)}{m} = -u(p,q)\sqrt{1 + f^2 + g^2}\,, \tag{14}$$

und setze damit die Gleichungen

$$y = \frac{\partial w}{\partial f}\,, \qquad z = \frac{\partial w}{\partial g}\,, \qquad x = yf + zg - w \tag{15}$$

an. Das System (15) sehen wir als Parameterdarstellung einer Fläche an; (xyz) ist ein Flächenpunkt, die f, g sind die veränderlichen Parameter. Zu dieser Fläche suchen wir jetzt die Beziehung zwischen den h, k, p, q des Normalenbüschels. Zu dem Ende ist der Ausdruck

$$v = xm + yp + zq$$

zu bilden, worin für die m, p, q die Richtungscosinus der Normale in (xyz) zu setzen sind. Nun folgt aus (15) durch Differentiiren

$$dx = f dy + g dz\,,$$

woraus sich

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{m}{1} = \dfrac{p}{-f} = \dfrac{q}{-g}\,, \\ p = -mf\,, \quad q = -mg\,, \quad m^2(1+f^2+g^2) = 1 \end{array}\right\} \quad (16)$$

ergiebt. Hieraus erhält man weiter

$$\begin{aligned} v &= m(x - yf - zg) \\ &= -\, m w(f, g)\,, \end{aligned}$$

oder, wenn man (13) und (16) vergleicht und (14) beachtet,

$$v = u(p, q)\,,$$

womit sich die Gleichungen für das Normalenbüschel der Fläche (15) in der Form

$$h = \frac{\partial u}{\partial p}\,, \qquad k = \frac{\partial u}{\partial q}$$

ergeben, die identisch ist mit dem für das ursprüngliche Büschel vorausgesetzten Gleichungspaar (12). Wenn also ein Büschel der Bedingung (11) genügt, so ist es flächennormal und das System (15) liefert die Gleichung der Fläche, sobald durch die Quadratur

$$u = \int (h dp + k dq)$$

die Function $u(p, q)$ ermittelt ist. Hiernach können wir folgenden Satz aussprechen:

»*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Strahlenbüschel flächennormal sei, ist durch die Gleichung*

$$\frac{\partial h}{\partial q} = \frac{\partial k}{\partial p} \qquad (17)$$

gegeben, die zugleich besagt, dass $h dp + k dq$ *ein totales Differential ist.*«

Die vorstehende, im Grunde sehr einfache, Bemerkung enthält bereits die Lösung der weiterhin zu behandelnden Aufgabe; von hier führt ein gerader und längst gebahnter Weg zu den Eigenschaften des Eikonals.

Da Parallelflächen das Normalenbüschel gemeinsam haben, so gehört zu einem flächennormalen Büschel immer eine Schaar paralleler

Flächen, deren gemeinsame Normalen das Büschel erzeugen. Jede einzelne dieser Flächen werden wir, wie üblich, als eine Wellenfläche des Büschels bezeichnen. Zieht man die bekannten Sätze über Flächenkrümmung heran, so erhält man sofort eine Reihe von Eigenschaften der flächennormalen Büschel. Es erscheint jedoch nicht nöthig, diese Sätze hier besonders aufzuführen; sie hängen alle mit der Bemerkung zusammen, dass die Kaustik eines solchen Büschels zugleich die Fläche der Krümmungsmittelpunkte seiner Wellenflächen ist.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich auf Strahlen in einem einzelnen Raume. Wir gehen jetzt dazu über, zwei Räume gleichzeitig zu betrachten; zuvor mögen jedoch noch zwei Bemerkungen äusserlicher Natur eingeschaltet werden. Der Uebersichtlichkeit halber werde ich häufig partielle Ableitungen durch blosse Anhängung von Indices bezeichnen; hierbei genügt es, wenn jedesmal das Schema für den Sinn der Indices in der Form

$$d\varphi(x, y, z \ldots) = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy + \varphi_3 dz + \ldots$$

angeführt wird. Ferner soll, wo es passt, für die auftretenden Determinanten die ohne Weiteres verständliche Schreibweise

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = (AB)_{12}\,, \qquad \begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = (ABC)_{123}\,, \quad \text{u. s. w.}$$

benutzt werden, die auch für Doppelindices brauchbar ist, z. B.

$$\begin{vmatrix} A_{\alpha\gamma}, & A_{\beta\gamma} \\ A_{\alpha\delta}, & A_{\beta\delta} \end{vmatrix} = (A_\alpha A_\beta)_{\gamma\delta}\,, \quad \text{u. s. w.}$$

II.

Bei der gleichzeitigen Betrachtung zweier Räume ω und Ω sollen die einander in ω und Ω zugeordneten oder »conjugierten« Grössen durchweg mit den einander entsprechenden kleinen und grossen Buchstaben bezeichnet werden. Jeder der beiden Räume wird auf sein eigenes, vorläufig beliebig gewähltes Axensystem (xyz) und (XYZ) bezogen, σ und Σ sind geradlinige Strahlen, deren Coordinaten $(hkpq)$ und $(HKPQ)$ wie im vorigen Abschnitt definiert

werden, während m und M die Richtungscosinus gegen die x- und X-Axe bedeuten. Die Räume ω und Ω sind die Repräsentanten des ersten und des letzten Mediums irgend eines optischen Systems, die wir auch, dem Sprachgebrauch folgend, Object- und Bildraum nennen werden. Das Charakteristische für die geometrische Theorie der optischen Abbildung besteht nun darin, dass die beiden Räume nicht wie sonst bei den meisten physikalischen Aufgaben als Inbegriff einer μ_3 von Punkten, sondern als eine μ_4 von Geraden betrachtet werden, und dass man die als Raumelemente auftretenden Geraden σ und Σ einander paarweise zuordnet. Diese Zuordnung haben wir oben als die strahlenweise Abbildung von ω auf Ω bezeichnet; jede Gerade σ im Objectraum bestimmt eine Gerade Σ im Bildraum und umgekehrt. Die H, K, P, Q sind hiernach Functionen der h, k, p, q und die strahlenweise Abbildung besagt, dass ein Gleichungssystem von der Form

$$\left.\begin{array}{ll} H = A(h,k,p,q)\ , & K = B(h,k,p,q)\ , \\ P = C(h,k,p,q)\ , & Q = D(h,k,p,q) \end{array}\right\} \qquad (18)$$

besteht. So lange über die Abbildung nichts näheres festgesetzt ist, können — mit einer Einschränkung — die A, B, C, D irgend welche Functionen der h, k, p, q sein. Die Einschränkung ist durch den Umstand gegeben, dass auch jedes Σ ein σ bestimmen soll, dass also das System (18) nach den h, k, p, q auflösbar sein muss. Es darf also die Functionaldeterminante der A, B, C, D, gebildet nach den h, k, p, q, oder der Ausdruck

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial h}, & \frac{\partial B}{\partial h}, & \frac{\partial C}{\partial h}, & \frac{\partial D}{\partial h} \\ \frac{\partial A}{\partial k}, & \frac{\partial B}{\partial k}, & \frac{\partial C}{\partial k}, & \frac{\partial D}{\partial k} \\ \frac{\partial A}{\partial p}, & \frac{\partial B}{\partial p}, & \frac{\partial C}{\partial p}, & \frac{\partial D}{\partial p} \\ \frac{\partial A}{\partial q}, & \frac{\partial B}{\partial q}, & \frac{\partial C}{\partial q}, & \frac{\partial D}{\partial q} \end{vmatrix} \qquad (19)$$

nicht identisch verschwinden. Wird Δ für ein specielles Werthsystem der h, k, p, q null oder unendlich, so entspricht dieses einer singulären Stelle der Abbildung; ein Beispiel hierfür bietet u. A. die totale Reflexion.

Die durch (18) einander zugeordneten σ, Σ sind conjugierte Elemente der Abbildung; aus ihnen setzen sich alle weiteren conjugierten Gebilde zusammen. Die beiden einander conjugierten Strahlen σ und Σ werden wir auch, wo dies zweckmässig ist, in einen einzigen Begriff den »Lichtweg« zusammenfassen; der Verlauf eines Lichtweges ist dann im Object- und Bildraum durch seine beiden Bestandtheile σ und Σ gegeben. Eine μ_1 oder μ_2 von Lichtwegen bezeichnen wir dem Früheren gemäss ebenfalls als Schaar oder Büschel.

Im Allgemeinen gehen die gerade für die Anwendungen wichtigen Eigenschaften einer Schaar oder eines Büschels von Strahlen bei der Abbildung verloren. So sind die in ω homocentrischen Schaaren oder Büschel im Allgemeinen in Ω nicht wieder homocentrisch, sondern astigmatisch, und das Gleiche gilt bei dem Uebergange vom Ω auf ω. Ist eine Schaar von Lichtwegen beiderseits homocentrisch, so wollen wir von einer konischen Schaar sprechen, weil die σ und Σ dann Kegelmäntel bilden; die Vereinigungspunkte oder die Spitzen der conjugierten Strahlenschaaren bilden ein Paar conjugierter konischer Punkte. Die konischen Punkte können in jedem einzelnen der beiden Räume ω und Ω eine μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 bilden, während die konischen Punktepaare bis zu einer μ_4 steigen können, wie das Beispiel der Brechung an einer Ebene lehrt. Bei Prismensystemen ist das Bestreben darauf gerichtet, Linien konischer Punkte zu erzeugen.

Ist ein Büschel von Lichtwegen beiderseits homocentrisch, so nennen wir es, wie bereits früher erwähnt, anastigmatisch; die Spitzen der beiden conjugierten Strahlenbüschel bilden ein Paar conjugierter anastigmatischer Punkte. Diese Art von Punkten kann vereinzelt auftreten oder aber eine μ_1, μ_2, μ_3 bilden. Ist letzteres der Fall, so sprechen wir von anastigmatischen Linien oder Flächen oder Körpern. Die anastigmatische Beziehung zwischen Linien, Flächen oder Körpern schliesst zugleich eine punktweise Abbildung dieser Raumformen auf einander in sich; bei Linsensystemen ist das Bestreben darauf gerichtet, wenigstens anastigmatische Flächenpaare zu erzeugen, da anastigmatische Körper, wie sich zeigen lässt, nur in einem einzigen trivialen Falle mit den Eigenschaften isotroper Medien verträglich sind. Uebrigens kann auch bei der konischen

Beziehung eine punktweise Abbildung zwischen den auftretenden Mannigfaltigkeiten konischer Punkte vorkommen, jedoch müssen dann die Oerter der konischen Punkte in ω und Ω von derselben Dimension sein, wie die Mannigfaltigkeit der Punktepaare, was nicht immer der Fall zu sein braucht, wie das oben angeführte Beispiel einer brechenden Ebene lehrt.

Bilden die unendlichen fernen Ebenen des Object- und des Bildraumes ein anastigmatisches Flächenpaar, so nennen wir die Abbildung teleskopisch. Offenbar erzeugen dann alle Büschel von parallelen σ im Bildraume Büschel von parallelen Σ.

Das Beiwort anastigmatisch werden wir auch bei Elementarbüscheln anwenden, sobald diese — nöthigenfalls unter Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung — in ω und Ω gleichzeitig als homocentrisch angesehen werden dürfen. Bei solchen Büscheln fallen, wie sich aus dem Verhalten der oben behandelten Querschnittellipsen ergiebt, beiderseits die Brennlinien in einen Punkt zusammen.

Zu den Eigenschaften eines Büschels, die bei einer beliebigen strahlenweisen Abbildung im Allgemeinen verloren gehen, gehört auch die Beziehung zwischen Strahl und Wellennormale. Damit ein flächennormales σ-Büschel im Bildraume ein ebensolches Σ-Büschel erzeuge, müssen, wie sich zeigen wird, die partiellen Ableitungen der A, B, C, D in (18) nicht weniger als fünf Bedingungsgleichungen erfüllen.

III.

Wenn für eine strahlenweise Abbildung weiter nichts gegeben sein soll, als das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} H = A(h,k,p,q)\,, & K = B(h,k,p,q)\,, \\ P = C(h,k,p,q)\,, & Q = D(h,k,p,q)\,, \end{array}\right\} \quad (20)$$

das ja der analytische Ausdruck für irgend eine Abbildung ist, so muss die Untersuchung sich im Grunde genommen darauf beschränken, festzustellen, wie bestimmte Eigenschaften eines Strahlengebildes des Objectraumes durch die Abbildung geändert werden, wobei das letzte Ziel die Aufstellung einer sachgemässen Classification wäre. Für die Elementarbüschel, deren Merkmale ja durch die Angabe der Brennlinien erschöpft sind, lässt sich die Frage nach ihrer Aenderung

unschwer beantworten, und ich will wenigstens das Resultat hersetzen. Man denke sich in dem Büschelpaar h und k als Functionen der p, q und ebenso H und K als Functionen der P, Q dargestellt, ferner werde angesetzt

$$\begin{gathered} dh = h_1 dp + h_2 dq \,, \qquad dk = k_1 dp + k_2 dq \,, \\ dH = H_1 dP + H_2 dQ \,, \qquad dK = K_1 dP + K_2 dQ \,, \\ h_1 k_2 - h_2 k_1 = (hk)_{12} = l \,, \qquad (H_1 K_2 - H_2 K_1) = (HK)_{12} = L \,, \\ dA = A_1 dh + A_2 dk + A_3 dp + A_4 dq, \quad dB = B_1 dh + B_2 dk + B_3 dp + B_4 dq, \\ dC = C_1 dh + C_2 dk + C_3 dp + C_4 dq, \quad dD = D_1 dh + D_2 dk + D_3 dp + D_4 dq, \end{gathered}$$

endlich sei, wenn F, G irgend zwei der vier Functionen A, B, C, D bedeuten,

$$[FG] = l(FG)_{12} + h_1(FG)_{14} + h_2(FG)_{31} + k_1(FG)_{24} + k_2(FG)_{32} + (FG)_{34},$$

dann ist

$$\left.\begin{gathered} H_1[CD] = [AD] \,, \qquad H_2[CD] = [CA] \,, \\ K_1[CD] = [BD] \,, \qquad K_2[CD] = [CB] \,, \\ L[CD] = [AB]. \end{gathered}\right\} \quad (21)$$

Die Grössen H_1, H_2, K_1, K_2, L sind also gebrochene lineare Functionen der h_1, h_2, k_1, k_2, l mit gemeinsamem Nenner. Da durch diese beiden Reihen von Grössen die Brennlinien, wie wir früher gesehen haben, bestimmt sind, so beantwortet das Gleichungssystem (21) die Frage nach der Aenderung, die die Brennlinien durch die Abbildung erfahren. Ich will jedoch bei Entwickelungen dieser Art nicht weiter verweilen, sondern wende mich zu derjenigen Klasse von Abbildungen, die vorderhand für die geometrische Optik allein von Interesse sind. Von jetzt ab betrachten wir nur solche Abbildungen, die der oben besprochenen MALUS'schen Bedingung genügen: die A, B, C, D sollen also so beschaffen sein, dass *flächennormale Büschel des Objectraumes bei der Abbildung flächennormal bleiben.* Diese Bedingung fordert, dass der Ausdruck

$$HdP + KdQ \qquad (22)$$

ein totales Differential oder, was dasselbe ist, integrabel sei, sobald dieses mit dem Ausdrucke

$$hdp + kdq \qquad (23)$$

der Fall ist, wie auch im übrigen h und k als Functionen der p, q gewählt werden mögen. Da die Integrabilität von (22) nicht

geändert wird, wenn die H, K, P, Q durch die A, B, C, D ersetzt werden, so können wir statt (22) auch

$$AdC + BdD = adp + bdq \tag{24}$$

schreiben, wo

$$\left.\begin{aligned} a &= A(C_1h_1 + C_2k_1 + C_3) + B(D_1h_1 + D_2k_1 + D_3)\,, \\ b &= A(C_1h_2 + C_2k_2 + C_4) + B(D_1h_2 + D_2k_2 + D_4) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ist. Die Integrabilitätsbedingung für (24) ist

$$\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial q} = 0\,, \tag{26}$$

wobei immer die h, k als Functionen der p, q zu denken sind. Die Entwickelung von (26) giebt, gehörig reduciert,

$$\begin{aligned} 0 = l[(AC)_{12} + (BD)_{12}] + h_1[(AC)_{14} + (BD)_{14}] + h_2[(AC)_{31} + (BD)_{31}] \\ + k_1[(AC)_{24} + (BD)_{24}] + k_2[(AC)_{32} + (BD)_{32}] + (AC_{34}) + (BD)_{34}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite soll nun verschwinden, sobald der Ausdruck (23) integrabel ist. Das Verschwinden muss also erfolgen, sobald man, wenn $v(p, q)$ eine ganz beliebige Function bedeutet,

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial v}{\partial p}\,, \quad & h_1 &= \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\,, \quad & h_2 &= \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q}\,, \\ k &= \frac{\partial v}{\partial q}\,, \quad & k_1 &= \frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q}\,, \quad & k_2 &= \frac{\partial^2 v}{\partial q^2} \end{aligned}$$

setzt. Das ist aber nur möglich, wenn die fünf Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= (AC)_{12} + (BD)_{12}\,, \qquad 0 = (AC)_{14} + (BD)_{14}\,, \\ 0 &= (AC)_{32} + (BD)_{32}\,, \qquad 0 = (AC)_{34} + (BD)_{34}\,, \\ 0 &= (AC)_{31} + (BD)_{31} + (AC)_{24} + (BD)_{24} \end{aligned}$$

identisch, d. h. für beliebige, von einander unabhängige Werthe der h, k, p, q erfüllt sind. Die gefundenen Bedingungen schreiben wir unter Einführung der Hülfsgrösse

$$E = (AC)_{13} + (BD)_{13} = (AC)_{24} + (BD)_{24} \tag{27}$$

in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} (AC)_{34} + (BD)_{34} &= 0 \quad, & (AC)_{12} + (BD)_{12} &= 0\,, \\ (AC)_{42} + (BD)_{42} &= -E\,, & (AC)_{13} + (BD)_{13} &= E\,, \\ (AC)_{23} + (BD)_{23} &= 0 \quad, & (AC)_{14} + (BD)_{14} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und nennen dieses System die erste Form der Malus'schen Bedingungsgleichungen; sie schliessen alles in sich, was sich, so lange keine

weiteren Bedingungen hinzugefügt werden, auf Grund des MALUSschen Satzes aussagen lässt.

Mit dem System (28) sind wir auf ein ausgiebig bearbeitetes Gebiet gelangt, das als die Lehre von den Berührungstransformationen bezeichnet wird. Für die weitere Untersuchung hätte man also nur nöthig, die Sätze dieser Lehre einfach herüberzunehmen. Da indessen die Berührungstransformationen noch nicht in den eisernen Bestand der Lehrbücher übergegangen sind, so sollen hier die Resultate, die wir nöthig haben, direct errechnet werden.

Bezeichnet man mit

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4 \text{ und } G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4$$

acht beliebig gewählte Grössen und verbindet man die Gleichungen (28) mit einander linear durch die sechs Multiplicatoren

$$\begin{array}{ll} (FG)_{12}\,, & (FG)_{34}\,, \\ (FG)_{13}\,, & (FG)_{42}\,, \\ (FG)_{14}\,, & (FG)_{23}\,, \end{array}$$

so erhält man die zusammenfassende Gleichung

$$(FGAC)_{1234} + (FGBD)_{1234} = -E[(FG)_{13} + (FG)_{24}]\,,$$

aus der sich durch Specialisierung der F, G die ursprünglichen Gleichungen wieder herstellen lassen. Schreibt man für das Buchstabenpaar FG der Reihe nach die Paare

$$AB,\quad AD,\quad CB,\quad CD,\quad AC,\quad BD,$$

so erhält man die sechs neuen Gleichungen

$$\begin{gathered} E[(AB)_{13} + (AB)_{24}] = 0\,, \quad E[(AD)_{13} + (AD)_{24}] = 0\,, \\ E[(CB)_{13} + (CB)_{24}] = 0\,, \quad E[(CD)_{13} + (CD)_{24}] = 0\,, \\ E[(AC)_{13} + (AC)_{24}] = -(ACBD)_{1234}\,, \\ E[(BD)_{13} + (BD)_{24}] = -(BDAC)_{1234}\,. \end{gathered}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben summiert

$$2(ABCD)_{1234} = E[(AC)_{13} + (BD)_{13} + (AC)_{24} + (BD)_{24}]\,,$$

woraus wegen (27) für die Functionaldeterminante der Abbildung

$$\varDelta = (ABCD)_{1234} = E^2 \tag{29}$$

folgt. Da $\varDelta$ nicht identisch verschwinden darf, so kann man jetzt die gefundenen Gleichungen auch so schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll}(AB)_{13}+(AB)_{24}=0\,, & (BC)_{13}+(BC)_{24}=0\,,\\ (AC)_{13}+(AC)_{24}=E\,, & (BD)_{13}+(BD)_{24}=E\,,\\ (AD)_{13}+(AD)_{24}=0\,, & (CD)_{13}+(CD)_{24}=0\,.\end{array}\right\} \quad (30)$$

Von diesem System kann man wieder rückwärts zu den Bedingungen (28) gelangen. Zu dem Ende führen wir zunächst, wenn u und v irgend zwei Functionen der h, k, p, q bedeuten, das bekannte Symbol (u, v) ein durch die Gleichung

$$(u,v)=\left(\frac{\partial u}{\partial h}\frac{\partial v}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial h}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial k}\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial k}\right),$$

oder, mit den Indices geschrieben,

$$(u,v)=(uv)_{13}+(uv)_{24}\,. \quad (31)$$

Hiermit lässt sich das System (30) in der Gestalt

$$\left.\begin{array}{c}(A,B)=(A,D)=(C,B)=(C,D)=0\,,\\ (A,C)=(B,D)=E\end{array}\right\} \quad (32)$$

ansetzen. Man denke sich jetzt die vier Abbildungsfunctionen A, B, C, D den Bedingungen (30) oder (32) unterworfen, mit dem Zusatze, dass die Functionaldeterminante

$$\Delta=(ABCD)_{1234}$$

nicht verschwinde, und dass E eine vorläufig unbestimmte Function der h, k, p, q sei. Bedeuten F und G irgend zwei Functionen der Veränderlichen h, k, p, q und bildet man mit den partiellen Ableitungen $F_1, F_2 \ldots$ das Determinantenproduct

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4\\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4\\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4\\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} F_3, & F_4, & -F_1, & -F_2\\ G_3, & G_4, & -G_1, & -G_2\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{vmatrix},$$

so ist dieses einerseits gleich $\Delta(FG)_{34}$, andererseits, wenn man ausmultipliciert, gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} (A,F), & (A,G), & A_3, & A_4\\ (B,F), & (B,G), & B_3, & B_4\\ (C,F), & (C,G), & C_3, & C_4\\ (D,F), & (D,G), & D_3, & D_4\end{vmatrix}.$$

Schreibt man für das Buchstabenpaar FG der Reihe nach die sechs Paare

$$AB\,, \quad AC\,, \quad AD\,, \quad BC\,, \quad BD\,, \quad CD\,,$$

so erhält man mit der Abkürzung $\delta = \varDelta - E^2$ die sechs Gleichungen

$$0 = \delta(AB)_{34} = \delta(AC)_{34} = \delta(AD)_{34} = \delta(BC)_{34} = \delta(BD)_{34} = \delta(CD)_{34}\,,$$

aus denen

$$\delta = 0\,, \qquad E^2 = \varDelta \tag{33}$$

folgt, weil das gleichzeitige Verschwinden der sechs Determinanten $(AB)_{34}\,, \ldots$ auch das Verschwinden von $\varDelta$ nach sich ziehen würde. Verbindet man nun weiter die sechs Bedingungen (30) linear mit einander durch die sechs Multiplicatoren

$$\begin{array}{ll} (CD)_{\alpha\beta}\,, & (AD)_{\alpha\beta}\,, \\ (DB)_{\alpha\beta}\,, & (CA)_{\alpha\beta}\,, \\ (BC)_{\alpha\beta}\,, & (AB)_{\alpha\beta}\,, \end{array}$$

wo die α, β irgend zwei der Indices 1, 2, 3, 4 bedeuten, so erhält man die zusammenfassende Gleichung

$$(ABCD)_{13\alpha\beta} + (ABCD)_{24\alpha\beta} = E[(DB)_{\alpha\beta} + (CA)_{\alpha\beta}]\,,$$

woraus sich ohne Weiteres die früheren Bedingungen (28) ergeben, sobald man das Indexpaar $\alpha\beta$ der Reihe nach durch die Paare 12, 13, 14, 23, 24, 34 ersetzt. Hiernach sind also die Bedingungen (30) und (28) einander aequivalent.

Wir bezeichnen das System

$$\left.\begin{array}{r} 0 = (A,B) = (A,D) = (C,B) = (C,D)\,, \\ E = (A,C) = (B,D) \end{array}\right\} \tag{34}$$

als die zweite Form der Malus'schen Bedingungen.

Für drei beliebige Functionen u, v, w der h, k, p, q gilt die bekannte, durch directes Ausrechnen zu beweisende Identität

$$(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v)) = 0\,.$$

Setzt man hierin für u, v, w die Functionen A, B, C, so wird wegen (34)

$$(A, 0) + (B, (C, A)) + (C, 0) = 0\,,$$

woraus $(E, B) = 0$ folgt. Behandelt man die drei anderen Combinationen ABD, ACD, BCD ebenso, so erhält man im Ganzen die vier Bedingungen

$$0 = (E, A) = (E, B) = (E, C) = (E, D)\,. \tag{35}$$

Denkt man sich die Function u nicht direct durch die h, k, p, q, sondern

zunächst durch irgend welche Verbindungen $\varphi, \psi, \ldots$ dieser Veränderlichen ausgedrückt, so folgt aus der Bildungsweise des Symbols (u, v) die Beziehung

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\varphi, v) + \frac{\partial u}{\partial \psi}(\psi, v) + \cdots$$

Denkt man sich in $u = f(h, k, p, q)$ die Veränderlichen mittelst der Abbildungsgleichungen durch die H, K, P, Q ausgedrückt, so erhält man einen Ausdruck $g(H, K, P, Q)$; führt man hierin statt der H, K, P, Q die A, B, C, D ein, so gelangt man zu der identischen Umformung

$$u = f(h, k, p, q) = g(A, B, C, D)\,.$$

Mit Berücksichtigung einer solchen Umformung hat man

$$(u, A) = \frac{\partial u}{\partial A}(A, A) + \frac{\partial u}{\partial B}(B, A) + \frac{\partial u}{\partial C}(C, A) + \frac{\partial u}{\partial D}(D, A)\,.$$

Aehnliche Gleichungen ergeben sich, wenn als zweites Element des Klammersymbols B oder C oder D gewählt wird. Mit Rücksicht auf (34) folgt daraus

$$\left.\begin{aligned} (u, A) &= -E\frac{\partial u}{\partial C}\,, & (u, B) &= -E\frac{\partial u}{\partial D}\,, \\ (u, C) &= E\frac{\partial u}{\partial A}\,, & (u, D) &= E\frac{\partial u}{\partial B}\,. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Hiermit geben die Gleichungen (35)

$$0 = \frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial B} = \frac{\partial E}{\partial C} = \frac{\partial E}{\partial D}\,, \tag{37}$$

d. h. E ist von den h, k, p, q unabhängig oder eine Constante.

IV.

Bei der Einführung der MALUS'schen Bedingung war nur gefordert worden, dass jedes flächennormale σ-Büschel ein ebensolches Büschel im Bildraume liefere; es war aber nicht verlangt worden, dass diese Eigenschaft ohne Weiteres umkehrbar sein solle, dass also jedem flächennormalen Σ-Büschel ein ebensolches Büschel im Objectraume conjugiert sei. Es wird sich zeigen, dass diese Umkehrbarkeit eine nothwendige Folge der ursprünglichen Voraussetzungen ist.

in dem Symbol (u, v) statt der h, k, p, q die H, K, P, Q als unabhängige Veränderliche benutzt werden, so soll dies durch einen Accent angezeigt werden, also:

$$(u, v)' = \left(\frac{\partial u}{\partial H}\frac{\partial v}{\partial P} - \frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial v}{\partial H}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial K}\frac{\partial v}{\partial Q} - \frac{\partial u}{\partial Q}\frac{\partial v}{\partial K}\right). \quad (37)$$

Man erhält dann

$$\begin{aligned}(u, v) &= \frac{\partial u}{\partial H}(H, v) + \frac{\partial u}{\partial K}(K, v) + \frac{\partial u}{\partial P}(P, v) + \frac{\partial u}{\partial Q}(Q, v) \\ &= \frac{\partial u}{\partial H}(A, v) + \frac{\partial u}{\partial K}(B, v) + \frac{\partial u}{\partial P}(C, v) + \frac{\partial u}{\partial Q}(D, v)\end{aligned}$$

und hieraus nach (36)

$$(u, v) = E\left(\frac{\partial u}{\partial H}\frac{\partial v}{\partial C} - \frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial v}{\partial A}\right) + E\left(\frac{\partial u}{\partial K}\frac{\partial v}{\partial D} - \frac{\partial u}{\partial Q}\frac{\partial v}{\partial B}\right).$$

Diese Gleichung giebt, wenn für die A, B, C, D die ihnen gleichen H, K, P, Q geschrieben werden,

$$(u, v) = E(u, v)', \quad (38)$$

oder, wenn $e = 1 : E$ gesetzt wird,

$$(u, v)' = e(u, v). \quad (39)$$

Setzt man hierin für u und v alle paarweisen Verbindungen der h, k, p, q und berechnet die (u, v) nach der ursprünglichen Definitionsgleichung, so wird

$$\left.\begin{aligned}(h, k)' = (h, q)' = (p, k)' = (p, q)' = 0, \\ (h, p)' = (k, q)' = e.\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Denkt man sich die ursprünglichen Abbildungsgleichungen

$$H = A, \quad K = B, \quad P = C, \quad Q = D$$

nach den h, k, p, q aufgelöst und in der Form

$$\begin{aligned}h &= a(H, K, P, Q), \qquad & k &= b(H, K, P, Q), \\ p &= c(H, K, P, Q), \qquad & q &= d(H, K, P, Q)\end{aligned}$$

geschrieben, so ist dadurch die strahlenweise Abbildung von Ω auf ω oder die zur ursprünglichen inverse Abbildung ausgedrückt, und das System (40) geht in

$$\left.\begin{aligned}(a, b)' = (a, d)' = (c, b)' = (c, d)' = 0, \\ (a, c)' = (b, d)' = e\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

über. Das sind aber die MALUS'schen Bedingungen für die inverse Abbildung und zwar in der zweiten Form; wir können also sagen: wenn die Abbildung von ω auf Ω dem MALUS'schen Satze genügt, so gilt dies auch sofort von der inversen Abbildung oder der Abbildung von Ω auf ω; die Constante E geht bei der Umkehrung in den reciproken Werth über.

Die Grösse E erscheint zunächst als Quadratwurzel aus der Functionaldeterminante Δ und könnte ebenso wie die Functionen A, B, C, D von der Wahl der Coordinatenaxen abhängen. Um dies zu untersuchen, denken wir uns für den Bildraum noch ein zweites Axensystem $(X'Y'Z')$ festgelegt und den hierauf bezogenen Raum mit Ω' bezeichnet; entsprechend sollen alle auf Ω' bezüglichen Grössen einen Accent erhalten. Führt man für die Abbildung von ω auf Ω für den Augenblick das Zeichen $(\omega\Omega)$ ein, so haben wir zunächst die drei Abbildungen $(\omega\Omega)$, $(\omega\Omega')$, $(\Omega\Omega')$ und die drei dazu gehörigen inversen $(\Omega\omega)$, $(\Omega'\omega)$, $(\Omega'\Omega)$. Da für die erste Abbildung $(\omega\Omega)$ der MALUS'sche Satz gelten soll, so gilt er auch ohne Weiteres für die fünf anderen. Bezeichnet man die entsprechenden E-Constanten mit $E(\omega\Omega)$, $E(\omega\Omega')$, ..., so ist

$$1 = E(\omega\Omega) . E(\Omega\omega) = E(\omega\Omega') . E(\Omega'\omega) = E(\Omega\Omega') . E(\Omega'\Omega) . \quad (42)$$

Setzt man nun die Abbildungsgleichungen für $(\omega\Omega')$ in der Form

$$\left.\begin{array}{ll} H' = A'(h,k,p,q), & K' = B'(h,k,p,q), \\ P' = C'(h,k,p,q), & Q' = D'(h,k,p,q) \end{array}\right\} \quad (43)$$

an und erinnert sich der Bedeutung des Symbols $(u,v)'$, so ist zunächst

$$E(\omega\Omega) = (H,P), \quad E(\omega\Omega') = (H',P'), \quad E(\Omega\Omega') = (H',P')',$$

womit aus (38)

$$E(\omega\Omega') = E(\omega\Omega) . E(\Omega\Omega') \quad (44)$$

folgt. Um also den Einfluss einer Aenderung der Coordinatenaxen (XYZ) zu ermitteln, hat man das Symbol $(H',P')'$ zu berechnen.

Nehmen wir nun mit den Coordinatenaxen zunächst eine Parallelverschiebung vor, bei der der neue Nullpunkt in den Punkt

$$X = a, \quad Y = b, \quad Z = c$$

verlegt wird, so ist

$$X' = X - a, \quad Y' = Y - b, \quad Z' = Z - c.$$

Setzen wir ferner die Gleichungen eines und desselben Strahls, bezogen auf Ω und Ω' an, nämlich

$$Y = H + \frac{PX}{M}, \qquad Z = K + \frac{QX}{M},$$
$$Y' = H' + \frac{P'X'}{M'}, \qquad Z' = K' + \frac{Q'X'}{M'},$$

so wird

$$\left.\begin{array}{l} M' = M, \quad P' = P, \quad Q' = Q, \\ H' = H + \dfrac{Pa}{M} - b, \quad K' = K + \dfrac{Qa}{M} - c. \end{array}\right\} \quad (45)$$

Berechnet man hieraus $(H', P')'$, so wird

$$(H', P')' = 1,$$

so dass also eine Verschiebung der Coordinatenaxen in Ω den Werth von E nicht ändert.

Betrachten wir jetzt eine Drehung um den Nullpunkt, so haben wir zu setzen

$$\begin{array}{ll} X' = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, & M' = \alpha M + \beta P + \gamma Q, \\ Y' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, & P' = \alpha' M + \beta' P + \gamma' Q, \\ Z' = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, & Q' = \alpha'' M + \beta'' P + \gamma'' Q, \end{array}$$

wo die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Richtungscosinus der neuen Axen $(X'Y'Z')$ gegen die alten (XYZ) bedeuten. Schreibt man die Gleichungen eines Strahls, bezogen auf die alten Axen, in der Form

$$X = \varrho M, \quad Y = \varrho P + H, \quad Z = \varrho Q + K,$$

so wird

$$\begin{array}{l} X' = \varrho M' + \beta H + \gamma K = \varrho' M', \\ Y' = \varrho P' + \beta' H + \gamma' K = \varrho' P' + H', \\ Z' = \varrho Q' + \beta'' H + \gamma'' K = \varrho' Q' + K', \end{array}$$

woraus

$$\left.\begin{array}{l} H' = \beta' H + \gamma' K - \dfrac{P'}{M'}(\beta H + \gamma K), \\ K' = \beta'' H + \gamma'' K - \dfrac{Q'}{M'}(\beta H + \gamma K) \end{array}\right\} \quad (46)$$

folgt. Die Einsetzung in $(H', P')'$ giebt, nach gehöriger Reduction, wiederum

$$(H', P') = 1;$$

also bleibt E auch bei einer Drehung ungeändert. Führt man noch

dieselben Schlüsse für die inversen Abbildungen und die Coordinatenänderung in ω aus, so kommt man unter Berücksichtigung von (42) zu dem Ergebniss, dass die Constante E von der Wahl der Coordinatenaxen unabhängig, also nur durch die sonstigen Eigenschaften der Abbildung $(\omega\Omega)$ bedingt ist.

Sind für drei Räume ω, Ω und Ω' die beliebigen Abbildungen $(\omega\Omega)$, $(\Omega\Omega')$ gegeben, so sind damit die zusammengesetzte Abbildung $(\omega\Omega')$ und die drei inversen Abbildungen bestimmt. Genügen zwei, nicht zu einander inverse, Abbildungen den MALUS'schen Bedingungen, so gilt dies auch für die übrigen Abbildungen. Für die Constanten E ergiebt sich aus (38)

$$E(\omega\Omega') = E(\omega\Omega).E(\Omega\Omega'). \tag{47}$$

Diese Beziehung lässt sich sofort erweitern. Man denke sich eine Folge von n Räumen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ gegeben und jeden auf den folgenden unter Erfüllung der MALUS'schen Bedingung abgebildet, dann sind durch die Abbildungen $(\omega_1\omega_2)$, $(\omega_2\omega_3) \ldots (\omega_{n-1}\omega_n)$ auch die zusammengesetzten, ebenfalls der MALUS'schen Bedingung genügenden Abbildungen $(\omega_\alpha\omega_\beta)$ bestimmt und man erhält durch wiederholte Anwendung von (47)

$$E(\omega_1\omega_n) = E(\omega_1\omega_2). E(\omega_2\omega_3) \ldots E(\omega_{n-1}\omega_n). \tag{48}$$

Man denke sich jetzt jedem Raume ω_α einen bestimmten constanten »Index« Γ_α zugeordnet, und wähle die Zahlenwerthe dieser Raumindices so, dass

$$E(\omega_1\omega_2) = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2},\ E(\omega_2\omega_3) = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}, \ldots\ E(\omega_{n-1}\omega_n) = \frac{\Gamma_{n-1}}{\Gamma_n}$$

wird, wobei offenbar eines der Γ, z. B. Γ_1 beliebig gewählt werden kann. Dann folgt aus (48)

$$E(\omega_1\omega_n) = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_n},$$

oder allgemeiner

$$E(\omega_\alpha\omega_\beta) = \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_\beta}. \tag{49}$$

In dem Falle der Optik hängen die Indices Γ in einfacher Weise mit den Brechungsexponenten der einzelnen Medien oder Räume zusammen. Ein optisches System ist bei unserer Betrach-

tungsweise als eine Folge von Räumen ω_1, ω_2 ... anzusehen, die längs bestimmter brechender oder spiegelnder Flächen aneinander grenzen; die einzelnen Brechungen oder Spiegelungen erzeugen dabei die strahlenweise Abbildung jedes einzelnen Raumes auf den unmittelbar darauf folgenden. Da die Spiegelung als eine Brechung mit dem Brechungsverhältniss -1 angesehen werden darf, so genügt es, den Fall einer einzigen Brechung zu behandeln; die Relationen (47) bis (49) geben dann sofort die Werthe der Γ für eine Folge von Brechungen. Denkt man sich also jetzt den Objectraum ω und den Bildraum Ω längs einer Fläche Φ aneinanderstossend, sind ferner n und N die Brechungsindices der beiden Räume, so ist die Grösse

$$E = (H, P)$$

zu berechnen, die sowohl von den Strahlencoordinaten, als auch von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig ist. Lässt man die Axen (xyz) und (XYZ) für beide Räume zusammenfallen, legt die x-Axe in die Normale eines Punktes π von Φ, die Grundebene in die Tangentialebene von π und die Seitenaxen in die Richtungen der Hauptkrümmungen, so kann man die Gleichung der Fläche in der Form

$$x = \varphi(y, z) = \frac{1}{2}(\alpha y^2 + \beta z^2) + \gamma y^3 + \cdots$$

ansetzen, womit wir zunächst

$$dx = \varphi_1 dy + \varphi_2 dz, \quad \varphi_1 = \alpha y + \ldots, \quad \varphi_2 = \beta z + \cdots$$

bilden. Durch einen Flächenpunkt (xyz) geht der einfallende Strahl σ, der gebrochene Strahl Σ und das Einfallsloth. Nach dem Brechungsgesetz sind die Ausdrücke

$$NM - nm, \quad NP - np, \quad NQ - nq$$

proportional den Richtungscosinus des Einfallslothes und diese wiederum proportional zu

$$1, \quad -\varphi_1, \quad -\varphi_2,$$

man darf also setzen

$$\frac{NM - nm}{1} = \frac{NP - np}{-\varphi_1} = \frac{NQ - nq}{-\varphi_2}$$

oder

$$NM = nm + \lambda, \quad NP = np - \lambda\varphi_1, \quad NQ = nq - \lambda\varphi_2.$$

Ferner ist, je nachdem der Punkt (xyz) dem einen oder dem anderen Strahle zugerechnet wird,

$$y = h + \frac{xp}{m} = H + \frac{xP}{M},$$
$$z = k + \frac{xq}{m} = K + \frac{xQ}{M}.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt

$$NdM = ndm + d\lambda,$$
$$NdP = ndp - \varphi_1 d\lambda - \lambda d\varphi_1,$$
$$NdQ = ndq - \varphi_2 d\lambda - \lambda d\varphi_2,$$
$$dy = dh + \frac{p}{m}dx + xd\left(\frac{p}{m}\right) = dH + \frac{P}{M}dx + xd\left(\frac{P}{M}\right),$$
$$dz = dk + \frac{q}{m}dx + xd\left(\frac{q}{m}\right) = dK + \frac{Q}{M}dx + xd\left(\frac{Q}{M}\right),$$

wozu noch die Gleichungen

$$dx = \varphi_1 dy + \varphi_2 dz, \quad d\varphi_1 = \alpha dy + \cdot\cdot, \quad d\varphi_2 = \beta dz + \cdot\cdot$$

treten. Da E von den h, k, p, q unabhängig ist, so können wir bei der Berechnung von E irgend einen speciellen Strahl zu Grunde legen. Wir wählen hierzu den Strahl in der x-Axe, setzen also

$$p = q = P = Q = 0, \qquad m = M = 1,$$
$$h = k = H = K = 0, \quad x = y = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

und erhalten damit zunächst

$$N = n + \lambda,$$
$$NdP = ndp - \lambda\alpha dy, \qquad NdQ = ndq - \lambda\beta dz,$$
$$dx = 0, \quad dy = dh = dH, \quad dz = dk = dK,$$

oder

$$dH = dh, \qquad dK = dk,$$
$$dP = -\frac{N-n}{N}\alpha dh + \frac{n}{N}dp, \quad dQ = -\frac{N-n}{N}\beta dk + \frac{n}{N}dq.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial h} = \alpha\frac{n-N}{N}, \qquad \frac{\partial H}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial k} = 0,$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{n}{N}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = 0,$$

und, wenn man damit E berechnet,

$$E = (H, P) = \frac{n}{N} \cdot \tag{50}$$

Treten also in einem optischen System mit den auf einander folgenden Medien $\omega_1, \omega_2, \ldots$ und den entsprechenden, gegen den leeren Raum genommenen Brechungsexponenten $n_1, n_2 \ldots$ keine Spiegelungen auf, so hat man für je zwei Indices Γ die Beziehung

$$\Gamma_\alpha : \Gamma_\beta = n_\alpha : n_\beta,$$

und man darf für die Γ ohne Weiteres die entsprechenden n setzen. Für den Fall einer Spiegelung hat man in (50)

$$E = -1, \qquad n = -N$$

zu schreiben, und es darf demgemäss in einem gegebenen optischen System allgemein

$$\Gamma_\alpha = \pm n_\alpha$$

gesetzt werden, wo das Zeichen $+$ oder $-$ zu wählen ist, je nachdem der Strahlengang bis zu dem Medium ω_α hin eine gerade oder ungerade Anzahl von Spiegelungen enthält.

Zusammenfassend können wir daher jetzt folgende Sätze aussprechen:

Sind die beiden Räume ω und Ω auf einander strahlenweise durch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} H &= A(h, k, p, q), & K &= B(h, k, p, q) \\ P &= C(h, k, p, q), & Q &= D(h, k, p, q) \end{aligned}\right\} \tag{51a}$$

abgebildet, so ist der nothwendige und hinreichende Ausdruck für die Erfüllung der Malus'schen Bedingung durch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} (H, K) = (H, Q) = (P, K) = (P, Q) = 0, \\ (H, P) = (K, Q) = E = \frac{n}{N} \end{aligned}\right\} \tag{51b}$$

gegeben, worin die Indices n, N der beiden Räume gewisse für die Abbildung wesentliche, von der Wahl der Coordinatenaxen unabhängige, Constanten bedeuten, die im Falle der Optik in die, positiv oder negativ zu nehmenden, Brechungsindices der beiden Räume übergehen.

Wollte man bei der weiteren Untersuchung die Abbildungsgleichungen in der Form (51a) beibehalten, so hätte man dabei

immer auch die Bedingungen (51 b) mit zu berücksichtigen, was die Entwickelungen äusserst schleppend machen würde. Dieser Uebelstand lässt sich dadurch umgehen, dass man den Abbildungsgleichungen von vornherein eine Gestalt giebt, bei der die MALUS'sche Bedingung von selbst mit erfüllt ist. Das Mittel hierzu ist die Einführung einer gewissen erzeugenden Function — des Eikonals —, zu deren Aufstellung ich jetzt übergehe.

V.

Bildet man mit den Veränderlichen einer Abbildung den Differentialausdruck

$$dS = n(pdh + qdk) + N(HdP + KdQ)\,, \qquad (52)$$

so lässt sich dieser mit Berücksichtigung der Abbildungsgleichungen (51 a) in der Form

$$dS' = n(pdh + qdk) + N(AdC + BdD) \qquad (53)$$

schreiben, woraus man durch weitere Entwickelung eine dritte Form

$$dS'' = \alpha dh + \beta dk + \gamma dp + \delta dq \qquad (54)$$

ableitet, in der

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= np + N(AC_1 + BD_1)\,, & \gamma &= N(AC_3 + BD_3)\,, \\ \beta &= nq + N(AC_2 + BD_2)\,, & \delta &= N(AC_4 + BD_4) \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

ist. Hiermit berechne man die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial k} - \frac{\partial\beta}{\partial h} &= N(CA)_{12} + N(DB)_{12}, & \frac{\partial\beta}{\partial p} - \frac{\partial\gamma}{\partial k} &= N(CA)_{23} + N(DB)_{23}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial p} - \frac{\partial\gamma}{\partial h} &= N(CA)_{13} + N(DB)_{13} + n, & \frac{\partial\beta}{\partial q} - \frac{\partial\delta}{\partial k} &= N(CA)_{24} + N(DB)_{24} + n, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial q} - \frac{\partial\delta}{\partial h} &= N(CA)_{14} + N(DB)_{14}, & \frac{\partial\gamma}{\partial q} - \frac{\partial\delta}{\partial p} &= N(CA)_{34} + N(DB)_{34}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Wegen (28) und (51 b) verschwinden die rechten Seiten dieser Gleichungen, folglich sind auch die linken Seiten gleich Null, d. h. der Ausdruck dS'' ist ein totales Differential oder, noch kürzer ausgedrückt, dS'' ist integrabel. Dieses Ergebniss lässt sich umkehren. Man denke sich mit den vier vorläufig willkürlichen Functionen A, B, C, D und den zwei vorläufig ebenfalls willkürlichen Constanten

n, N den Ausdruck dS' gebildet und diesen in der Form dS'' geschrieben, dann verschwinden, wenn dS'' integrabel ist, in (56) die linken Seiten. Das daraus folgende Verschwinden der rechten Seiten führt aber wieder auf die MALUS'sche Bedingung. Letztere ist also aequivalent mit der Integrabilität von dS''.

Die Integration von dS'' liefert eine gewisse Function $F(h, k, p, q)$ für S''. Wir wollen nun für den Augenblick voraussetzen, dass in den Abbildungsgleichungen (51a) die beiden letzten

$$P = C(h, k, p, q)\ , \qquad Q = D(h, k, p, q) \tag{57}$$

nach den p, q auflösbar seien, dass also (51a) sich in die Form

$$\left.\begin{array}{ll} np = \varphi(h, k, P, Q)\ , & nq = \psi(h, k, P, Q)\ , \\ NH = \Phi(h, k, P, Q)\ , & NK = \Psi(h, k, P, Q) \end{array}\right\} \tag{58}$$

bringen lasse. Drückt man unter dieser Voraussetzung die p, q durch die h, k, P, Q aus, so verwandelt sich dS'' in dS, wobei die Integrabilität nicht geändert wird, ferner verwandelt sich $F(h, k, p, q)$ in einen Ausdruck $E(h, k, P, Q)$, und man hat

$$dE(h, k, P, Q) = dS = n(pdh + qdk) + N(HdP + KdQ)\ ,$$

woraus

$$np = \frac{\partial E}{\partial h}, \quad nq = \frac{\partial E}{\partial k}, \quad NH = \frac{\partial E}{\partial P}, \quad NK = \frac{\partial E}{\partial Q} \tag{59}$$

folgt. Dieses System muss nun identisch mit (58) sein, denn sonst erhielte man aus der Verbindung von (58) und (59), d. h. also als Folge der Abbildungsgleichungen (51a) und der Bedingungen (51b), wenigstens eine Gleichung von der Form

$$0 = f(h, k, P, Q)\ ,$$

was wieder die vorhin gemachte Voraussetzung wäre. Hiermit haben wir den Satz: Wenn die Abbildungsgleichungen in der Form (58) geschrieben werden können, so sind die rechten Seiten gleich den partiellen Ableitungen einer bestimmten Function $E(h, k, P, Q)$.

Man denke sich jetzt umgekehrt eine Function $E(h, k, P, Q)$ beliebig gegeben und mit ihr das Gleichungssystem (59) gebildet. Ist E so gewählt, dass die Gleichungen (59) nach den H, K, P, Q oder den h, k, p, q aufgelöst werden können, so ist durch (59) eine bestimmte strahlenweise Abbildung definiert. Für diese ist der Ausdruck

$$dS = n(pdh + qdk) + N(HdP + KdQ)$$

ein totales Differential, nämlich gleich dE, ferner folgt, dass das aus dS abgeleitete dS'' integrabel ist, also auch die MALUS'sche Bedingung erfüllt wird. Es genügt also, dass die Abbildungsgleichungen in der Form (59) geschrieben werden können, um sicher zu sein, dass die Abbildung die MALUS'schen Bedingungen erfülle. Die Function E spielt hierbei die Rolle einer die Abbildungsgleichungen erzeugenden Function; wir werden fortan solche Functionen als die Eikonale der betrachteten Abbildung bezeichnen.

Bei den vorstehenden Ueberlegungen war vorausgesetzt worden, dass die Gleichungen (57) nach den p, q auflösbar seien. Um die hierbei auftretenden Möglichkeiten vollständiger zu übersehen, sei zunächst bemerkt, dass der Ausdruck $(CD)_{34}$ die Functionaldeterminante der C, D, gebildet nach den p, q, ist. Wenn dieser Ausdruck, den wir die kritische Determinante des Eikonals $E(h, k, P, Q)$ nennen werden, nicht identisch verschwindet, so sind die Gleichungen (57) nach den p, q auflösbar und man kann die Abbildung in der Form (58) ansetzen, womit dann zugleich die Existenz des Eikonals $E(h, k, P, Q)$ festgestellt ist. Umgekehrt darf, wenn das Eikonal existirt, $(CD)_{34}$ nicht identisch verschwinden. Denn wenn $(CD)_{34}$ identisch verschwindet, so würde aus den Gleichungen (57) wenigstens eine Relation der Form

$$0 = f(h, k, P, Q)$$

folgen, was mit dem Bestehen des Gleichungssystems (59) unverträglich ist. Wir können also sagen: das Eikonal $E(h, k, P, Q)$ fehlt oder existiert, je nachdem die kritische Determinante $(CD)_{34}$ identisch verschwindet oder von Null verschieden ist.

Die Determinante $(CD)_{34}$ kann nun unter Umständen verschwinden, was sich am einfachsten an einem Beispiel, wie

$$H = A \equiv -p, \quad K = B \equiv -q, \quad P = C \equiv h, \quad Q = D \equiv k, \quad n = N,$$

nachweisen lässt. Das Eikonal $E(h, k, P, Q)$ ist dann nicht vorhanden, weil die Abbildungsgleichungen nicht nach den H, K, p, q aufgelöst werden können. In diesem Falle existieren aber immer andere Eikonalformen, die an die Stelle des fehlenden Eikonals treten. Es lassen sich nämlich in den MALUS'schen Bedingungs-

gleichungen mit den Veränderlichen h, k, p, q und H, K, P, Q bestimmte Vertauschungen vornehmen, durch welche diese Gleichungen nicht geändert werden. In Folge dessen bleibt auch die Integrabilität der Differentialausdrücke dS, dS', dS'' bestehen, wenn man in ihnen dieselben Vertauschungen vornimmt. Bezeichnet man nach der üblichen Schreibweise eine Substitution, die die Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots$ in $y_1, y_2, y_3, \dots$ überführt, durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \dots \\ y_1, & y_2, & y_3, & \dots \end{pmatrix},$$

so sind die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} h, & p \\ -p, & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k, & q \\ -q, & k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H, & P \\ -P, & H \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K, & Q \\ -Q, & K \end{pmatrix}, \tag{60}$$

sei es einzeln, sei es combiniert angewendet, von der soeben angegebenen Beschaffenheit. Sie sind, wie man sich am einfachsten durch ein directes Ausprobieren überzeugt, zugleich die einzigen, die, ohne die MALUS'schen Gleichungen zu alterieren, das dS ändern. Die Anwendung der Substitutionen (60) auf dS liefert 16 verschiedene Formen, die wir mit der Abkürzung

$$\frac{p, q, H, K}{h, k, P, Q} = n(p\,dh + q\,dk) + N(H\,dP + K\,dQ) \tag{61}$$

in der nachstehenden Tabelle zusammenstellen:

$$\left.\begin{array}{llll}
[1] = \dfrac{p, q, H, K}{h, k, P, Q}, & [2] = \dfrac{h, q, H, K}{-p, k, P, Q}, & [3] = \dfrac{p, k, H, K}{h, -q, P, Q}, & [4] = \dfrac{h, k, H, K}{-p, -q, P, Q}, \\
[5] = \dfrac{p, q, -P, K}{h, k, H, Q}, & [6] = \dfrac{h, q, -P, K}{-p, k, H, Q}, & [7] = \dfrac{p, k, -P, K}{h, -q, H, K}, & [8] = \dfrac{h, k, -P, K}{-p, -q, H, Q}, \\
[9] = \dfrac{p, q, H, -Q}{h, k, P, K}, & [10] = \dfrac{h, q, H, -Q}{-p, k, P, K}, & [11] = \dfrac{p, k, H, -Q}{h, -q, P, K}, & [12] = \dfrac{h, k, H, -Q}{-p, -q, P, K}, \\
[13] = \dfrac{p, q, -P, -Q}{h, k, H, K}, & [14] = \dfrac{h, q, -P, -Q}{-p, k, H, K}, & [15] = \dfrac{p, k, -P, -Q}{h, -q, H, K}, & [16] = \dfrac{h, k, -P, -Q}{-p, -q, H, K}.
\end{array}\right\} \tag{62}$$

Diese sechzehn Formen gehen bei Anwendung der Substitutionen (60) in einander über, bilden also eine in sich geschlossene Gruppe. Um die entsprechenden kritischen Determinanten zu finden, hat man in $(CD)_{34}$ dieselben Substitutionen vorzunehmen, die die Eikonalform [1] in die fünfzehn anderen Formen überführen. Dies giebt für die kritischen Determinanten die nachstehende Tabelle, die Glied für Glied der Zusammenstellung (62) entspricht:

$$\left.\begin{array}{llll}(CD)_{34}, & (CD)_{14}, & (CD)_{23}, & (CD)_{12}, \\ (AD)_{34}, & (AD)_{14}, & (AD)_{23}, & (AD)_{12}, \\ (CB)_{34}, & (CB)_{14}, & (CB)_{23}, & (CB)_{12}, \\ (AB)_{34}, & (AB)_{14}, & (AB)_{23}, & (AB)_{12}.\end{array}\right\} \quad (63)$$

Jedesmal wenn in (62) eine Eikonalform ausfällt, weil sie nicht möglich ist, tritt in (63) an der entsprechenden Stelle eine Null auf, und umgekehrt. Wir wollen nun zeigen, dass in einer Zeile oder in einer Spalte von (63) nie mehr als drei Nullen auftreten dürfen. Wäre z. B.

$$(CD)_{34} = (CD)_{14} = (CD)_{23} = (CD)_{12} = 0,$$

so müsste wegen der Identität

$$(CD)_{12}(CD)_{34} + (CD)_{13}(CD)_{42} + (CD)_{14}(CD)_{23} \equiv 0$$

auch

$$(CD)_{13}(CD)_{42} = 0$$

sein, was mit der MALUS'schen Bedingungsgleichung

$$0 = (CD) = (CD)_{13} + (CD)_{24}$$

verbunden sofort

$$(CD)_{13} = (CD)_{24} = 0$$

gäbe, d. h. die sechs aus den C_α und D_α zu bildenden Determinanten wären sämmtlich gleich Null, woraus das Verschwinden von

$$\Delta = (ABCD)_{1234} = 0$$

folgen würde. Da dies unstatthaft ist, und da man ferner die benutzte Schlussweise unter Anwendung von (60) sofort auf die übrigen Zeilen und Spalten von (63) übertragen darf, so ergiebt sich, dass in jeder Zeile und jeder Spalte von (63) wenigstens ein von Null verschiedenes Glied vorkommen muss. Entsprechend tritt in jeder Zeile und jeder Spalte von (62) wenigstens eine mögliche Eikonalform auf, so dass die Anzahl der für eine gegebene Abbildung wirklich existirenden Eikonale mindestens vier beträgt. Dass übrigens Abbildungen mit nur vier Eikonalen vorkommen können, ersieht man am einfachsten aus einem concreten Falle, wie z. B.

$$H = A \equiv h, \quad K = B \equiv k, \quad P = C \equiv p, \quad Q = D \equiv q.$$

Untersucht man die Fälle mit nur vier Eikonalen genauer, so ergiebt

sich, wie ich hier beiläufig anführen will, für die Abbildungen mit dem Eikonal [1] die Form

$$E(h,k,P,Q) = P(\alpha h + \beta) + Q(\gamma k + \delta) + \varepsilon h + \zeta k + \eta,$$

wo die α, β, ... Constanten bedeuten; entsprechend sind die Eikonale für die anderen möglichen Fälle zusammengesetzt.

Da das Verschwinden einer kritischen Determinante den A, B, C, D eine besondere Bedingung, über den MALUS'schen Satz hinaus, auferlegt, so kann man sagen, dass *im Allgemeinen*, d. h. bei einer beliebig herausgegriffenen Abbildung, alle sechzehn Eikonale vorhanden sein werden. Diese sechzehn Formen besitzen allerdings in einem gegebenen Falle für die Anwendung nicht alle den gleichen Werth. In den Eikonalen [1], [4], [13], [16] treten die Seitenaxen der Coordinaten gleichartig auf, sei es mit den Strecken h, k oder H, K, sei es mit den Richtungsgrössen p, q oder P, Q. Diese Formen werden also den Vorzug verdienen, wenn die Abbildung in den verschiedenen Richtungen um die x-Axen herum keine wesentlichen Verschiedenheiten bietet. Beispiele hierfür sind: die gewöhnlichen Linsensysteme, der Wassertropfen des Regenbogens, die Erdatmosphäre u. a. m. Bei den übrigen zwölf Eikonalformen findet hinsichtlich des Vorkommens der Veränderlichen zwischen den Seitenaxen in wenigstens einem der beiden Räume ω, Ω eine ausgesprochene Verschiedenheit statt. Diese Formen können von Vortheil sein, wenn auch die Abbildung selber entsprechende Verschiedenheiten nach den Seitenaxen aufweist. Beispiele hierfür sind die Prismensysteme und die Cylinderlinsen. Für die Untersuchungen allgemeiner Natur reicht man übrigens mit den vier Formen [1], [4], [13] und [16] aus, ja im Grunde genommen kann man schon mit [1] auskommen. Um zu übersehen, wann eine dieser vier Formen ausfällt, hat man die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Determinanten

$$(CD)_{34}, \quad (CD)_{12}, \quad (AB)_{34}, \quad (AB)_{12}$$

aufzusuchen. Ich beginne mit dem Falle $(AB)_{34} = 0$, der zu [13] gehört. Diese Bedingung besagt, dass zwischen den h, k, H, K wenigstens eine Gleichung der Form

$$0 = f(h,k,H,K) \tag{64}$$

besteht. Ist h und k constant, so ist (64) die Gleichung einer Curve in der Grundebene von Ω. Ein homocentrisches σ-Büschel, dessen Spitze in der Grundebene von ω liegt, erzeugt also ein Σ-Büschel, dessen Strahlen durch eine bestimmte, von den h, k abhängende Curve in der YZ-Ebene hindurchgehen. Von den beiden Schalen der Kaustik des Σ-Büschels artet also die èine aus, und zwar in die eben genannte Curve. In Folge dessen besteht auf den zugehörigen Wellen die eine Schaar der Krümmungslinien aus Kreisen. Setzt man andererseits H und K constant, so gelangt man zu ähnlichen Sätzen, nur dass ω und Ω ihre Rollen vertauschen. Die beiden Grundebenen sind hierbei Flächen konischer Punkte und es existirt eine μ_3 von konischen Punktepaaren.

Ist $(CD)_{34} = 0$, so existirt wenigstens eine Gleichung von der Form

$$0 = f(h, k, P, Q).$$

Das homocentrische Büschel »h, k constant« erzeugt in Ω eine Kaustik, deren eine Schale in eine unendlich ferne Curve ausartet. Die zugehörigen Wellen sind in Folge dessen abwickelbare Flächen. Ferner gehört zu einem parallelen Σ-Büschel in ω eine Kaustik, deren eine Schale in eine Curve in der yz-Ebene ausartet. Der Fall, wo $(AB)_{12}$ verschwindet, führt zu dem gleichen Resultat wie der vorhergehende, nur dass ω und Ω ihre Rollen vertauschen.

Da sich in den drei behandelten Fällen die Eigenschaft, dass die Ausartungscurven in den Grundebenen liegen, durch eine Aenderung der Coordinatenaxen sofort aufheben lässt, so sieht man, dass man bei jeder Abbildung die Existenz der Eikonalformen [1], [13], [16] durch passende Wahl der Axen herbeiführen kann. Anders liegt die Sache bei [4], wenn $(CD)_{12} = 0$. In diesem Falle existirt wenigstens eine Gleichung der Form

$$0 = f(p, q, P, Q).$$

Parallelbüschel in ω erzeugen in Ω eine Kaustik mit unendlich ferner Ausartungscurve, und das Gleiche gilt bei parallelen Σ-Büscheln für den Raum ω.

Für die weitere Untersuchung ist es zweckmässig, die sechzehn verschiedenen Formen auf ein einheitlich zu behandelndes Schema zu bringen, das jetzt aufgestellt werden soll.

VI.

Die einzelnen Eikonale waren entstanden durch die Integration der in (62) zusammengestellten Differentialausdrücke

$$dS = \frac{p,\ q,\ H,\ K}{h,\ k,\ P,\ Q} = n(pdh + qdk + N(HdP + KdQ)\ ,$$

. . . .

Die Grössen unter dem Horizontalstriche enthalten die unabhängigen Veränderlichen des Eikonals, deren Differentiale in dS auftreten; die Grössen über dem Strich sind, abgesehen von den Factoren $\pm n$, $\pm N$, die Coefficienten dieser Differentiale. Man erhält in allen sechzehn Fällen die erste, zweite, dritte und vierte Unabhängige, wenn man aus den vier Grössenpaaren

$$(hk)\ ,\quad (pq)\ ,\quad (HK)\ ,\quad (PQ) \tag{65}$$

der Reihe nach je ein Element herausgreift. Nennt man der Reihe nach die ausgewählten Elemente t, u, T, U, so ist durch das Zeichen

$$E(t,\ u,\ T,\ U)$$

der Platz des entsprechenden Eikonals in der Tabelle (62) vollständig bestimmt. Hierbei werden zugleich die vier Veränderlichen der Reihe nach den vier Seitenaxen in der Ordnung y, z, Y, Z zugeordnet. Bezeichnet man ferner die Veränderlichen, die in (65) nach Auswahl der t, u, T, U übrig bleiben, der Reihe nach mit v, w, V, W, so ist

$$dE(t,\ u,\ T,\ U) = \pm\, nvdt \pm nwdu \pm NVdT \pm NWdU\ ,$$

wo noch die Regel für die Vorzeichen anzugeben ist. Nun sind die acht Veränderlichen der Abbildung theils lineare Grössen oder Strecken, wie h, k, H, K, theils Richtungsgrössen, wie p, q, P, Q, und man sieht, dass in dS das Zeichen + oder — auftritt, je nachdem die Differentiale dt, du, dT, dU aus der Reihe dh, dk, dP, dQ oder aus der Reihe dp, dq, dH, dK genommen sind. Bedeutet also das Zeichen $\epsilon(x)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem x eine Strecke oder eine Richtungsgrösse ist, so wird allgemein

$$dE(t,u,T,U) = n\epsilon(t)vdt + n\epsilon(u)wdu - N\epsilon(T)VdT - N\epsilon(U)WdU, \tag{66}$$

woraus sofort die Abbildungsgleichungen in der Form

$$\left.\begin{array}{ll} n\varepsilon(t)v = \dfrac{\partial E}{\partial t}, & n\varepsilon(u)w = \dfrac{\partial E}{\partial u}, \\ -N\varepsilon(T)V = \dfrac{\partial E}{\partial T}, & -N\varepsilon(U)W = \dfrac{\partial E}{\partial U} \end{array}\right\} \quad (67)$$

folgen. Der Buchstabe E ist hierbei zunächst das Zeichen für eine Operation, deren Gestalt offenbar sowohl von der betrachteten Abbildung als auch von der Auswahl der unabhängigen Veränderlichen abhängt; das Resultat der Operation ist dann eine Function, deren Form ebenfalls von den beiden genannten Dingen abhängig ist.

Die Gleichungen (67) besagen, dass zwischen den je vier Grössen

$$nh,\ nk,\ p, q \text{ und } NH,\ NK,\ P, Q$$

eine Berührungstransformation besteht. In diesem Satze ist der eigentliche Ursprung aller der Eigenschaften zu suchen, die den hier betrachteten Abbildungen gemeinsam sind. So lange die Abbildung unbestimmt bleibt, kann der Ausdruck E irgend eine beliebige Gestalt besitzen, mit der einen Einschränkung, dass die Gleichungen (67) eine wirkliche Abbildung darstellen müssen, dass also das System (67) sowohl nach den t, u, v, w, als auch nach den T, U, V, W muss aufgelöst werden können. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht darin, dass die Determinante

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial T}\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial U} - \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial U}\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial T} \quad (68)$$

nicht identisch verschwinde.

Sind $E(t, u, T, U)$ und $E(t_1, u_1, T_1, U_1)$ zwei verschiedene Eikonale derselben Abbildung, so liefern in der Differenz

$$dE(t, u, T, U) - dE(t_1, u_1, T_1, U_1)$$

die Anfangsglieder der beiden dE den Beitrag

$$n\varepsilon(t)v\,dt - n\varepsilon(t_1)v_1\,dt_1,$$

den wir in der Form

$$n\frac{\varepsilon(t)+\varepsilon(t_1)}{2}(v\,dt - v_1\,dt_1) + n\frac{\varepsilon(t)-\varepsilon(t_1)}{2}(v\,dt + v_1\,dt_1)$$

schreiben. Das Product

$$[\varepsilon(t) + \varepsilon(t_1)] \cdot [v\,dt - v_1\,dt_1]$$

ist immer gleich Null, da nur folgende zwei Fälle

$$\text{I}: \quad t = v_1, \quad v = t_1,$$
$$\text{II}: \quad t = t_1, \quad v = v_1,$$

möglich sind, und für I der erste, für II dagegen der zweite Factor verschwindet. Schreibt man ferner

$$[\varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)] . [v dt + v_1 dt_1] = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)] . d(tt_1)$$
$$+ [\varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)] . [(v - t_1) dt + (v_1 - t) dt_1],$$

so verschwindet der zweite Summandus rechts für die beiden Fälle I und II, so dass als Beitrag zu der betrachteten Differenz der dE in allen Fällen der Ausdruck

$$n \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)}{2} d(tt_1)$$

angesetzt werden darf. Hieraus ergiebt sich, wenn man von der in den E immer hinzuzudenkenden, im Uebrigen aber belanglosen additiven Constante absieht,

$$E(t, u, T, U) - E(t_1, u_1, T_1, U_1) = n \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t_1)}{2} tt_1 + n \frac{\varepsilon(u) - \varepsilon(u_1)}{2} uu_1$$
$$- N \frac{\varepsilon(T) - \varepsilon(T_1)}{2} TT_1 - N \frac{\varepsilon(U) - \varepsilon(U_1)}{2} UU_1. \quad (69)$$

Hiermit ist die Beziehung zwischen zwei Eikonalen derselben Abbildung gegeben, natürlich unter der Voraussetzung, dass beide existieren. Uebrigens lässt sich, auch wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, der Gleichung (69) ein Sinn beilegen. Man hat nur zu beachten, dass die Eikonale ursprünglich als Functionen der h, k, p, q durch Integratien eines Ausdruckes von der Form

$$dE = \alpha dh + \beta dk + \gamma dp + \delta dq$$

erzeugt worden waren. Denkt man sich nun statt der E die so erhaltenen Functionen eingesetzt, und entsprechend die T, U, T_1, U_1 als Functionen der h, k, p, q ausgedrückt, so wird (69) eine Identität.

Bezeichnet man die Ableitungen des Eikonals $E(t, u, T, U)$ durch Indices nach dem Schema

$$dE = E_1 dt + E_2 du + E_3 dT + E_4 dU,$$
$$dE_\alpha = E_{\alpha 1} dt + E_{\alpha 2} du + E_{\alpha 3} dT + E_{\alpha 4} dU,$$

so folgt aus den Abbildungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} n\varepsilon(t)v = E_1\,, & n\varepsilon(u)w = E_2\,, \\ -N\varepsilon(T)V = E_3\,, & -N\varepsilon(U)W = E_4 \end{array}\right\} \quad (70)$$

durch Differentiation

$$\left.\begin{aligned} n\varepsilon(t)dv &= E_{11}dt + E_{12}du + E_{13}dT + E_{14}dU\,, \\ n\varepsilon(u)dw &= E_{21}dt + E_{22}du + E_{23}dT + E_{24}dU\,, \\ -N\varepsilon(T)dV &= E_{31}dt + E_{32}du + E_{33}dT + E_{34}dU\,, \\ -N\varepsilon(U)dW &= E_{41}dt + E_{42}du + E_{43}dT + E_{44}dU\,. \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Die Auflösung nach dT, dU, dV, dW giebt unter Benutzung der früher erwähnten Determinantenbezeichnung

$$\left.\begin{aligned} (E_3E_4)_{12}dT &= -(E_1E_4)_{12}dt - (E_2E_4)du + n\varepsilon(t)E_{24}dv - n\varepsilon(u)E_{14}dw, \\ (E_3E_4)_{12}dU &= (E_1E_3)_{12}dt + (E_2E_3)du + n\varepsilon(t)E_{23}dv + n\varepsilon(u)E_{13}dw, \end{aligned}\right\} (72)$$

$$\left.\begin{aligned} -N\varepsilon(T)(E_3E_4)_{12}dV = {} & (E_1E_2E_3)_{134}dt + (E_1E_2E_4)_{234}du \\ & + n\varepsilon(t)(E_3E_2)_{34}dv + n\varepsilon(u)(E_1E_3)_{34}dw\,, \\ -N\varepsilon(U)(E_3E_4)_{12}dW = {} & (E_1E_2E_4)_{134}dt + (E_1E_2E_4)_{234}du \\ & + n\varepsilon(t)(E_4E_2)_{34}dv + n\varepsilon(u)(E_1E_4)_{34}dw\,. \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Bezeichnet man die Ableitungen der T, U, V, W nach den t, u, v, w durch Indices nach dem Schema

$$dT = T_1dt + T_2du + T_3dv + T_4dw$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so erhält man durch Spaltung nach den dt, du, dv, dw aus den Gleichungen (72) und (73) die T_α, U_α, V_α, W_α, d. h. die partiellen Ableitungen der früher benutzten Abbildungsfunctionen A, B, C, D nach den h, k, p, q. Um umgekehrt die $E_{\alpha\beta}$ durch die T_α, U_α, V_α, W_α auszudrücken, wollen wir die linken Seiten in (70) mit (1), (2), (3), (4) bezeichnen, also

$$(1) = n\varepsilon(t)v, \quad (2) = n\varepsilon(u)w, \quad (3) = -N\varepsilon(T)V, \quad (4) = -N\varepsilon(U)W$$

schreiben, dann ist

$$d(\alpha) = E_{\alpha 1}dt + E_{\alpha 2}du + E_{\alpha 3}dT + E_{\alpha 4}dU,$$

woraus durch Spaltung nach den dt . . . die vier Gleichungssysteme

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha)}{\partial t} &= E_{\alpha 1} \qquad\quad + E_{\alpha 3} T_1 + E_{\alpha 4} U_1\,,\\
\frac{\partial(\alpha)}{\partial u} &= \qquad E_{\alpha 2} + E_{\alpha 3} T_2 + E_{\alpha 4} U_2\,,\\
\frac{\partial(\alpha)}{\partial v} &= \qquad\qquad\quad E_{\alpha 3} T_3 + E_{\alpha 4} U_3\,,\\
\frac{\partial(\alpha)}{\partial w} &= \qquad\qquad\quad E_{\alpha 3} T_4 + E_{\alpha 4} U_4
\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

folgen. Die Auflösung ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}
(TU)_{34} E_{\alpha 1} &= (TU)_{34} \frac{\partial(\alpha)}{\partial t} + (TU)_{41} \frac{\partial(\alpha)}{\partial v} + (TU)_{13} \frac{\partial(\alpha)}{\partial w}\,,\\
(TU)_{34} E_{\alpha 2} &= (TU)_{34} \frac{\partial(\alpha)}{\partial u} + (TU)_{42} \frac{\partial(\alpha)}{\partial v} + (TU)_{23} \frac{\partial(\alpha)}{\partial w}\,,\\
(TU)_{34} E_{\alpha 3} &= \qquad U_4 \frac{\partial(\alpha)}{\partial v} - \qquad U_3 \frac{\partial(\alpha)}{\partial w}\,,\\
(TU)_{34} E_{\alpha 4} &= -\, T_4 \frac{\partial(\alpha)}{\partial v} + \qquad T_3 \frac{\partial(\alpha)}{\partial w}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Die $E_{\alpha\beta}$ mit ungleichen Indices werden hierbei auf doppelte Weise bestimmt; die Gleichsetzung der so erhaltenen Ausdrücke liefert nichts Anderes als die MALUS'schen Bedingungen.

Sind in einem vorgelegten Eikonal $E(t, u, T, U)$ die Werthe der vier Strahlencoordinaten t, u, T, U gegeben, so sind dadurch aus den vier Abbildungsgleichungen (70) auch die Werthe der vier übrigen Coordinaten v, w, V, W und damit die beiden conjugierten Strahlen σ, Σ und der Lichtweg (σ, Σ) bestimmt. Wir wollen demgemäss die Combination $(tuTU)$ als Lichtwegcoordinaten ansehen und kurz von dem Lichtwege (t, u, T, U) sprechen. Soll nun ein Lichtweg im Object- und Bildraume durch die Punkte $\pi(xyz)$ und $\Pi(XYZ)$ hindurchgehen, so erhält man die Bedingungen hierfür, wenn man zu den vier Abbildungsgleichungen (70) die vier weiteren Gleichungen

$$y = h + \frac{xp}{m}, \quad z = k + \frac{xq}{m}, \quad Y = H + \frac{XP}{M}, \quad Z = K + \frac{XQ}{M} \tag{76}$$

hinzufügt. Die Auflösung von (70) und (76) nach den acht Strahlencoordinaten würde dann den durch π und Π hindurchführenden Lichtweg bestimmen. Drückt man nun in (70) auf den linken Seiten die

v, w, V, W zunächst mittelst (76) durch die x, y, z, X, Y, Z und die t, u, T, U aus, so ergiebt die Durchrechnung der sechzehn verschiedenen Fälle, dass die linken Seiten gleich den partiellen Ableitungen bestimmter Ausdrücke werden. Dieser Umstand gestattet den durch (70) und (76) gegebenen Bedingungen eine einfache Form zu geben. Es möge genügen, mit Unterdrückung der Zwischenrechnung, nur das Resultat anzusetzen. Es werde zunächst gebildet

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{x}{m} = \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + (z-k)^2}\,, \\ l' &= kp + \frac{x}{m} = py + \sqrt{1-p^2}\,.\,\sqrt{x^2 + (z-k)^2}\,, \\ l'' &= kq + \frac{x}{m} = qz + \sqrt{1-q^2}\,.\,\sqrt{x^2 + (y-h)^2}\,, \\ l''' &= xm + yp + zq\,, \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

wo diese Ausdrücke beziehungsweise als Functionen von h und k, p und k, h und q, p und q aufzufassen sind, und ferner

$$\left.\begin{aligned} p\,dh + q\,dk &= -\,dl\,, & h\,dp - q\,dk &= dl'\,, \\ p\,dh - k\,dq &= -\,dl''\,, & h\,dp + k\,dq &= dl''' \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

ist. Zu diesen Gleichungen (77) und (78) denke man sich noch die entsprechenden Ausdrücke für die auf den Bildraum Ω bezüglichen Grössen L, L', L'', L''' hinzugefügt. Hiermit bilde man weiter die nachstehende Tabelle der Ausdrücke $F(t, u, T, U)$, die Glied für Glied der Tabelle (62) der sechzehn Eikonale entspricht:

$$\left.\begin{aligned} &[1]\colon F(h,k,P,Q) = -nl + NL''', && [2]\colon F(p,k,P,Q) = -nl' + NL''', \\ &[3]\colon F(h,q,P,Q) = -nl'' + NL''', && [4]\colon F(p,q,P,Q) = -nl''' + NL''', \\ &[5]\colon F(h,k,H,Q) = -nl + NL'', && [6]\colon F(p,k,H,Q) = -nl' + NL'', \\ &[7]\colon F(h,q,H,Q) = -nl'' + NL'', && [8]\colon F(p,q,H,Q) = -nl''' + NL'', \\ &[9]\colon F(h,k,P,K) = -nl + NL', && [10]\colon F(p,k,P,K) = -nl' + NL', \\ &[11]\colon F(h,q,P,K) = -nl'' + NL', && [12]\colon F(p,q,P,K) = -nl''' + NL', \\ &[13]\colon F(h,k,H,K) = -nl + NL\,, && [14]\colon F(p,k,H,K) = -nl' + NL\,, \\ &[15]\colon F(h,q,H,K) = -nl'' + NL\,, && [16]\colon F(p,q,H,K) = -nl''' + NL\,. \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Bildet man jetzt, alle sechzehn Fälle zusammenfassend, den Ausdruck

$$\Theta(t, u, T, U) = E(t, u, T, U) - F(t, u, T, U)\,, \qquad (80)$$

so lässt sich das System der acht Gleichungen (70) und (76) durch die vier Bedingungen

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial T} = \frac{\partial \Theta}{\partial U} \tag{81}$$

ersetzen, die besagen, dass der Lichtweg (t, u, T, U) durch die beiden Punkte $\pi(xyz)$ und $\Pi(XYZ)$ hindurchgehen soll.

Um für die späteren Anwendungen Alles beisammen zu haben, ist noch die Regel für das Eikonal einer zusammengesetzten Abbildung abzuleiten. Es seien die drei Räume ω_1, ω_2, ω_3 mit den Indices n_1, n_2, n_3 und den Coordinaten

$$h_1, k_1, p_1, q_1, \quad h_2, k_2, p_2, q_2, \quad h_3, k_3, p_3, q_3$$

der drei Strahlen σ_1, σ_2, σ_3 eines Lichtweges gegeben. Man wähle für die Eikonale der drei Abbildungen $(\omega_1 \omega_2)$, $(\omega_2 \omega_3)$, $(\omega_3 \omega_1)$ aus den Variablenpaaren $(h_1 p_1)$, $(h_2 p_2)$, $(h_3 p_3)$ die drei Veränderlichen t_1, t_2, t_3 aus, und ebenso aus den Paaren $(k_1 q_1)$, $(k_2 q_2)$, $(k_3 q_3)$ die Veränderlichen u_1, u_2, u_3, während die in den Paaren übrigbleibenden Grössen dem Früheren entsprechend mit v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 bezeichnet werden sollen. Denkt man sich jetzt auf Grund der getroffenen Wahl zu den drei Abbildungen die drei Eikonale

$$\Phi'' = E(t_1, u_1, t_2, u_2), \quad \Phi = E(t_2, u_2, t_3, u_3), \quad \Phi' = E(t_3, u_3, t_1, u_1)$$

angesetzt, so folgt aus der Definitionsgleichung (66) sofort

$$d\Phi + d\Phi' + d\Phi'' = 0,$$

woraus wir weiter, da es auf die additiven Constanten in den Φ nicht ankommt,

$$\Phi + \Phi' + \Phi'' = 0 \tag{82}$$

erhalten. Setzt man ferner nach (67) die dreimal vier Abbildungsgleichungen an, in denen offenbar die v, w auf doppelte Weise ausgedrückt vorkommen, so erhält man durch Elimination der v, w die Relationen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t_1}(\Phi' + \Phi'') = \frac{\partial}{\partial t_2}(\Phi'' + \Phi) = \frac{\partial}{\partial t_3}(\Phi + \Phi'), \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u_1}(\Phi' + \Phi'') = \frac{\partial}{\partial u_2}(\Phi'' + \Phi) = \frac{\partial}{\partial u_3}(\Phi + \Phi'). \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Da zwischen den sechs Veränderlichen t, u nur zwei Bedingungen bestehen dürfen, so sind von den sechs Gleichungen (83) vier eine Folge der beiden übrigen.

Für die Anwendung ist es zweckmässig, den vorstehenden Formeln, unter Verzicht auf die Symmetrie, eine etwas andere Gestalt zu geben. Man denke sich die Abbildungen $(\omega_1\, \omega_2)$ und $(\omega_2\, \omega_3)$ gegeben, und hieraus die zusammengesetzte Abbildung $(\omega_1\, \omega_3)$ hergestellt, dann handelt es sich darum, aus den gegebenen Eikonalen

$$\Psi = E(t_1, u_1, t_2, u_2)\,, \quad \Psi' = E(t_2, u_2, t_3, u_3)$$

das Eikonal

$$\Psi'' = E(t_1, u_1, t_3, u_3)$$

für die zusammengesetzte Abbildung herzuleiten. Da

$$\Psi = \Phi''\,,\ \Psi' = \Phi\,,\ \Psi'' = -\,\Phi'$$

ist, so kann man nach (82) und (83) die Gleichungen

$$\Psi'' = \Psi + \Psi'\,, \quad 0 = \frac{\partial}{\partial t_2}(\Psi + \Psi') = \frac{\partial}{\partial u_2}(\Psi + \Psi_1')\,,$$
$$\frac{\partial \Psi''}{\partial t_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial t_1},\quad \frac{\partial \Psi''}{\partial u_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial u_1}\,,\quad \frac{\partial \Psi''}{\partial t_3} = \frac{\partial \Psi'}{\partial t_3}\,,\quad \frac{\partial \Psi''}{\partial u_3} = \frac{\partial \Psi'}{\partial u_3}$$

ansetzen. Hiermit ergiebt sich folgende Regel: *Mit den Eikonalen der beiden gegebenen Abbildungen $(\omega_1\, \omega_2)$ und $(\omega_2\, \omega_3)$ bilde man den Ausdruck*

$$S = E(t_1, u_1, t_2, u_2) + E(t_2, u_2, t_3, u_3)\,, \tag{85}$$

eliminiere hieraus mit Hülfe der Bedingungen

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t_2}\,, \quad 0 = \frac{\partial S}{\partial u_2} \tag{86}$$

die Veränderlichen t_2 und u_2, dann geht dadurch S in das Eikonal $E(t_1, u_1, t_3, u_3)$ der zusammengesetzten Abbildung $(\omega_1\, \omega_3)$ über; ferner ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_1}E(t_1,u_1,t_3,u_3) = \frac{\partial}{\partial t_1}E(t_1,u_1,t_2,u_2)\,,\quad \frac{\partial}{\partial u_1}E(t_1,u_1,t_3,u_3) = \frac{\partial}{\partial u_1}E(t_1,u_1,t_2,u_2\,,\\ \frac{\partial}{\partial t_3}E(t_1,u_1,t_3,u_3) = \frac{\partial}{\partial t_3}E(t_2,u_2,t_3,u_3)\,,\quad \frac{\partial}{\partial u_3}E(t_1,u_1,t_3,u_3) = \frac{\partial}{\partial u_3}E(t_2,u_2,t_3,u_3\,.\end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Bei dieser Regel ist es offenbar wesentlich, dass in dem Eikonal zu $(\omega_1\, \omega_2)$ das zweite Variablenpaar identisch ist mit dem ersten Variablenpaar in dem Eikonal zu $(\omega_2\, \omega_3)$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich mit Berücksichtigung von (69) eine ähnliche Regel aufstellen, die aber erheblich weniger einfach ist.

Die in (85) und (86) enthaltene Vorschrift lässt sich ohne Weiteres verallgemeinern. Sind für die r Räume $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_r$ die Abbildungen

$$(\omega_1 \omega_2), \quad (\omega_2 \omega_3), \ldots (\omega_{r-1} \omega_r)$$

mit den Eikonalen

$$E(t_1, u_1, t_2, u_2), \quad E(t_2, u_2, t_3, u_3), \ldots \quad E(t_{r-1}, u_{r-1}, t_r, u_r)$$

gegeben, so erhält man das Eikonal $E(t_1, u_1, t_r, u_r)$ für die zusammengesetzte Abbildung $(\omega_1 \omega_r)$, wenn man in dem Ausdruck

$$S = E(t_1, u_1, t_2, u_2) + \cdots + E(t_{r-1}, u_{r-1}, t_r, u_r)$$

die Veränderlichen $t_2, u_2, \ldots t_{r-1}, u_{r-1}$ mit Hülfe der Gleichungen

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t_2} = \frac{\partial S}{\partial u_2} = \cdots = \frac{\partial S}{\partial t_{r-1}} = \frac{\partial S}{\partial u_{r-1}}$$

eliminiert.

VII.

Mit den vorstehenden Entwickelungen will ich die Vorbereitungen allgemeiner Natur abbrechen und zu Anwendungen der gefundenen Sätze übergehen. Als erster Gegenstand möge die Frage der Anastigmasie behandelt werden, die zusammen mit der Aufhebung des Farbenfehlers die eigentliche Schwierigkeit für die ausführende Optik in sich schliesst.

Wenn bei der strahlenweisen Abbildung von ω auf Ω anastigmatische Körper auftreten sollen, wenn also die in ω homocentrischen Büschel im Bildraume wiederum homocentrisch werden, so ist die so erzeugte punktweise Abbildung der beiden Räume auf einander zugleich collinear, wie bereits in der Einleitung unter Verweisung auf die CZAPSKI'sche Darstellung hervorgehoben wurde. Hierbei sind die beiden Fälle der affinen oder teleskopischen und der eigentlich collinearen Abbildung von einander zu trennen. Bei der affinen Abbildung lässt sich die Beziehung zwischen den conjugierten Punkten $\pi(xyz)$ und $\Pi(XYZ)$ durch passende Wahl der Coordinatenaxen auf die Form

$$X = ax, \quad Y = by, \quad Z = cz \tag{88}$$

bringen, wo die a, b, c die für die Abbildung wesentlichen Constanten

bedeuten. Bei der eigentlich collinearen Abbildung dagegen gelangt man bei passender Wahl der Axen zu den Gleichungen

$$X = \frac{a}{x}, \quad Y = \frac{by}{x}, \quad Z = \frac{cz}{x}, \tag{89}$$

wo die a, b, c wiederum Constanten bedeuten. Zunächst sind nun die Abbildungsgleichungen zwischen den Strahlencoordinaten h, k, p, q und H, K, P, Q aufzustellen, die mit den x, y, z und X, Y, Z durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= h + \frac{xp}{m}, \qquad z = k + \frac{xq}{m}, \\ Y &= H + \frac{XP}{M}, \qquad Z = K + \frac{XQ}{M} \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

zusammenhängen.

In dem Falle der teleskopischen Abbildung erhält man aus (88) und (90) durch Elimination der y, z, Y, Z

$$b\left(h + \frac{xp}{m}\right) = H + \frac{axP}{M}, \quad c\left(k + \frac{xq}{m}\right) = K + \frac{axQ}{M},$$

woraus sich, da x beliebig längs eines Lichtweges gewählt werden kann,

$$H = bh, \quad K = ck, \quad \frac{P}{M} = \frac{bp}{am}, \quad \frac{Q}{M} = \frac{cq}{am},$$

$$\frac{1}{M^2} = 1 + \left(\frac{bp}{am}\right)^2 + \left(\frac{cq}{am}\right)^2$$

ergiebt. Mit der Abkürzung

$$\mu^2 = (am)^2 + (bp)^2 + (cq)^2 = a^2 + (b^2 - a^2)p^2 + (c^2 - a^2)q^2$$

erhält man dann die Abbildungsgleichungen in der nach den H, K, P, Q expliciten Form

$$H = bh, \quad K = ck, \quad P = \frac{bp}{\mu}, \quad Q = \frac{cq}{\mu}. \tag{91}$$

Berechnet man jetzt den MALUS'schen Bedingungen gemäss nach (51b) die Werthe der Symbole $(H, K), \ldots$, so ergiebt sich

$$(H, K) = 0, \quad (H, P) = E = \frac{b^2}{\mu} - b^2p^2\frac{b^2 - a^2}{\mu^3},$$

$$(H, Q) = -bcpq\frac{b^2 - a^2}{\mu^3}, \quad (K, P) = -bcpq\frac{c^2 - a^2}{\mu^3},$$

$$(K, Q) = E = \frac{c^2}{\mu} - c^2q^2\frac{c^2 - a^2}{\mu^3}, \quad (P, Q) = 0.$$

Nun müssen die a, b, c, wenn eine wirkliche Abbildung vorliegen soll, von Null verschieden sein; das durch den MALUS'schen Satz geforderte Verschwinden der Ausdrücke (H, Q) und (K, P) führt also auf die Bedingungen

$$b^2 = a^2, \quad c^2 = a^2, \quad E = \mu = \pm a. \tag{92}$$

Behandelt man in ähnlicher Weise die Gleichungen (89) und (90), die zu der eigentlich collinearen Abbildung gehören, so wird, mit Unterdrückung der Zwischenrechnung, die Abbildung durch die Gleichungen

$$\nu^2 = a^2 + (bh)^2 + (ck)^2,$$
$$H = \frac{bp}{m}, \quad K = \frac{cq}{m}, \quad P = \frac{bh}{\nu}, \quad Q = \frac{ck}{\nu}$$

dargestellt. Die Anwendung von (51b) giebt die beiden Bedingungen

$$0 = (H, Q) = b^3chk\frac{1-q^2}{(m\nu)^3} - bcpq\frac{a^2 + b^2h^2}{(m\nu)^3},$$
$$0 = (K, P) = bc^3hk\frac{1-p^2}{(m\nu)^3} - bcpq\frac{a^2 + c^2k^2}{(m\nu)^3},$$

die identisch, d. h. für beliebige Werthe der h, k, p, q erfüllt sein müssen. Das ist aber, da die b, c nicht gleich Null sein dürfen, nicht möglich; die MALUS'schen Bedingungen führen also auf einen Widerspruch. ***Hiernach lässt der Malus'sche Satz anastigmatische Körper nur in dem Falle zu, wo die punktweise Abbildung die Form***

$$X = \pm \mu x, \quad Y = \pm \mu y, \quad Z = \pm \mu z$$

besitzt, also eine geometrisch ähnliche ist. Dieser Fall ist z. B. bei der Spiegelung an einer Ebene verwirklicht; seiner Einfachheit halber ist es nicht nöthig ihn weiter zu verfolgen, um so weniger, als es sich in der praktischen Optik bei den wichtigsten Formen, nämlich bei den Objectiven von Mikroskop, Camera und Fernrohr, sowie bei den Ocularen gar nicht darum handelt, geometrisch ähnliche Abbildungen von Körpern herbeizuführen. Das vorstehende, übrigens bekannte, Ergebniss lässt sich auch auf geometrischem Wege herleiten, indem man zeigt, dass die Annahme anastigmatischer Körper verbunden mit dem MALUS'schen Satze für die collineare Abbildung die Eigenschaft der Winkeltreue nach sich zieht, die nur in dem Falle der geometrischen Aehnlichkeit vorhanden ist.

Nach dem eben Gesagten muss sich die Optik bei der Herstellung eigentlicher Abbildungen, von Grenzfällen abgesehen, darauf beschränken, die Anastigmasie nur zwischen bestimmten Flächen herbeizuführen. Um zu übersehen, wie weit dies mathematisch möglich ist, betrachten wir folgenden Fall. In ω und Ω sei je eine Fläche φ und Φ willkürlich gegeben, die wir kurz als Object- und Bildfläche bezeichnen wollen. Diese beiden Flächen seien irgendwie punktweise einander zugeordnet, d. h. jedem Punkte $\pi(xyz)$ in φ sei ein Punkt $\Pi(XYZ)$ in Φ conjugiert und umgekehrt. Analytisch wird dies dadurch ausgedrückt, dass die Coordinaten x, y, z und X, Y, Z als gewisse Functionen von zwei veränderlichen Parametern α und β dargestellt werden. Dies vorausgeschickt bilde man mit den vorgeschriebenen Indices n und N der beiden Räume und mit den Richtungscosinus m, p, q und M, P, Q zweier durch π und Π hindurchgehenden Strahlen σ und Σ den Ausdruck

$$\Gamma = -n(mx + py + qz) + N(MX + PY + QZ) + \psi(\alpha,\beta), \quad (93)$$

wo ψ eine willkürlich zu wählende Function der Parameter α, β bedeutet, und die rechtwinkligen Coordinaten als Functionen der beiden Parameter zu denken sind. Zwischen den Richtungen der beiden Strahlen σ, Σ setzen wir jetzt eine Beziehung fest durch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} = &-n\left(m\frac{\partial x}{\partial \alpha} + p\frac{\partial y}{\partial \alpha} + q\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) \\ &+ N\left(M\frac{\partial X}{\partial \alpha} + P\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + Q\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \\ 0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta} = &-n\left(m\frac{\partial x}{\partial \beta} + p\frac{\partial y}{\partial \beta} + q\frac{\partial z}{\partial \beta}\right) \\ &+ N\left(M\frac{\partial X}{\partial \beta} + P\frac{\partial Y}{\partial \beta} + Q\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Ist der Strahl σ gegeben, so ist damit in der Objectfläche φ auch der Punkt $\pi(xyz)$ und das Parameterpaar α, β, desgleichen auch die Richtung m, p, q bestimmt; ferner ist damit der Punkt $\Pi(XYZ)$ in Φ, und aus (94) die Richtung M, P, Q, also auch der Strahl Σ gegeben. Die Gleichungen (94) definieren daher eine strahlenweise Abbildung, die allerdings zunächst noch nicht dem MALUS'schen Satze zu genügen braucht. Lässt man den Strahl σ sich so ändern, dass

$\pi(xyz)$ fest bleibt, während die Richtung m, p, q variiert, so bleibt auch $\Pi(XYZ)$ fest, während die Richtung M, P, Q von Σ sich ändert; φ und Φ bilden also für die betrachtete Abbildung ein Paar anastigmatischer Flächen. Die Durchschnittspunkte der conjugierten Strahlen mit den Grundebenen von ω und Ω sind durch

$$h = y - \frac{xp}{m}, \quad k = z - \frac{xq}{m}, \quad H = Y - \frac{XP}{M}, \quad K = Z - \frac{XQ}{M} \tag{95}$$

gegeben. Eliminiert man jetzt aus Γ die Parameter α, β mittelst der Gleichungen (94), so verwandelt sich Γ in eine bestimmte Function $\varDelta$ der vier Veränderlichen p, q, P, Q, und das totale Differential von $\varDelta$ nimmt wegen (94) die Gestalt

$$\begin{aligned} d\varDelta = -n\left(y - \frac{xp}{m}\right)dp - n\left(z - \frac{xq}{m}\right)dq \\ + N\left(Y - \frac{XP}{M}\right)dP + N\left(Z - \frac{XQ}{M}\right)dQ \end{aligned}$$

an, die wegen (95) zu den Gleichungen

$$-nh = \frac{\partial\varDelta}{\partial p}, \quad -nk = \frac{\partial\varDelta}{\partial q}, \quad NH = \frac{\partial\varDelta}{\partial P}, \quad NK = \frac{\partial\varDelta}{\partial Q} \tag{96}$$

führt. Die betrachtete Abbildung besitzt also ein Eikonal $\varDelta$ von der Form [4] oder $E(p, q, P, Q)$, woraus weiter die Gültigkeit des MALUSschen Satzes folgt. Hiernach sind Abbildungen mit anastigmatischen Flächen nicht nur mathematisch möglich, sondern man kann auch, selbst wenn die beiden Flächen und die Art ihrer punktweisen Beziehung willkürlich vorgeschrieben werden, wegen der willkürlichen Function $\psi(\alpha, \beta)$ unendliche viele solche Abbildungen construieren.

Die Gleichungen (94) enthalten eine wichtige Beziehung zwischen conjugierten Strahlen eines anastigmatischen Büschelpaares. Da das Parameterpaar α, β die conjugierten Punkte π, Π in der Object- und Bildfläche vollständig bestimmt, so können wir diese Punkte auch durch $\pi(\alpha\beta)$ und $\Pi(\alpha\beta)$ bezeichnen. Lässt man die Parameter sich nicht unabhängig von einander ändern, sondern setzt zwischen ihnen eine Bedingung an, so durchlaufen π und Π in den beiden Flächen bestimmte Curven, die Punkt für Punkt conjugiert sind. Wir betrachten im Besonderen die beiden durch die Gleichung

$$\psi(\alpha, \beta) = \text{constans} \tag{97}$$

bestimmten Curvenschaaren in φ, Φ, und suchen die Tangente t, welche die durch $\pi(\alpha\beta)$ hindurchgehende Curve der Schaar in diesem Punkte berührt. Es werde geschrieben

$$dx = x_1 d\alpha + x_2 d\beta\,, \quad dy = y_1 d\alpha + y_2 d\beta\,, \quad dz = z_1 d\alpha + z_2 d\beta\,,$$
$$d\varphi = \psi_1 d\alpha + \psi_2 d\beta\,,$$

ferner sei $\cos(st)$ der Cosinus des Winkels zwischen zwei Richtungen s und t, dann hat man, wenn dt das Bogenelement der Curve in π bedeutet,

$$\begin{aligned} dt\cos(tx) &= dx = x_1 d\alpha + x_2 d\beta\,, \\ dt\cos(ty) &= dy = y_1 d\alpha + y_2 d\beta\,, \\ dt\cos(tz) &= dz = z_1 d\alpha + z_2 d\beta\,, \end{aligned}$$

wo die $d\alpha$ und $d\beta$ der Bedingung

$$0 = \psi_1 d\alpha + \psi_2 d\beta$$

zu genügen haben. Hiernach erhält man, wenn g einen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$g\cos(tx) = x_1\psi_2 - x_2\psi_1\,, \qquad g\cos(ty) = y_1\psi_2 - y_2\psi_1\,,$$
$$g\cos(tz) = z_1\psi_2 - z_2\psi_1\,,$$
$$g^2 = \psi_2^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2) - 2\psi_2\psi_1(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2) + \psi_2(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\,.$$

In der gleichen Weise bilden wir die Relationen für die Tangente T an die Curve durch $\Pi(\alpha\beta)$, nämlich

$$G\cos(TX) = X_1\psi_2 - X_2\psi_1\,, \qquad G\cos(TY) = Y_1\psi_2 - Y_2\psi_1\,,$$
$$G\cos(TZ) = Z_1\psi_2 - Z_2\psi_1\,,$$
$$G^2 = \psi_2^2(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2) - 2\psi_2\psi_1(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2) + \psi_1^2(X_2^2+Y_2^2+Z_2^2).$$

Aus den Gleichungen (94) folgt, wenn man sie linear mit den Factoren ψ_2 und $-\psi_1$ verbindet,

$$\begin{aligned} &n[m(x_1\psi_2 - x_2\psi_1) + p(y_1\psi_2 - y_2\psi_1) + q(z_1\psi_2 - z_2\psi_1)] \\ &= N[M(X_1\psi_2 - X_2\psi_1) + P(Y_1\psi_2 - Y_2\psi_1) + Q(Z_1\psi_2 - Z_2\psi_1)]\,, \end{aligned}$$

oder

$$ng\cos(t\sigma) = NG\cos(T\Sigma)\,. \tag{98}$$

Die Grössen, die in dieser Gleichung auftreten, beziehen sich auf die Richtungen der conjugierten Strahlen σ und Σ in dem anastigmatischen Büschelpaar mit den Spitzen $\pi(\alpha\beta)$ und $\Pi(\alpha\beta)$, ferner auf die Lage der zu π und Π gehörigen Elemente der beiden Flächen

φ und Φ, endlich auf die in $d\varphi$ und $d\Phi$ liegenden Bogenelemente der durch (97) bestimmten Curvenschaaren. Da innerhalb der beiden Flächenelemente $d\varphi$, $d\Phi$ die Grössen g, G als constant anzusehen sind, so erhält man den Satz: Innerhalb der Büschel, durch die die beiden Flächenelemente $d\varphi$, $d\Phi$ anastigmatisch auf einander abgebildet werden, ist für die conjugierten Strahlen der Quotient der beiden Cosinus cos $(t\sigma)$ und cos $(T\Sigma)$ constant. Ich will diesen Satz kurz als den Cosinussatz bezeichnen. In ihm ist der berühmte Sinussatz als besonderer Grenzfall enthalten. Um dies zu zeigen, bringen wir die Gleichungen (94) auf eine etwas andere Form. Man denke sich die Grundebenen von ω, Ω in die Berührungsebenen von $d\varphi$, $d\Phi$ gelegt, ferner die x- und X-Axe in die Normalen dieses Flächenelements, dann kann man, wenn für die Parameter α, β die Coordinaten y, z gewählt und die Seitenaxen passend gelegt werden, ansetzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0\,, & y_1 &= 1\,, & z_1 &= 0\,, \\ x_2 &= 0\,, & y_2 &= 0\,, & z_2 &= 1\,, \\ X_1 &= 0\,, & Y_1 &= a\,, & Z_1 &= 0\,, \\ X_2 &= 0\,, & Y_2 &= 0\,, & Z_2 &= b\,, \end{aligned}$$

wo a und b die Lateralvergrösserungen für die Abbildung von $d\varphi$ auf $d\Phi$ bedeuten. Setzt man ferner

$$\begin{aligned} m &= \cos r\,, & p &= \sin r \cos s\,, & q &= \sin r \sin s\,, \\ M &= \cos R\,, & P &= \sin R \cos S\,, & Q &= \sin R \sin S\,, \end{aligned}$$

wo die r, R als die Neigungen, die s, S als die Azimuthe von σ, Σ angesehen werden können, so erhält man aus (94)

$$\begin{gathered} -Na \sin R \cos S + n \sin r \cos s = \psi_1\,, \\ -Nb \sin R \sin S + n \sin r \sin s = \psi_2\,, \\ \frac{N \sin R}{n \sin r} = \frac{\psi_2 \cos s - \psi_1 \sin s}{a\psi_2 \cos S - b\psi_1 \sin S}\,, \end{gathered} \tag{99}$$

der Sinusquotient der beiden Neigungen hängt also im Allgemeinen von den Azimuthen ab. Wenn nun für das betrachtete Werthepaar die Parameter ψ_1 und ψ_2 gleichzeitig verschwinden, so verlieren die Gleichungen (98) und (99) zunächst ihre Bedeutung, weil sie unbestimmte Gestalt annehmen. In diesem Falle kann man aber schreiben

$$\frac{N \sin R}{n \sin r} = \frac{\cos s}{a \cos S} = \frac{\sin s}{b \sin S}\,. \tag{100}$$

Der Sinusqnotient hängt also, so lange a und b verschieden sind, wiederum von dem Azimuth ab; wenn dagegen $a = b$, so wird

$$s = S, \quad \frac{N \sin R}{n \sin r} = \frac{1}{a}. \tag{101}$$

Das ist der Sinussatz, wie er sich z. B. bei CZAPSKI (a. a. O. Seite 102) findet.

Beï dem Cosinussatz und seiner Ausartung, dem Sinussatz, handelt es sich, wie das Vorstehende zeigt, in Wirklichkeit um einen Satz nicht der Optik, sondern der Liniengeometrie; er gilt für die aus einer Berührungstransformation entspringenden strahlenweisen Abbildungen, sobald anastigmatische Flächenelemente auftreten.

VIII.

Die zur Bildung des Eikonals benutzten Gleichungen (93) und (94) lassen sich, so lange über die beiden Flächen φ, Φ und über die willkürliche Function ψ nichts Näheres festgesetzt ist, nicht weiter zusammenziehen. Dagegen kann man das Eikonal explicite darstellen, sobald die beiden anastigmatischen Flächen φ, Φ aus Ebenen bestehen. Je nachdem diese beiden Ebenen, die wir als Object- und Bildebene unterscheiden wollen, im Endlichen oder Unendlichen liegen, kann man folgende vier Fälle aufstellen:

	Objectebene,	Bildebene,	
I.	im Unendlichen,	im Unendlichen,	(102)
II.	im Unendlichen,	im Endlichen,	
III.	im Endlichen,	im Unendlichen,	
IV.	im Endlichen.	im Endlichen.	

Nimmt man die Ebenen, wenn sie im Endlichen liegen, zugleich als Grundebenen an, so ergiebt sich nachstehende Tabelle:

Fall						
Fall	I:	für	»p, q constant«	wird	»P, Q constant«,	(103)
»	II:	»	»p, q constant«	»	»H, K constant«,	
»	III:	»	»h, k constant«	»	»P, Q constant«,	
»	IV:	»	»h, k constant«	»	»H, K constant«.	

Soll in den Abbildungsgleichungen

$$H = A(h,k,p,q), \quad K = B(h,k,p,q), \quad P = C(h,k,p,q), \quad Q = D(h,k,p,q)$$

für constante p, q das Werthepaar P, Q constant ausfallen, so müssen in C und D die Veränderlichen h, k fehlen, d. h. es sind, in der früher benutzten Bezeichnungsweise, die partiellen Ableitungen

$$C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0.$$

Die Wiederholung dieser Betrachtung führt auf die Tabelle

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Fall} & \text{I.} & C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0\,, \\ \text{»} & \text{II.} & A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0\,, \\ \text{»} & \text{III.} & C_3 = C_4 = D_3 = D_4 = 0\,, \\ \text{»} & \text{IV.} & A_3 = A_4 = B_3 = B_4 = 0. \end{array}\right\} \quad (104)$$

Da man die Fälle II, III, IV aus I durch die bereits früher benutzten Substitutionen

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} H, & K, P, Q \\ -P, & -Q, H, K \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} h, & k, p, q \\ -p, & -q, h, k \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} h, & k, p, q, & H, & K, P, Q \\ -p, & -q, h, k, & -P, & -Q, H, K \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad (105)$$

erhalten kann, so genügt es, die weitere Rechnung zunächst nur für I durchzuführen.

In der Tabelle der kritischen Determinanten (63) verschwinden für Fall I wegen der ersten Zeile von (104) die Glieder

$$(CD)_{14}\,, \quad (CD)_{23}\,, \quad (CD)_{12}\,, \quad (AD)_{12}\,, \quad (CB)_{12}\,,$$

folglich sind die Glieder $(CD)_{34}$ und $(AB)_{12}$ sicher nicht identisch gleich Null, und die Eikonale $E(h, k, P, Q)$ und $E(p, q, H, K)$ sind sicher vorhanden. Benutzt man, was ausreicht, nur die Form [16] oder $E(p, q, H, K)$, so müssen in den Abbildungsgleichungen

$$-NP = \frac{\partial E}{\partial H}\,, \qquad -NQ = \frac{\partial E}{\partial K}$$

die rechten Seiten von H und K frei, also E eine lineare Function der H und K von der Form

$$E = H\alpha(p,q) + K\beta(p,q) + \gamma(p,q)$$

sein, wo die α, β, γ irgend welche Functionen der p, q bedeuten, mit der einen Einschränkung, dass die in (68) aufgestellte Determinante nicht verschwinde, dass also die beiden Functionen α und β nach den p, q unabhängig von einander seien. Hieraus ergeben sich

unter Berücksichtigung der Substitutionen (105) für die vier Fälle die folgenden Eikonalformen und Abbildungsgleichungen:

$$\text{I.}\left\{\begin{aligned} &[16]::\quad E(p,q,H,K) = H\alpha(p,q) + K\beta(p,q) + \gamma(p,q)\,,\\ &-NP = \alpha(p,q)\,,\qquad -nh = H\frac{\partial\alpha}{\partial p} + K\frac{\partial\beta}{\partial p} + \frac{\partial\gamma}{\partial p}\,,\\ &-NQ = \beta(p,q)\,,\qquad -nh = H\frac{\partial\alpha}{\partial q} + K\frac{\partial\beta}{\partial q} + \frac{\partial\gamma}{\partial q}\,, \end{aligned}\right\}\quad(106)$$

$$\text{II.}\left\{\begin{aligned} &[4]::\quad E(p,q,P,Q) = P\alpha(p,q) + Q\beta(p,q) + \gamma(p,q)\,,\\ &NH = \alpha(p,q)\,,\qquad -nh = P\frac{\partial\alpha}{\partial p} + Q\frac{\partial\beta}{\partial p} + \frac{\partial\gamma}{\partial p}\,,\\ &NK = \beta(p,q)\,,\qquad -nk = P\frac{\partial\alpha}{\partial q} + Q\frac{\partial\beta}{\partial q} + \frac{\partial\gamma}{\partial q}\,, \end{aligned}\right\}\quad(107)$$

$$\text{III.}\left\{\begin{aligned} &[13]::\quad E(h,k,H,K) = H\alpha(h,k) + K\beta(h,k) + \gamma(h,k)\,,\\ &-NP = \alpha(h,k)\,,\qquad np = H\frac{\partial\alpha}{\partial h} + K\frac{\partial\beta}{\partial h} + \frac{\partial\gamma}{\partial h}\,,\\ &-NQ = \beta(h,k)\,,\qquad nq = H\frac{\partial\alpha}{\partial k} + K\frac{\partial\beta}{\partial k} + \frac{\partial\gamma}{\partial k}\,, \end{aligned}\right\}\quad(108)$$

$$\text{VI.}\left\{\begin{aligned} &[1]::\quad E(h,k,P,Q) = P\alpha(h,k) + Q\beta(h,k) + \gamma(h,k)\,,\\ &NH = \alpha(h,k)\,,\qquad np = P\frac{\partial\alpha}{\partial h} + Q\frac{\partial\beta}{\partial h} + \frac{\partial\gamma}{\partial h}\,,\\ &NK = \beta(h,k)\,,\qquad nq = P\frac{\partial\alpha}{\partial k} + Q\frac{\partial\beta}{\partial k} + \frac{\partial\gamma}{\partial k}\,. \end{aligned}\right\}\quad(109)$$

Der Fall I ist bei jedem Prismensatz verwirklicht; die anastigmatische Beziehung zwischen den beiden unendlich fernen Ebenen wird bei den Spectroskopen dazu benutzt, um durch Einschaltung von Collimator und Beobachtungsfernrohr möglichst scharfe Spaltbilder zu erhalten.

Der Fall II entspricht dem Ideal für das Objectiv eines Fernrohrs oder einer für unendlich ferne Objecte bestimmten photographischen Camera. Der Fall III ist die Umwendung von II und stellt das Ideal eines Collimators dar. Denkt man sich den Fall II durch ein centriertes Linsensystem verwirklicht, so muss, wenn das Bild in der Brennebene des Bildraumes correct gezeichnet, d. h. perspectivisch zu dem unendlich fernen Object sein soll, bei passender Wahl der Coordinatenaxen die Beziehung

für constante p, q das Werth
in C und D die Veränderli
früher benutzten Bezeichnun

$$C_1 =$$

Die Wiederholung dieser

Fall I.
» II.
» III.
» IV.

Da man die Fälle II, III,
Substitutionen

$$\begin{pmatrix} H, & K, \\ -P, & -Q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h, \\ -p, \end{pmatrix}$$

erhalten kann, so gen
I durchzuführen.

In der Tabelle
für Fall I wegen der

$$(CD)_{14},$$

folglich sind die Gli
gleich Null, und die
sicher vorhanden.
oder $E(p, q, H, K)$,

$$-$$

die rechten Seiten
der H und K von

$$E =$$

sein, wo die α, β, γ
mit der einen Einsch
nante nicht verschwi
nach den p, q unabh

Der Fall IV entspricht dem Ideal des Mikroskop-Objectivs. Soll die Abbildung der beiden Ebenen auf einander geometrisch ähnlich sein, so muss bei passender Wahl der Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} H &= ah\,, \qquad np = NaP + \frac{\partial\gamma}{\partial h}\,, \\ K &= ak\,, \qquad nq = NaQ + \frac{\partial\gamma}{\partial k} \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

werden, wo a die lineare Vergrösserung bedeutet. Man denke sich jetzt in ω und Ω auf den x- und X-Axen je einen festen Punkt mit den Abscissen x_0 und X_0 angenommen, dann kann man die Geraden von x_0 nach dem Punkte (hk) und von X_0 nach dem conjugierten Bildpunkte (HK) als correspondierende Projectionsstrahlen betrachten. Sollen nun diese Geraden immer auch Bestandtheile desselben Lichtweges sein, so müssen die Gleichungen

$$\frac{x_0 - 0}{m} = \frac{0 - h}{p} = \frac{0 - k}{q}\,, \qquad \frac{X_0 - 0}{M} = \frac{0 - H}{P} = \frac{0 - K}{Q}$$

befriedigt werden, also mit den Abkürzungen

$$s^2 = x_0^2 + h^2 + k^2\,, \qquad S^2 = X_0^2 + H^2 + K^2 = X_0^2 + a^2(h^2 + k^2)\,,$$

$$m = \frac{x_0}{s}\,, \quad p = -\frac{h}{s}\,, \quad q = -\frac{k}{s}\,,$$

$$M = \frac{X_0}{S}\,, \quad P = -\frac{H}{S}\,, \quad Q = -\frac{K}{S}$$

sein. Dies in die Gleichungen (111) eingesetzt giebt

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h} = \frac{Na^2h}{S} - \frac{nh}{s}\,, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial k} = \frac{Na^2k}{S} - \frac{nk}{s}\,,$$

woraus durch Integration

$$\begin{aligned} \gamma(h,k) &= NS - ns \\ &= N\sqrt{X_0^2 + a^2(h^2 + k^2)} - n\sqrt{x_0^2 + h^2 + k^2} \end{aligned} \tag{112}$$

folgt. Umgekehrt: Wenn γ die Form (112) besitzt, so existiert auf den x-Axen ein Paar »orthoskopischer« Punkte x_0 und X_0, und man hat

---

...ich hier immer um die mathematisch vollkommene Anastigmasie handelt.
...ne Begrenzung der Büschelöffnung gebunden ist.

$$\frac{p}{m} : \frac{P}{M} = \frac{q}{m} : \frac{Q}{M} = \frac{X_0}{x_0 a}.$$

Hierin ist der sogenannte Tangentensatz in strenger Form enthalten (vgl. CZAPSKI, S. 111). Seine Gültigkeit ist daran gebunden, dass γ die Gestalt (112) besitzt.

IX.

Die in den Gleichungen (93) bis (96) entwickelte Parameterdarstellung eines Eikonals mit vorgeschriebenen anastigmatischen Flächen war so gewählt worden, dass sie auf die Eikonalform $E(p, q, P, Q)$ führte. Diese Darstellung lässt sich ohne Weiteres auf jede der übrigen Formen übertragen. Es seien wieder die einander zugeordneten Punkte $\pi(xyz)$ und $\Pi(XYZ)$ der vorgeschriebenen anastigmatischen Flächen dadurch bestimmt, dass die rechtwinkligen Coordinaten als Functionen von zwei veränderlichen Parametern α, β dargestellt werden, ferner sei $F(t, u, T, U)$ einer der in Tabelle (79) zusammengestellten Ausdrücke, die ausser den Lichtwegcoordinaten t, u, T, U noch die Coordinaten von π, Π enthalten, dann bilde man zunächst den Ausdruck

$$\Gamma = F(t, u, T, U) + \psi(\alpha, \beta),$$

wo ψ eine beliebige Function der α, β bedeutet. Eliminiert man nun aus Γ die beiden Parameter mit Hilfe der Gleichungen

$$0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha}, \quad 0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta},$$

so geht Γ dadurch in ein Eikonal $E(t, u, T, U)$ über, für welches die Flächenpunkte π, Π conjugierte anastigmatische Punkte sind. Der Beweis wird Schritt für Schritt genau so wie in dem früheren Falle geführt.

In die vorstehende Darstellungsweise gehen zunächst sieben beliebig zu wählende Functionen der beiden Parameter α, β ein, nämlich die sechs rechtwinkligen Coordinaten und die Function ψ. Wählt man als Parameter zwei von den Coordinaten, z. B. y und z, so bleiben immer noch fünf willkürliche Functionen übrig. Dieser Umstand zeigt, welcher grosse Spielraum bereits bei der Forderung

anastigmatischer Flächen vorhanden ist; noch grösser ist selbstverständlich der Spielraum, wenn es sich um die Forderung handelt, dass nur anastigmatische Curven oder isolierte anastigmatische Punkte auftreten sollen. Ich will die beiden letztgenannten Fälle, die für die Optik sehr viel weniger wichtig sind, als die anastigmatischen Flächen, hier nicht weiter verfolgen, sondern die Frage nach der Existenz der genannten Flächen noch von einer anderen Seite her behandeln.

Statt zu vorgeschriebenen anastigmatischen Flächen das Eikonal zu construieren, kann man sich auch die Frage stellen, welchen Bedingungen das Eikonal zu genügen hat, wenn Anastigmasie vorhanden sein soll. Hierbei kann man verschiedene Wege versuchen.

Ist das Eikonal $E(t, u, T, U)$ als Function seiner Veränderlichen explicite dargestellt, so giebt der nach (80) gebildete Ausdruck

$$\Theta(t, u, T, U) = E(t, u, T, U) - F(t, u, T, U)$$

durch das Gleichungssystem (81) oder

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial T} = \frac{\partial \Theta}{\partial U} \tag{113}$$

die Bedingungen dafür, dass der Lichtweg (t, u, T, U) durch die in ω, Ω liegenden Punkte $\pi(xyz)$, $\Pi(XYZ)$ hindurchgehe. Ist das Punktepaar π, Π irgendwie gegeben, so erhält man den hindurchgehenden Lichtweg, wenn man die Gleichungen (113) nach den Lichtwegcoordinaten auflöst. Im Allgemeinen ist die Anzahl der hierbei auftretenden Lösungen eine endliche, d. h. die Gleichungen (113) sind von einander unabhängig. Dies kommt, optisch gesprochen, darauf hinaus, dass man sagt: ein im Bildraume befindliches Auge mit unendlich kleiner Pupille sieht leuchtende Punkte des Objectraumes wiederum als einzelne leuchtende Punkte, und zwar in den durch die Lichtwege gegebenen Richtungen. Für bestimmte Lagen der Punkte π, Π kann nun aber auch der Fall eintreten, dass die Zahl der Lösungen unendlich gross, dass also für die gesuchten Lichtwege eine Mannigfaltigkeit μ_1 oder μ_2 erhalten wird; die π, Π bilden dann Paare von konischen oder anastigmatischen Punkten. Die Aufsuchung solcher ausgezeichneten Punkte ist gleichbedeutend mit der Discussion der Lösungen von (113), unter Berücksichtigung der Fälle, wo von den vier Gleichungen eine oder zwei die Folge

der übrigen werden. Zur wirklichen Durchführung dieser Discussion ist natürlich erforderlich, dass das Eikonal wirklich gegeben sei, da man anderenfalls nicht über die blosse Formulierung der Aufgabe hinauskommt.

Ein anderer Weg, der allerdings nur für die Eikonale mit anastigmatischen Flächenpaaren in Betracht kommt, ist folgender. Durch das vorhin angegebene Gleichungssystem

$$\Gamma = F(t, u, T, U) + \psi(\alpha, \beta)\,, \qquad 0 = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \beta}\,,$$

war für diese Classe von Eikonalen eine Parameterdarstellung mit fünf willkürlichen Functionen erhalten worden. Bildet man nun von dem Eikonal

$$\Gamma = E(t, u, T, U)$$

die partiellen Ableitungen nach den t, u, T, U bis zu einer solchen Ordnung hin, dass die willkürlichen Functionen eliminiert werden können, und führt die Elimination wirklich durch, so erhält man partielle Differentialgleichungen, als deren gemeinsame Lösungen die gedachten Eikonale definiert sind. Statt dieses directen Weges ziehe ich es jedoch vor, einen Umweg einzuschlagen, der aber den Vorzug besitzt, dass die Bedeutung einzelner Relationen besser hervortritt. Man gelangt dazu, wenn man sich vorläufig darauf beschränkt, nur das Verhalten von Elementarbüscheln zu untersuchen. Es genügt, hierbei nur die Eikonalform $E(p, q, P, Q)$ zu benutzen, die auf die einfachsten Formeln führt; die hierin liegende Einschränkung lässt sich nachträglich durch eine einfache Ueberlegung aufheben. Wir setzen also nach (80) an

$$\begin{aligned}\Theta(p, q, P, Q) = E(p, q, P, Q) + n(xm + yp + zq) \\ - N(XM + YP + ZQ).\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen nach den p, q, P, Q benutzen wir bei der folgenden Untersuchung die Indices nach dem Schema

$$df(p, q, P, Q) = f_1 dp + f_2 dq + f_3 dP + f_4 dQ\,,$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} m_1 = -\frac{p}{m}\,, \qquad m_2 = -\frac{q}{m}\,, \qquad m_3 = m_4 = 0\,, \\ M_1 = M_2 = 0\,, \qquad M_3 = -\frac{P}{M}\,, \qquad M_4 = -\frac{Q}{M}\,, \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

$$\left.\begin{array}{lll} m_{11} = \frac{q^2 - 1}{m^3}, & m_{12} = -\frac{pq}{m^3}, & m_{22} = \frac{p^2 - 1}{m^3}, \\ M_{33} = \frac{Q^2 - 1}{M^3}, & M_{34} = -\frac{PQ}{M^3}, & M_{44} = \frac{P^2 - 1}{M^3} \end{array}\right\} \quad (116)$$

wird. Für die aus den $\Theta_{\alpha\beta}$ gebildete Determinante führen wir die Abkürzung

$$(\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4)_{1234} = \vartheta \quad (117)$$

ein, und setzen die Unterdeterminanten dritter Ordnung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta_{\alpha\beta}} = \vartheta_{\alpha\beta}. \quad (118)$$

Die Bedingungen, dass für einen Lichtweg L mit den Lichtweg-coordinaten p, q, P, Q die beiden Strahlen $\sigma(p, q, P, Q)$ und $\Sigma(p, q, P, Q)$ durch die Punkte $\pi(xyz)$ und $\Pi(XYZ)$ hindurchgehen, sind durch die vier Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = \Theta_1 \equiv E_1 + n(xm_1 + y)\ , & 0 = \Theta_2 \equiv E_2 + n(xm_2 + z)\ , \\ 0 = \Theta_3 \equiv E_3 - N(XM_3 + Y)\ , & 0 = \Theta_4 \equiv E_4 - N(XM_4 + Z \end{array}\right\} \quad (119)$$

gegeben. Werden diese vier Gleichungen von den betrachteten Stücken L, π, Π erfüllt, so wird ein unendlich nahe benachbarter Lichtweg mit den Coordinaten

$$p + dp, \qquad q + dq, \qquad P + dP, \qquad Q + dQ$$

im Allgemeinen nicht durch die beiden Punkte π, Π hindurchgehen, vielmehr müssen, damit dieser stattfinde, die Verrückungen dp, dq, dP, dQ den vier Bedingungen

$$0 = d\Theta_\alpha = \Theta_{\alpha 1} dp + \Theta_{\alpha 2} dq + \Theta_{\alpha 3} dP + \Theta_{\alpha 4} dQ\ , \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

genügen, die, ausgeschrieben, die Form

$$\left.\begin{array}{l} 0 = (E_{11} + nxm_{11}) dp + (E_{12} + nxm_{12}) dq + E_{13} dP + E_{14} dQ\ , \\ 0 = (E_{21} + nxm_{21}) dp + (E_{22} + nxm_{22}) dq + E_{23} dP + E_{24} dQ\ , \\ 0 = E_{31} dp + E_{32} dq + (E_{33} - NXM_{33}) dP + (E_{34} - NXM_{34}) dQ\ , \\ 0 = E_{41} dp + E_{42} dq + (E_{43} - NXM_{43}) dP + (E_{44} - NXM_{44}) dQ \end{array}\right\} \quad (120)$$

annehmen. Ist die Determinante dieses linearen Systems, nämlich

$$\begin{aligned} \vartheta &= (\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 \Theta_4)_{1234} \\ &= (E_1 + nxm_1,\ E_2 + nxm_2,\ E_3 - NXM_3,\ E_4 - NXM_4)_{1234} \end{aligned} \quad (121)$$

von Null verschieden, so folgt aus (120)

$$0 = dp = dq = dP = dQ\,,$$

was besagen würde, dass keiner der zu L benachbarten Lichtwege durch π, Π hindurchgeht. Soll also L von einem benachbarten Lichtwege im Object- und Bildraume geschnitten werden, so muss ϑ verschwinden. In diesem Falle wird von den vier Gleichungen (120) eine als Folge der drei andern überflüssig, und die drei übrigbleibenden Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der dp, dq, dP, dQ und damit den oder die benachbarten Lichtwege von der verlangten Beschaffenheit. Entwickelt man ϑ, so erhält man einen nach x und X quadratischen Ausdruck, und damit eine Gleichung von der Form

$$0 = \vartheta = X^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + X(\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma') + \alpha'' x^2 + \beta'' x + \gamma\,, \quad (122)$$

wo die Coefficienten von den $E_{\lambda\mu}$, $m_{\lambda\mu}$, $M_{\lambda\mu}$ abhängen. Hiernach kann π (oder Π) beliebig angenommen werden, und es ist dann Π (oder π) bestimmt, und zwar im Allgemeinen zweideutig. Denkt man sich aus allen zu L benachbarten Lichtwegen diejenigen herausgegriffen, die in ω ein homocentrisches Elementarbüschel mit der gegebenen Spitze π bilden, so sind die Orte der Brennlinien auf dem conjugierten Σ-Büschel nichts anderes als die beiden durch (120) bestimmten Punkte Π, und das Entsprechende gilt, wenn umgekehrt Π gegeben ist und daraus π aus (122) bestimmt wird. Betrachtet man in der zweifach quadratischen Gleichung (122) x und X als rechtwinklige Punktcoordinaten in einer Ebene, so definiert die Gleichung eine gewisse Curve vierten Grades. Die Doppelpunkte dieser Curve bestimmen auf dem Lichtwege L diejenigen Stellen, wo zu einem x zwei zusammenfallende X und zu einem X zwei zusammenfallende x gehören, wo also das betrachtete Elementarbüschel beiderseitig homocentrisch oder anastigmatisch ist. Die Bedingung für die Anastigmasie eines Elementarbüschels mit dem Mittel-Lichtwege L ist also durch die drei Bedingungen

$$\vartheta = 0\,, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial X} = 0 \qquad (123)$$

gegeben, wo die beiden letzten, entwickelt, die Form

$$0 = m_{11}\vartheta_{11} + 2m_{12}\vartheta_{12} + m_{22}\vartheta_{22}\,, \quad 0 = M_{33}\vartheta_{33} + 2M_{34}\vartheta_{34} + M_{44}\vartheta_{44} \quad (124)$$

annehmen. Die weitere Untersuchung von (124) würde zu dem Satze führen, dass alle $\vartheta_{\alpha\beta}$ verschwinden. Zu demselben Ergebniss

kann man aber kürzer durch folgende Ueberlegung gelangen. Wenn längs L ein anastigmatisches Elementarbüschel mit den Spitzen π, Π existieren soll, so müssen für die Verhältnisse der dp, dq, dP, dQ unendlich viele Werthsysteme vorhanden sein, die den Gleichungen (120) genügen; es müssen daher zwei von diesen Gleichungen eine Folge der beiden andern sein, was sofort auf die Gleichungen

$$0 = \vartheta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \tag{124}$$

führt, die wegen der Symmetrie der Determinante ϑ zehn selbständige Bedingungen enthalten. Von diesen Bedingungen wollen wir zunächst nur die vier

$$\vartheta_{13} = \vartheta_{23} = \vartheta_{14} = \vartheta_{24} = 0 \tag{125}$$

benutzen und für den Augenblick eine specielle Lage der Coordinatenaxen voraussetzen. Legt man die x-Axe und die X-Axe parallel zu den Strahlen σ und Σ des betrachteten Lichtweges L, so ist

$$p = q = P = Q = 0\,, \qquad m = M = 1\,,$$
$$m_{11} = m_{22} = M_{33} = M_{44} = -1\,, \qquad m_{12} = M_{34} = 0\,.$$

Legt man ferner, was immer möglich ist, die Seitenaxen so, dass

$$E_{12} = E_{34} = 0$$

wird, so nehmen die vier Bedingungen (125) entwickelt die Gestalt

$$\begin{aligned}
(E_{22} - nx)(E_{44} + NX)\,E_{13} &= E_{24}(E_1 E_2)_{34}\,,\\
(E_{22} - nx)(E_{33} + NX)\,E_{14} &= -E_{23}(E_1 E_2)_{34}\,,\\
(E_{11} - nx)(E_{44} + NX)\,E_{23} &= -E_{14}(E_1 E_2)_{34}\,,\\
(E_{11} - nx)(E_{33} + NX)\,E_{24} &= E_{13}(E_1 E_2)_{34}
\end{aligned}$$

an, woraus man, mit den Abkürzungen

$$\varrho = E_{13}E_{14} + E_{23}E_{24} \qquad \varrho' = E_{13}E_{23} + E_{14}E_{24}\,,$$

der Reihe nach die Beziehungen

$$\frac{E_{44} + NX}{E_{33} + NX} = -\frac{E_{14}E_{24}}{E_{13}E_{23}}, \qquad \frac{E_{22} - nx}{E_{11} - nx} = -\frac{E_{23}E_{24}}{E_{13}E_{23}},$$

$$\left.\begin{aligned}
\varrho nx &= E_{11}E_{23}E_{24} + E_{22}E_{13}E_{14}, & -\varrho' NX &= E_{33}E_{14}E_{24} + E_{44}E_{13}E_{23},\\
\varrho(E_{11} - nx) &= (E_{11} - E_{22})\,E_{13}E_{14}, & \varrho'(E_{33} + NX) &= (E_{33} - E_{44})\,E_{13}E_{23}\,,\\
\varrho(E_{22} - nx) &= -(E_{11} - E_{22})\,E_{23}E_{24}, & \varrho'(E_{44} + NX) &= -(E_{33} - E_{44})\,E_{14}E_{24}
\end{aligned}\right\} \tag{126}$$

ableitet. Substituiert man die für x, X gefundenen Ausdrücke in die sämmtlichen $\vartheta_{\alpha\beta}$ und in ϑ, so wird mit der Abkürzung

$$\Phi = \frac{E_{11} - E_{22}}{\varrho} \frac{E_{33} - E_{44}}{\varrho'} E_{13} E_{14} E_{23} E_{24} - (E_1 E_2)_{34} \qquad (127)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varrho'\vartheta_{11} &= E_{23}E_{24}(E_{33} - E_{44})\Phi\,, & \vartheta_{13} &= -E_{24}\Phi\,,\\
\varrho'\vartheta_{22} &= -E_{13}E_{14}(E_{33} - E_{44})\Phi\,, & \vartheta_{23} &= E_{14}\Phi\,,\\
\varrho\,\vartheta_{33} &= E_{14}E_{24}(E_{11} - E_{22})\Phi\,, & \vartheta_{14} &= E_{23}\Phi\,,\\
\varrho\,\vartheta_{44} &= -E_{13}E_{23}(E_{11} - E_{22})\Phi\,, & \vartheta_{24} &= -E_{13}\Phi\,,\\
\vartheta_{12} &= \vartheta_{34} = 0\,, & \vartheta &= \Phi^2\,.
\end{aligned}\right\} (128)$$

Hiernach ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Vorkommen eines anastigmatischen Elementarbüschels längs des Lichtweges L durch das Verschwinden des Ausdruckes Φ gegeben; ist diese Bedingung erfüllt, so findet man die beiden Vereinigungspunkte $\pi(xyz)$, $\Pi(XYZ)$ aus den Gleichungen,

$$\begin{aligned}
\varrho n x &= E_{11}E_{23}E_{24} + E_{22}E_{13}E_{14}\,, & -\varrho' N X &= E_{33}E_{14}E_{24} + E_{44}E_{13}E_{23}\,,\\
ny &= -E_1 - nxm_1\,, & NY &= E_3 - NXM_3\,,\\
nz &= -E_2 - nxm_2\,, & NZ &= E_4 - NXM_4\,.
\end{aligned}$$

Das gefundene Ergebniss ist seiner Form nach an die gewählten besonderen Coordinatenaxen gebunden; diese Einschränkung soll zunächst aufgehoben werden, wobei sich zugleich die Gelegenheit bieten wird, gewisse Grenzfälle mit zu erörtern.

X.

Man denke sich die Coordinatenaxen wiederum willkürlich gewählt und entsprechend die Elemente der Determinante ϑ angesetzt. Die Bedingung, dass alle Unterdeterminanten $\vartheta_{\alpha\beta}$ verschwinden sollen, lässt sich nun auch in folgende Form kleiden. Es werde mit den vier Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 und den $\Theta_{\alpha\beta}$ als Coefficienten die quadratische Form

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{\alpha,\beta} \Theta_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta\\
&= \sum_{\alpha,\beta} E_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + ny\,(m_{11}x_1^2 + 2m_{12}x_1x_2 + m_{22}x_2^2)\\
&\qquad - NX(M_{33}x_3^2 + 2\,M_{34}x_3x_4 + M_{44}x_4^2)\,,\\
&\qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

angesetzt. Das Verschwinden der $\vartheta_{\alpha\beta}$ besagt dann, dass die Form R sich als die Summe von nur zwei Quadraten darstellen lässt.

Diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn man mit der Form eine lineare Transformation vornimmt oder statt der x_1, x_2, x_3, x_4 neue Veränderliche z_1, z_2, z_3, z_4 durch die Substitution

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2, & x_2 = \alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2, \\ x_3 = \alpha_3 z_3 + \beta_3 z_4, & x_4 = \alpha_4 z_3 + \beta_4 z_4 \end{array}\right\} \quad (129)$$

einführt. Aus eben diesem Grunde verschwinden dann für die transformierte Form die aus ihren Coefficienten gebildete Determinante und deren Unterdeterminanten dritter Ordnung. Ferner zieht dieses Verhalten der transformierten Form die gleiche Eigenschaft für die ursprüngliche Form nach sich.

Die Transformation (129) soll jetzt so gewählt werden, dass

$$m_{11}x_1^2 + 2m_{12}x_1x_2 + m_{22}x_2^2 = -2z_1z_2,$$
$$M_{33}x_3^2 + 2M_{34}x_3x_4 + M_{44}x_4^2 = -2z_3z_4$$

wird. Dies findet statt, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1\sqrt{2} = (m+ipq)\sqrt{\dfrac{m}{m^2+p^2}}, & \beta_1\sqrt{2} = (m-ipq)\sqrt{\dfrac{m}{m^2+p^2}}, \\ \alpha_2\sqrt{2} = -i\sqrt{m(m^2+p^2)}, & \beta_2\sqrt{2} = i\sqrt{m(m^2+p^2)}, \\ \alpha_3\sqrt{2} = (M+iPQ)\sqrt{\dfrac{M}{M^2+P^2}}, & \beta_3\sqrt{2} = (M-iPQ)\sqrt{\dfrac{M}{M^2+P^2}}, \\ \alpha_4\sqrt{2} = -i\sqrt{M(M^2+P^2)}, & \beta_4\sqrt{2} = i\sqrt{M(M^2+P^2)}. \end{array}\right\} \quad (130)$$

Der von den $E_{\alpha\beta}$ abhängige Theil in R nimmt die Gestalt

$$\sum_{\alpha,\beta} E_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta}z_\alpha z_\beta$$

an, wo

$$\left.\begin{array}{l} G_{11} = E_{11}\alpha_1\alpha_1 + E_{12}(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1) + E_{22}\alpha_2\alpha_2, \\ G_{12} = E_{11}\alpha_1\beta_1 + E_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + E_{22}\alpha_2\beta_2, \\ G_{22} = E_{11}\beta_1\beta_1 + E_{12}(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_1) + E_{22}\beta_2\beta_2, \end{array}\right\} \quad (131)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_{33} = E_{33}\alpha_3\alpha_3 + E_{34}(\alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_3) + E_{44}\alpha_4\alpha_4, \\ G_{34} = E_{33}\alpha_3\beta_3 + E_{34}(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3) + E_{44}\alpha_4\beta_4, \\ G_{44} = E_{33}\beta_3\beta_3 + E_{34}(\beta_3\beta_4 + \beta_4\beta_3) + E_{44}\beta_4\beta_4, \end{array}\right\} \quad (132)$$

$$\left.\begin{array}{l} G_{13} = E_{13}\alpha_1\alpha_3 + E_{23}\alpha_2\alpha_3 + E_{14}\alpha_1\alpha_4 + E_{24}\alpha_2\alpha_4, \\ G_{23} = E_{13}\beta_1\alpha_3 + E_{23}\beta_2\alpha_3 + E_{14}\beta_1\alpha_4 + E_{24}\beta_2\alpha_4, \\ G_{14} = E_{13}\alpha_1\beta_3 + E_{23}\alpha_2\beta_3 + E_{14}\alpha_1\beta_4 + E_{24}\alpha_2\beta_4, \\ G_{24} = E_{13}\beta_1\beta_3 + E_{23}\beta_2\beta_3 + E_{14}\beta_1\beta_4 + E_{24}\beta_2\beta_4. \end{array}\right\} \quad (133)$$

Nennt man die Determinante der transformierten Form wiederum ϑ, so wird wegen

$$R = \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta - 2nz_1z_2 + 2Nz_3z_4 ,$$

$$\vartheta = \begin{vmatrix} G_{11} & , G_{21} - nx , & G_{31} & , G_{41} \\ G_{12} - nx , & G_{22} & , G_{32} & , G_{42} \\ G_{13} & , G_{23} & , G_{33} & , G_{43} + NX \\ G_{14} & , G_{24} & , G_{34} + NX , & G_{44} \end{vmatrix} , \qquad (134)$$

wo ϑ wegen $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$ wiederum symmetrisch ist. Da wir aus dem Früheren von vornherein wissen, dass das Verschwinden der zehn neuen Unterdeterminanten $\vartheta_{\alpha\beta}$ nur auf eine von den x, X freie Bedingung zwischen den $E_{\alpha\beta}$ oder den $G_{\alpha\beta}$ führt, so können wir für die weitere Untersuchung unter den $\vartheta_{\alpha\beta}$ eine beliebige Wahl treffen. Wir benutzen zunächst die beiden Bedingungen

$$\vartheta_{11} = 0 , \qquad \vartheta_{22} = 0 ,$$

was zu den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= G_{22}(G_{34} + NX)^2 - 2G_{23}G_{24}(G_{34} + NX) \\ &\qquad + G_{33}G_{24}^2 + G_{44}G_{23}^2 - G_{22}G_{33}G_{44} , \\ 0 &= G_{11}(G_{34} + NX)^2 - 2G_{13}G_{14}(G_{34} + NX) \\ &\qquad + G_{33}G_{14}^2 + G_{44}G_{13}^2 - G_{11}G_{33}G_{44} \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

führt. In derselben Weise erhält man aus ϑ_{33} und ϑ_{44}

$$\left.\begin{aligned} 0 &= G_{44}(G_{12} - nx)^2 - 2G_{41}G_{42}(G_{12} - nx) \\ &\qquad + G_{11}G_{42}^2 + G_{22}G_{41}^2 - G_{44}G_{11}G_{22} , \\ 0 &= G_{33}(G_{12} - nx)^2 - 2G_{31}G_{32}(G_{12} - nx) \\ &\qquad + G_{11}G_{32}^2 + G_{22}G_{31}^2 - G_{33}G_{11}G_{22} . \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

Aus (135) leitet man zunächst die Proportion

$$\frac{(G_{34} + NX)^2}{u} = \frac{-2(G_{34} + NX)}{v} = \frac{1}{w}$$

ab, wo

$$u = \begin{vmatrix} G_{23}G_{24} , & G_{33}G_{24}^2 + G_{44}G_{23}^2 - G_{22}G_{33}G_{44} \\ G_{13}G_{14} , & G_{33}G_{14}^2 + G_{44}G_{13}^2 - G_{11}G_{33}G_{44} \end{vmatrix} , \qquad (137)$$

$$v = \begin{vmatrix} G_{33}G_{24}^2 + G_{44}G_{23}^2 , & G_{22} \\ G_{33}G_{14}^2 + G_{44}G_{13}^2 , & G_{11} \end{vmatrix} , \quad w = \begin{vmatrix} G_{22} , & G_{23}G_{24} \\ G_{11} , & G_{13}G_{14} \end{vmatrix} . \qquad (138)$$

Hieraus ergiebt sich X und durch Indexvertauschung auch x in der Form

$$\left.\begin{aligned} 2(G_{34}+NX) &= \frac{G_{11}G_{33}G_{24}^2+G_{11}G_{44}G_{23}^2-G_{22}G_{33}G_{14}^2-G_{22}G_{44}G_{13}^2}{G_{11}G_{23}G_{24}-G_{22}G_{13}G_{14}}, \\ 2(G_{12}-nx) &= \frac{G_{11}G_{33}G_{24}^2-G_{11}G_{44}G_{23}^2+G_{22}G_{33}G_{14}^2-G_{22}G_{44}G_{13}^2}{G_{33}G_{14}G_{24}-G_{44}G_{13}G_{23}}. \end{aligned}\right\} \quad (139)$$

Weiter führt die obige Proportion zu der von den x, X freien Bedingung

$$0 = \Psi = vv - uw.$$

Um diese etwas übersichtlicher darzustellen, führen wir die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{13} &= (G_{11}G_{33}-G_{13}G_{13})G_{24}, \quad \Gamma_{23} = (G_{22}G_{33}-G_{23}G_{23})G_{14}, \\ \Gamma_{14} &= (G_{11}G_{44}-G_{14}G_{14})G_{23}, \quad \Gamma_{24} = (G_{22}G_{44}-G_{24}G_{24})G_{13}, \\ \Gamma &= G_{13}G_{14}G_{23}G_{24} \end{aligned}\right\} \quad (140)$$

ein, und erhalten damit der Reihe nach

$$v = \Gamma_{13}G_{24}+\Gamma_{14}G_{23}-\Gamma_{23}G_{14}-\Gamma_{24}G_{13} = (\Gamma_3G_4)_{12}+(\Gamma_4G_3)_{12},$$

$$\begin{aligned} uw &= (\Gamma_{13}G_{23}-\Gamma_{23}G_{13})(\Gamma_{14}G_{24}-\Gamma_{24}G_{14})+\Gamma(G_3G_4)_{12}(G_3G_4)_{12} \\ &= (\Gamma_3G_3)_{12}(\Gamma_4G_4)_{12}+\Gamma(G_3G_4)_{12}(G_3G_4)_{12}, \end{aligned}$$

$$\Psi = [(\Gamma_3G_4)_{12}+(\Gamma_4G_3)_{12}]^2-4(\Gamma_3G_3)_{12}(\Gamma_4G_4)_{12}-4\Gamma(G_3G_4)_{12}(G_3G_4)_{12}, \quad (141)$$

$$\Psi = [(\Gamma_3G_4)_{12}-(\Gamma_4G_3)_{12}]^2-4(\Gamma_3\Gamma_4)_{12}(G_3G_4)_{12}-4\Gamma(G_3G_4)_{12}(G_3G_4)_{12}. \quad (142)$$

Die Form (142) für den Ausdruck Ψ lässt erkennen, dass Ψ sich nicht ändert, wenn man mit den Indices die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 4, 1, 2 \end{pmatrix}$$

vornimmt; die Benutzung der Gleichungen (136) statt (135) hätte deshalb genau denselben Ausdruck ergeben. Damit ist die gesuchte Bedingung für das Auftreten anastigmatischer Elementarbüschel in der für beliebige Coordinatenaxen gültigen Form

$$\Psi = 0 \quad (143)$$

aufgestellt; sie enthält ausser den p, q, P, Q nur noch die Ableitungen zweiter Ordnung des Eikonals $E(p, q, P, Q)$. Das Punktepaar π, Π der beiden Spitzen der elementaren Strahlenbüschel ergiebt sich aus (139) in Verbindung mit den Gleichungen

$$y = h + \frac{xp}{m}, \quad z = k + \frac{xq}{m}, \quad Y = H + \frac{XP}{M}, \quad Z = K + \frac{XQ}{M}.$$

In der vorstehenden Rechnung war stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Gleichungspaare (135) und (136) nur je eine Wurzel mit einander gemeinsam haben, dass also längs des betrachteten Lichtweges L nur ein einziges anastigmatisches Elementarbüschel auftrete. Dieser Fall ist in der That als der allgemeine anzusehen, da, wie sich sogleich zeigen wird, das Vorkommen von zwei oder mehr anastigmatischen Büscheln noch weitere Bedingungen, über die in (143) enthaltene hinaus, erzeugt. Sollen längs L zwei anastigmatische Elementarbüschel vorkommen, so müssen wegen der geometrischen Bedeutung der Gleichungen (135) und (136) in beiden Gleichungspaaren zwei gemeinsame Wurzeln auftreten, es müssen also die Gleichungen jeden Paares, von einem Factor abgesehen, in den Coefficienten übereinstimmen. Dies führt zu den Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{G_{23}G_{24}}{G_{22}} = \frac{G_{13}G_{14}}{G_{11}}, \quad \frac{G_{33}G_{24}^2 + G_{44}G_{23}^2}{G_{22}} = \frac{G_{33}G_{14}^2 + G_{44}G_{13}^2}{G_{11}}, \\ \frac{G_{41}G_{42}}{G_{44}} = \frac{G_{31}G_{32}}{G_{33}}, \quad \frac{G_{11}G_{42}^2 + G_{22}G_{41}^2}{G_{44}} = \frac{G_{11}G_{32}^2 + G_{22}G_{31}^2}{G_{33}}. \end{aligned}\right\} \quad (144)$$

Die in (137) und (138) mit u, v, w bezeichneten Ausdrücke verschwinden in diesem Falle, ebenso der Ausdruck Ψ, während die in (139) für die x, X aufgestellten Formeln die Form $0:0$ annehmen. Setzt man nun zunächst

$$\left.\begin{aligned} G_{11} &= \lambda G_{13}G_{14}, \qquad G_{33} = \mu G_{31}G_{32}, \\ G_{22} &= \lambda G_{23}G_{24}, \qquad G_{44} = \mu G_{41}G_{42}, \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

so werden dadurch die vier Bedingungen (144) identisch erfüllt, so dass jetzt an die Stelle der Bedingung $\Psi = 0$ die beiden Gleichungen treten, die aus (145) durch Elimination von λ und μ entspringen. Führt man die Abkürzungen

$$\Gamma = G_{13}G_{14}G_{23}G_{24}, \qquad \Delta = G_{13}G_{24} + G_{14}G_{23} \quad (146)$$

ein, so nehmen die quadratischen Gleichungen für die x, X die Gestalt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(G_{34} + NX)^2 - 2(G_{34} + NX) + \mu(\Delta - \lambda\mu\Gamma), \\ 0 &= \mu(G_{12} - nx)^2 - 2(G_{12} - nx) + \lambda(\Delta - \lambda\mu\Gamma) \end{aligned}$$

an, deren Auflösung in den Formeln

$$\left.\begin{aligned} \nu^2 = (1 - \lambda\mu\, G_{13}G_{24})(1 - \lambda\mu\, G_{14}G_{23}), \\ \lambda(G_{34} + NX) = 1 \pm \nu, \qquad \mu(G_{12} - nx) = 1 \pm \nu \end{aligned}\right\} \quad (147)$$

enthalten ist. Um die für die x, X erhaltenen Wurzelpaare x', x'' und X', X'' einander richtig zuzuordnen, kann man eine von den noch nicht benutzten Unterdeterminanten, z. B. die Bedingung

$$\vartheta_{14} = 0$$

heranziehen, die, entwickelt, mit Rücksicht auf (145), (146), (147) zu der Gleichung

$$(G_{12} - nx)(G_{34} + NX) = G_{13}G_{24}[\mu(G_{12} - nx) + \lambda(G_{34} + NX) - 2] + \frac{1 - \nu^2}{\lambda\mu}$$

führt, aus der sich ergiebt, dass man

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda(G_{34} + NX') = 1 + \nu, & \lambda(G_{34} + NX'') = 1 - \nu, \\ \mu(G_{12} - nx') = 1 - \nu, & \mu(G_{12} - nx'') = 1 + \nu \end{array}\right\} \quad (148)$$

zu setzen hat, wo x' und X' zu conjugierten Spitzen gehören, und ebenso x'' und X''.

Da die Gleichungen (135) und (136) nur vom zweiten Grade sind, so müssen, wenn mehr als zwei Punktepaare der verlangten Art längs eines Lichtweges vorkommen sollen, deren unendlich viele vorhanden sein. Dies fordert, dass die vier Gleichungen (135) und (136) für beliebige x, X erfüllt sind, dass also

$$\left.\begin{array}{c} G_{11} = G_{22} = G_{33} = G_{44} = 0, \\ G_{13}G_{14} = G_{23}G_{24} = G_{13}G_{23} = G_{14}G_{24} = 0 \end{array}\right\} \quad (149)$$

ist. Nun ist wegen (133)

$$(G_1G_2)_{34} = \begin{vmatrix} E_{13}\alpha_1 + E_{23}\alpha_2, & E_{14}\alpha_1 + E_{24}\alpha_2 \\ E_{13}\beta_1 + E_{23}\beta_2, & E_{14}\beta_1 + E_{24}\beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_3, \alpha_4 \\ \beta_3, \beta_4 \end{vmatrix}$$
$$= (E_1E_2)_{34} \cdot (\alpha\beta)_{12} \cdot (\alpha\beta)_{34} = (E_1E_2)_{34} \cdot (i\,m^2) \cdot (i\,M^2).$$

Da die Determinante $(E_1E_2)_{34}$, ausser für Ausnahmestellen der Abbildung, nicht verschwinden darf (vergl. (68)), so gilt dies auch von $(G_1G_2)_{34}$. Setzt man nun z. B. wegen (149) G_{13} gleich Null, so müssen G_{14} und G_{23} von Null verschieden sein, woraus weiter das Verschwinden von G_{24} folgt. Man hat daher nach (149)

$$\text{entweder } G_{13} = G_{24} = 0 \text{ oder } G_{14} = G_{23} = 0. \quad (150)$$

Die Ausdrücke für die x, X in (139) werden dann schlechthin unbestimmt; an ihre Stelle tritt die Beziehung zwischen den conjugierten

x, X, die sich aus den noch nicht benutzten Unterdeterminanten $\vartheta_{\alpha\beta}$ ergiebt. Nimmt man zunächst den ersten der beiden Fälle (150) an, so hat die Determinante ϑ die Form

$$\vartheta = \begin{vmatrix} 0 & , & G_{21} - nx, & 0 & , & G_{41} \\ G_{12} - nx, & 0 & , & G_{32} & , & 0 \\ 0 & , & G_{23} & , & 0 & , & G_{43} + NX \\ G_{14} & , & 0 & , & G_{34} + NX, & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminanten ϑ_{11}, ϑ_{22}, ϑ_{33}, ϑ_{44} verschwinden identisch, wie sich vorhersehen liess, ebenso verschwinden ϑ_{13} und ϑ_{24} identisch, die anderen führen dagegen gemeinsam zu der Gleichung

$$0 = (G_{12} - nx)(G_{34} + NX) - G_{14}G_{23}, \qquad (151\text{a})$$

an deren Stelle für den zweiten Fall (150) die Gleichung

$$0 = (G_{12} - nx)(G_{34} + NX) - G_{13}G_{24} \qquad (151\text{b})$$

tritt.

Ein einfaches Beispiel für die besprochenen Sonderfälle liefert die Brechung an einer Kugel. Bei dieser Abbildung kommen längs jedes Lichtweges L, der nicht durch den Mittelpunkt der Kugel führt, zwei Paare von anastigmatischen Elementarbüscheln vor; die Spitzen π, Π des einen Paares fallen zusammen und liegen in der Kugeloberfläche, die Spitzen des anderen Paares befinden sich in den bekannten aplanatischen Kugeln. Geht der Lichtweg L durch den Mittelpunkt, so sind längs L unendlich viele anastigmatische Elementarbüschel vorhanden.

Die bisherige Untersuchung benutzte das Eikonal $E(p, q, P, Q)$, ist also zunächst nur für die Abbildungen gültig, die dieses Eikonal besitzen. Diese Einschränkung soll jetzt beseitigt werden. Nun handelte es sich bei der zuletzt durchgeführten Entwicklung darum, die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass ein Lichtweg L von unendlich vielen benachbarten sowohl im Objectraume, als auch im Bildraume geschnitten werde. Setzt man die Abbildungsgleichungen in der ursprünglichen Form

$$0 = \alpha \equiv A(h, k, p, q) - H, \qquad 0 = \beta \equiv B(h, k, p, q) - K,$$
$$0 = \gamma \equiv C(h, k, p, q) - P, \qquad 0 = \delta \equiv D(h, k, p, q) - Q$$

an und führt für die h, k, H, K die Ausdrücke

$$h = y - \frac{xp}{m} = y + xm_1\,, \quad k = z - \frac{xq}{m} = z + xm_2\,,$$
$$H = Y - \frac{XP}{M} = Y + XM_3\,, \quad K = Z - \frac{XQ}{M} = Z + XM_4$$

ein, so erhält man zunächst die Bedingungen dafür, dass der Lichtweg L oder (p, q, P, Q) durch die beiden Punkte $\pi(xyz)$ und $\Pi(XYZ)$ hindurchgehe. Schreibt man die Ableitungen der α, β, γ, δ nach den p, q, P, Q mit den Indices 1, 2, 3, 4 nach dem Schema

$$d\alpha = \alpha_1 dp + \alpha_2 dq + \alpha_3 dP + \alpha_4 dQ\,,$$

so sind die gesuchten Bedingungen für die anastigmatischen Elementarbüschel dadurch gegeben, dass nicht nur die Determinante

$$\eta = (\alpha\beta\gamma\delta)_{1234}\,,$$

sondern auch die Unterdeterminanten

$$\frac{\partial\eta}{\partial\alpha_\lambda}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\beta_\lambda}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\gamma_\lambda}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\delta_\lambda}, \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4)\,,$$

verschwinden. Mit diesem Ansatz lässt sich nun Schritt für Schritt die frühere Rechnung wiederholen. Jeder Gleichung der neuen Rechnung entspricht eine bestimmte Gleichung in der früheren und umgekehrt; der Uebergang zwischen zwei zusammengehörigen Gleichungen ergiebt sich direct, wenn man die in (70) bis (75) entwickelten Beziehungen zwischen den A, B, C, D und den Eikonalen benutzt. In Folge dessen lässt sich auch das Endergebniss der neuen Rechnung unmittelbar aus der früheren herübernehmen. Man erhält zunächst eine Bedingung $\Psi = 0$, in der ausser den Strahlencoordinaten noch die Ableitungen erster Ordnung der A, B, C, D auftreten, die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Büschelspitzen π, Π dagegen fehlen. Dazu treten dann noch die expliciten Ausdrücke für die Orte der π, Π, ausgedrückt durch die in Ψ vorkommenden Grössen.

Die vorstehende Darstellungsweise ist unabhängig von der Voraussetzung, dass für die betrachtete Abbildung eine bestimmte Eikonalform z. B. $E(p, q, P, Q)$ auch wirklich vorhanden sei. Der obige Ansatz ist sogar für die strahlenweisen Abbildungen benutzbar, die dem MALUS'schen Satze nicht genügen, also überhaupt keine Eikonale besitzen. Ferner kann man, von der Darstellung durch die

A, B, C, D ausgehend, vermittelst der Gleichungen (70) bis (75) wiederum jedes der sechzehn Eikonale einführen, das für die betrachtete Abbildung existiert. Die aus der Benutzung der Form $E(p, q, P, Q)$ entspringende Einschränkung reduciert sich also darauf, dass man nöthigenfalls die früher entwickelten Ausdrücke vor ihrer Benutzung durch den Uebergang auf eine andere Eikonalform zu transformieren hat.

XI.

Wird zu einem vorgelegten Eikonal $E(t, u, T, U)$ nach Anleitung des vorhergehenden Abschnittes der Ausdruck Ψ gebildet, so ist das Verschwinden von Ψ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass längs des Lichtweges (t, u, T, U) ein anastigmatisches Elementarbüschel vorhanden ist. Sind π, Π die Spitzen dieses Büschels im Object- und im Bildraume, so denke man sich π als Spitze eines homocentrischen σ-Büschels, dem dann im Bildraume ein bestimmtes Σ-Büschel nebst der entsprechenden Kaustik und dazugehöriger Wellenschaar entspricht. Das Verschwinden von Ψ besagt nun auch, dass die einzelnen Wellen der genannten Schaar von dem betrachteten Lichtweg in Nabelpunkten geschnitten werden. Das Entsprechende gilt, wenn man zu einem homocentrischen Σ-Büschel mit der Spitze Π das conjugierte σ-Büschel aufsucht.

Das zu einem bestimmten Eikonaltypus $E(t, u, T, U)$ gehörige Ψ gestattet die Gesammtheit der Eikonale von diesem Typus und entsprechend die dazugehörigen Abbildungen in drei grosse Gruppen zu sondern, je nachdem

1) Ψ sich identisch auf eine von Null verschiedene Constante a reduciert,

2) Ψ identisch gleich Null wird,

3) Ψ eine wirkliche Function der Lichtwegcoordinaten t, u, T, U ist.

In dem ersten Falle wird die Bedingung $\Psi = 0$ von keinem Lichtwege erfüllt; es existieren keine anastigmatischen Elementarbüschel, a fortiori also auch keine anastigmatischen Punktepaare. Die Eikonale dieser Gruppe sind als die Lösungen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Psi = a$ definiert.

In der zweiten Gruppe verschwindet Ψ für jeden Lichtweg, es kommt also längs jedes Lichtweges ein anastigmatisches Elementarbüschel vor. Diese Büschel und die zu ihnen gehörigen Spitzen bilden eine Mannigfaltigkeit μ_4. Da nun der Raum nur eine μ_3 von Punkten enthält, so muss jedes π die Spitze von unendlich vielen Elementarbüscheln sein. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Bilden die π eine μ_3 oder einen Körper, so ist jeder Punkt dieses Körpers die Spitze einer μ_1 von Elementarbüscheln. Das σ-Büschel mit einem solchen π als Spitze erzeugt im Bildraume Wellen, die eine μ_1 von Nabelpunkten oder eine Nabelpunktcurve besitzen. Bilden dagegen die π eine μ_2 oder eine Fläche, so ist jedes π die Spitze einer μ_2 von Elementarbüscheln. Das homocentrische Büschel mit einem solchen π als Spitze erzeugt im Bildraume Wellen mit einer μ_2 von Nabelpunkten, d. h. diese Wellen sind Kugeln, und die gedachte Fläche der Punkte π Bestandtheil eines anastigmatischen Flächenpaares. Der Fall, dass die π sich auf eine μ_1 oder μ_0 reducieren, kann bei der vorliegenden Gruppe nicht eintreten, da sonst die Mannigfaltigkeit der anastigmatischen Elementarbüschel höchstens eine μ_3 wäre. Dagegen kann der Ort der Punkte π ausser den genannten Körpern oder Flächen sehr wohl noch isolierte Curven oder Punkte enthalten.

Um zu entscheiden, welcher von den beiden erörterten Fällen jedesmal eintritt, hat man sich zu erinnern, dass bei der früheren Untersuchung neben dem Ausdrucke Ψ die Orte der π, Π in der Parameterdarstellung

$$x = \alpha(t,u,T,U)\,, \quad y = \beta(t,u,T,U)\,, \quad z = \gamma(t,u,T,U)\,, \qquad (152)$$
$$X = A(t,u,T,U)\,, \quad Y = B(t,u,T,U)\,, \quad Z = \Gamma(t,u,T,U) \qquad (153)$$

erhalten wurden. Sollen nun die Spitzen π der Elementarbüschel eine Fläche bilden, was nach dem Obigen die gleiche Eigenschaft für die Π nach sich zieht, so dürfen in den Functionen α, β, γ die vier Veränderlichen t, u, T, U nur in zwei Verbindungen auftreten, es müssen daher die vier Functionaldeterminanten der α, β, γ, gebildet nach je drei von den Veränderlichen t, u, T, U, identisch verschwinden. Von den vier so entstehenden Gleichungen sind zwei eine Folge der übrigen; zu der Bedingung $\Psi \equiv 0$ treten also, wenn anastigmatische Flächen vorkommen sollen, noch zwei weitere

hinzu. Da die Functionen α, β, γ in (152) die Ableitungen des Eikonals bis zur zweiten Ordnung enthalten, so stellen die Zusatzbedingungen zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung dar, die zusammen mit der Gleichung zweiter Ordnung $\Psi = 0$ die Eikonale mit anastigmatischen Flächen definieren.

In der dritten der oben genannten Gruppen kann Ψ nur für gewisse Lichtwege verschwinden, die eine μ_3 bilden. Die Spitzen π können eine μ_3 oder μ_2 oder μ_1, die anastigmatischen Punkte dagegen höchstens eine μ_1 bilden. Das Vorkommen anastigmatischer Flächen ist also bei dieser Gruppe ausgeschlossen.

In der vorstehenden Erörterung fehlen die anastigmatischen Körper. Sie gehören, wie man leicht sieht, als Grenzfall in die zweite Gruppe und treten auf, wenn in (152) der Ausdruck für x schlechthin unbestimmt wird.

Die Bedingungen für das Auftreten anastigmatischer Flächen sind ziemlich verwickelt; schon der Ausdruck Ψ ist nicht ganz kurz, während die früher in (114) gegebene Parameterdarstellung für diese Klasse von Eikonalen einfach genug ausfällt. Bei dem für die Optik wichtigsten Falle anastigmatischer Ebenenpaare kommt man allerdings auf übersichtliche Gleichungen. Die in (106) bis (109) gegebene explicite Darstellung zeigt, dass bei den Formen [1], [4], [13], [16] das Eikonal $E(t, u, T, U)$ den drei Bedingungen

$$0 = \frac{\partial^2 E}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial U} = \frac{\partial^2 E}{\partial U^2} \tag{154}$$

zu genügen hat, sobald die Coordinatenaxen passend gewählt werden. Uebrigens gehören, wenn man zu der Theorie der optischen Instrumente übergeht, die dabei zu überwindenden Schwierigkeiten einem wesentlich anderen Aufgabenkreise an, als der bisher behandelte war. Da dieser Gegenstand, so weit ich erkennen kann, eine eigene, ziemlich weitschichtige Untersuchung für sich erfordert, so beschränke ich mich darauf, ihn nur kurz zu streifen. Es treten dabei Fragen auf, wie die folgenden:

lässt sich jede strahlenweise Abbildung durch optische Hülfsmittel, d. h. durch Brechungen (und Spiegelungen) verwirklichen;

welches sind die wesentlichen Eigenschaften der Eikonale, die aus einer, aus zwei, aus drei u. s. w. Brechungen entspringen;

welches sind die Eigenschaften der Eikonale, wenn es sich im Besonderen um die Brechung an centrierten Kugelflächen handelt; besitzt die Zahl der in die Eikonale eingehenden constanten Parameter einen Grenzwerth oder geht sie mit wachsender Zahl der Brechungen über alle Grenzen.

Die Erledigung solcher und ähnlicher Fragen ist nothwendig, wenn man in der *allgemeinen* Theorie der optischen Systeme über den gegenwärtigen Stand wesentlich hinauskommen will. So lange die praktische Optik bei der Zusammensetzung einer grösseren Zahl von Brechungen auf den zur Zeit allein gangbaren Weg des numerischen Ausprobierens angewiesen ist, sind die thatsächlich erreichten Erfolge wesentlich das Ergebniss einer durch Geschicklichkeit und lange Uebung erworbenen Kunst, die sich der Einzelne immer erst neu anzueignen hat, die aber nicht, wie auf anderen theoretisch vollständig durchgearbeiteten Gebieten, in Form eines Gebäudes von fertigen und allgemein gültigen Lehrsätzen überliefert werden kann. Unzweifelhaft beruhen die Leistungen der heutigen Mikroskop- und Camera-Objective auf der unbewussten Innehaltung bestimmter, allgemeiner Gesetze, deren strenge Formulierung erst die Einsicht in den wahren Grund des erzielten Erfolges verschaffen würde. Ein Beispiel hierfür ist der von ABBE geführte Nachweis, dass in der Optik der Sinussatz bereits vor seiner Auffindung, also unbewusst, befolgt worden ist[1].

Nach diesen Bemerkungen mögen noch, um den Gebrauch des Eikonals zu zeigen, einige Anwendungen auf besondere Fälle behandelt werden.

XII.

Als erstes Beispiel soll die Brechung an einer Fläche untersucht werden. Statt jedoch die Gleichungen hierfür direct aufzustellen, wollen wir zunächst die Bedingungen dafür aufsuchen, dass bei einer strahlenweisen Abbildung die beiden Bestandtheile σ und Σ eines Lichtweges einander stets schneiden. Lässt man das Axensystem (XYZ) für den Bildraum Ω mit dem Axensystem (xyz) von

---

1) Siehe die Bemerkung bei CZAPSKI Seite 103 oben.

ω zusammenfallen, so müssen zwischen dem Strahlendurchschnitt (xyz) und den Strahlencoordinaten h, k, p, q und H, K, P, Q die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= h + \frac{xp}{m} = H + \frac{xP}{M}, \\ z &= k + \frac{xq}{m} = K + \frac{xQ}{M} \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

bestehen, woraus

$$H - h = x\left(\frac{p}{m} - \frac{P}{M}\right), \quad K - k = x\left(\frac{q}{m} - \frac{Q}{M}\right),$$

$$x = \frac{H - h}{\frac{p}{m} - \frac{P}{M}} = \frac{K - k}{\frac{q}{m} - \frac{Q}{M}} \tag{156}$$

folgt. Benutzt man das Eikonal $E(p, q, P, Q)$ und setzt die Abbildungsgleichungen

$$-nh = \frac{\partial E}{\partial p}, \quad -nk = \frac{\partial E}{\partial q}, \quad NH = \frac{\partial E}{\partial P}, \quad NK = \frac{\partial E}{\partial Q}$$

an, so erhält man aus (156) für E die lineare Differentialgleichung

$$\left(n\frac{\partial E}{\partial P} + N\frac{\partial E}{dp}\right)\left(\frac{q}{m} - \frac{Q}{M}\right) = \left(n\frac{\partial E}{\partial Q} + N\frac{\partial E}{\partial q}\right)\left(\frac{p}{m} - \frac{P}{M}\right).$$

Führt man die neuen Veränderlichen

$$e = NM - nm, \quad f = NP - np, \quad g = NQ - nq$$

ein, so lässt sich E als Function von e, f, g und von einer der ursprünglichen Veränderlichen, z. B. p, in der Form

$$E(p, q, P, Q) = \varphi(e, f, g, p)$$

darstellen. Die Differentialgleichung für φ nimmt dann die Form

$$N\frac{\partial \varphi}{\partial p}\left(\frac{q}{m} - \frac{Q}{M}\right) = 0$$

an, d. h. φ darf p nicht explicite enthalten, sondern nur die drei Grössen e, f, g. Umgekehrt, wenn das Eikonal die Form $\varphi(e, f, g)$ besitzt, so schneiden die conjugierten Strahlen einander. Denn bildet man mit

$$E(p, q, P, Q) = \varphi(e, f, g)$$

die Abbildungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} h &= -\frac{1}{n}\frac{\partial E}{\partial p} = -\frac{p}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial e} + \frac{\partial \varphi}{\partial f}, & k &= -\frac{1}{n}\frac{\partial E}{\partial q} = -\frac{q}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial e} + \frac{\partial \varphi}{\partial g}, \\ H &= \frac{1}{N}\frac{\partial E}{\partial P} = -\frac{P}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial e} + \frac{\partial \varphi}{\partial f}, & K &= \frac{1}{N}\frac{\partial E}{\partial Q} = -\frac{Q}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial e} + \frac{\partial \varphi}{\partial g} \end{aligned}\right\} \quad (157)$$

und setzt die h, k, H, K in (156) und (155) ein, so liefern die je zwei Ausdrücke für die x, y, z übereinstimmend dieselben Werthe, nämlich

$$x = \frac{\partial \varphi}{\partial e}, \quad y = \frac{\partial \varphi}{\partial f}, \quad z = \frac{\partial \varphi}{\partial g}. \quad (158)$$

Die vorstehenden Gleichungen (158) definieren den Ort der Punkte $\Pi(xyz)$, in denen sich die beiden conjugierten Strahlen jedes Lichtweges schneiden. Da die Gesammtheit der Lichtwege eine μ_4, die durch einen Punkt möglichen Strahlen aber eine μ_2 bilden, so ist der Ort der Punkte Π eine μ_3 oder eine μ_2.

Sind die Gleichungen (158), wie zunächst vorausgesetzt werden soll, nach den e, f, g von einander unabhängig, lassen sich also die e, f, g aus (158) durch die x, y, z ausdrücken, so ist $\Pi = \mu_3$. In diesem Falle kann sich der Ausdruck

$$\tau = e\frac{\partial \varphi}{\partial e} + f\frac{\partial \varphi}{\partial f} + g\frac{\partial \varphi}{\partial g} - \varphi \quad (159)$$

nicht identisch auf eine Constante c reducieren. Denn sonst wären wegen der Identität

$$e\frac{\partial \varphi}{\partial e} + f\frac{\partial \varphi}{\partial f} + g\frac{\partial \varphi}{\partial g} \equiv \varphi - c \quad (160)$$

der Ausdruck $\varphi - c$ eine homogene Function erster Ordnung der e, f, g und die rechten Seiten in (158) homogene Functionen nullter Ordnung, also als Functionen der beiden Quotienten $f:e$ und $g:e$ darstellbar. Dies widerspräche aber der vorausgesetzten Auflösbarkeit des Systems (158). Denkt man sich in (159) oder in

$$\tau = ex + fg + gz - \varphi$$

die e, f, g durch die x, y, z ausgedrückt und die Function $\tau(x, y, z)$ gebildet, so ist wegen (158)

$$d\tau(x, y, z) = edx + f\ldots$$

In der Flächenschaar

$$\tau(x, y, z) = \text{constans}$$

sind also für die durch den Punkt $\Pi(xyz)$ hindurchgehende Fläche die Richtungscosinus der Normale proportional zu den e, f, g.

Durch jeden der betrachteten Strahlendurchschnitte Π geht eine μ_1 von Strahlen oder eine Schaar hindurch. Es sei $\Pi(x_0 y_0 z_0)$ oder kürzer Π_0 ein beliebiger dieser Durchschnittspunkte. Man lege durch Π_0 die τ-Fläche, bestimme aus

$$x_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial e}, \quad y_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial f}, \quad z_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial g}$$

für die e, f, g das Werthesystem e_0, f_0, g_0, dann sind die Richtungscosinus der Flächennormale in Π_0 proportional den e_0, f_0, g_0. Die Schaar der Lichtwege, für die Π_0 gemeinsamer Strahlendurchschnitt ist, wird durch die Gleichungen

$$NM - nm = e_0, \quad NP - np = f_0, \quad NQ - nq = g_0$$

bestimmt, d. h. die conjugierten Strahlen der Schaar verhalten sich so, als ob in Π_0 eine Brechung mit den Brechungsindices n, N und mit der Flächennormale als Einfallsloth stattfände; ferner sind die Strahlen symmetrisch um das Einfallsloth herum angeordnet, bilden also Kreiskegel.

Sind dagegen die rechten Seiten in (158) von einander abhängig, so reduciert sich der Ort der Strahlendurchschnitte Π auf eine gewisse Fläche Φ, deren Gleichung in x, y, z sich aus (158) durch die Elimination der e, f, g ergiebt; jeder Punkt Π in dieser Fläche ist dann gemeinsamer Strahlendurchschnitt für ein Büschel von Lichtwegen. Dieses Büschel lässt sich folgendermassen in Kreiskegelschaaren zerlegen. Zu einem gegebenen Punkte Π_0 in Φ gehört eine μ_1 von Werthesystemen der e, f, g, die den Gleichungen (158) genügen. Ist e_0, f_0, g_0 eine beliebig herausgegriffene Lösung von (158), so bestimmen die Gleichungen

$$NM - nm = e_0, \quad NP - np = f_0, \quad NQ - nq = g_0$$

eine Schaar von Lichtwegen mit dem gemeinsamen Strahlendurchschnitt Π_0. Die conjugierten Strahlen dieser Schaar verhalten sich wiederum so, als ob in Π_0 eine Brechung mit den Indices n, N um ein Einfallsloth herum stattfände, dessen Richtungscosinus den Grössen e_0, f_0, g_0 proportional sind. Diese Einfallslothe sind nun im Allgemeinen

von einander verschieden und bilden selber eine Schaar. Sollen aber die Lothe alle zusammenfallen, wie dies bei der Brechung an einer einzigen Fläche nöthig ist, so müssen alle zu einem Punkte Π_0 gehörigen Lösungen von (158) einander proportional sein, d. h. die rechten Seiten von (158) dürfen nur die Verhältnisse der e, f, g enthalten, müssen also in den e, f, g homogen nullter Ordnung sein. Die Function φ wird dann, von einer additiven Constante abgesehen, homogen erster Ordnung. Damit haben wir folgenden Satz gewonnen:

Ist $E(p, q, P, Q)$ das Eikonal für die Brechung an einer Fläche, so lässt es sich, wenn die Coordinatenaxen für Object- und Bildraum zusammenfallen, in der Form

$$E(p, q, P, Q) = \varphi(e, f, g) \tag{162}$$

darstellen, wo φ, von einer additiven Constante abgesehen, eine homogene Function erster Ordnung der drei Grössen

$$e = Nm - nm\,, \quad f = NP - np\,, \quad g = NQ - nq \tag{163}$$

bedeutet; die brechende Fläche selber ist durch die Gleichungen

$$x = \frac{\partial\varphi}{\partial e}\,, \quad y = \frac{\partial\varphi}{\partial f}\,, \quad z = \frac{\partial\varphi}{\partial g} \tag{164}$$

bestimmt. Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

Als Beispiel wollen wir den Ausdruck

$$E(p, q, P, Q) = \varphi(e, f, g) = \alpha e + \beta J \tag{165}$$

wählen, wo die α, β Constanten bedeuten und die Grösse J durch die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} J^2 &= e^2 + f^2 + g^2 \\ &= N^2 + n^2 - 2Nn(Mm + Pp + Qq) \\ &= (N - n)^2\left(1 + 2Nn\frac{1 - Mm - Pp - Qq}{(N - n)^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

bestimmt ist. Das Vorzeichen von J soll mit dem von $N - n$ übereinstimmen, d. h. in der Gleichung

$$J = (N - n)\left(1 + 2Nn\frac{1 - Mm - Pp - Qq}{(N - n)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{167}$$

soll die Wurzel immer positiv genommen werden. Da φ in den e, f, g homogen erster Ordnung ist, so haben wir es mit dem Eikonal

der Brechung an einer einzelnen Fläche und den Brechungsindices n, N zu thun. Die Flächengleichung erhalten wir nach (164) in der Gestalt

$$x = \alpha + \frac{\beta e}{J}, \quad y = \frac{\beta f}{J}, \quad z = \frac{\beta g}{J},$$

woraus

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 = \beta^2$$

folgt, d. h. die brechende Fläche ist eine Kugel mit dem Radius $\pm \beta$, ihr Mittelpunkt liegt auf der x-Axe und besitzt die Abscisse α. Da es sich bei Linsenflächen immer nur um Kugelabschnitte handelt, setzen wir, um die Formel für diesen Fall aufzustellen, fest, dass die Abscissen x in der Richtung der Lichtbewegung wachsen sollen; für die M, m kommen dabei immer nur positive Werthe in Betracht. Für den Lichtweg in der x-Axe hat man dann

$$\begin{aligned} M &= m = +1, & f &= g = 0, \\ e &= N - n, & J &= N - n, \end{aligned}$$

woraus die Scheitelabscisse gleich $\alpha + \beta$ folgt. Setzt man den Krümmungsradius ϱ des brechenden Kugelabschnitts positiv oder negativ an, je nachdem die Fläche ihre hohle Seite nach der Richtung der wachsenden oder abnehmenden x wendet, so wird

$$\alpha = (\alpha + \beta) + \varrho, \quad \varrho = -\beta.$$

Das betrachtete Eikonal lässt sich also in der Form

$$E(p, q, P, Q) = (a + \varrho)e - \varrho J \tag{167}$$

schreiben, wo a die Scheitelabscisse, $a + \varrho$ die Mittelpunktsabscisse und ϱ der Krümmungsradius ist.

Handelt es sich um die Zusammensetzung zweier Brechungen zwischen den drei an einander grenzenden Medien ω_1, ω_2, ω_3, so hat man, wenn den Brechungsexponenten n und den Richtungscosinus m, p, q für die einzelnen Räume die Indices 1, 2, 3 angehängt werden, zunächst den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Gamma = \varphi(n_2 m_2 - n_1 m_1, n_2 p_2 - n_1 p_1, n_2 q_2 - n_1 q_1) \\ + \psi(n_3 m_3 - n_2 m_2, n_3 p_3 - n_2 p_2, n_3 q_3 - n_2 q_2) \end{aligned}$$

anzusetzen, wo die φ, ψ homogene Functionen ihrer Argumente sind. Die Elimination von p_2 und q_2 mittelst der Bedingungen

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p_2} = \frac{\partial \Gamma}{\partial q_2} = 0$$

verwandelt dann Γ in das Eikonal $E(p_1, q_1, p_3, q_3)$ der aus den beiden Brechungen zusammengesetzten Abbildung. In ähnlicher Weise ist nach dem Früheren zu verfahren, wenn beliebig viele Brechungen zusammengesetzt werden sollen. So lange über die brechenden Flächen nichts Näheres festgesetzt ist, hat man die φ, ψ, . . . als willkürliche Functionen anzusehen. Will man nun die gemeinsamen charakteristischen Eigenschaften für die auf zwei, drei, u. s. w. Brechungen beruhenden Abbildungen auffinden, so hat man die willkürlichen Functionen und die Veränderlichen p, q der Zwischenmedien zu eliminieren, was auf partielle Differentialgleichungen führt. Die Elimination der willkürlichen Functionen lässt sich ohne grosse Schwierigkeit durchführen, dagegen ist es mir nicht gelungen, selbst in dem Falle von zwei brechenden Umdrehungsflächen mit gemeinsamer Axe, die Endformeln in eine hinreichend geschmeidige Gestalt zu bringen, und es scheint darnach, dass man bei der Aufsuchung allgemeiner Beziehungen darauf angewiesen ist, die Zwischenvariablen beizubehalten. Uebrigens empfiehlt es sich auch in dem Falle, wo die brechenden Flächen vollständig bekannt sind, die Formeln so zu stellen, dass die geforderten Eliminationen nicht analytisch, sondern numerisch ausgeführt werden. Ist z. B. ein gewöhnliches Linsensystem mit centrierten Kugelflächen und den einzelnen Medien ω_1, ω_2, . . . ω_r gegeben, so lege man die x-Axen in die Figuraxe des Systems und lasse die Grundebenen der einzelnen Räume zusammenfallen. Die Eikonale $E(\omega_1 \omega_2)$, $E(\omega_2 \omega_3)$, . . . der einzelnen Brechungen sind dann nach (167) anzusetzen. Hängt man den Grössen n, h, k, p, q die Nummern ihrer Medien als Index an, so erhält man zunächst die Gleichungspaare

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{I:} & -n_1 h_1 = \dfrac{\partial E(\omega_1 \omega_2)}{\partial p_1}, & -n_1 k_1 = \dfrac{\partial E(\omega_1 \omega_2)}{\partial q_1}, \\
\text{II:} & n_2 h_2 = \dfrac{\partial E(\omega_1 \omega_2)}{\partial p_2}, & n_2 k_2 = \dfrac{\partial E(\omega_1 \omega_2)}{\partial q_2}, \\
\text{III:} & -n_2 h_2 = \dfrac{\partial E(\omega_2 \omega_3)}{\partial p_2}, & -n_2 k_2 = \dfrac{\partial E(\omega_2 \omega_3)}{\partial q_2}, \\
\text{IV:} & n_3 h_3 = \dfrac{\partial E(\omega_2 \omega_3)}{\partial p_3}, & n_3 k_3 = \dfrac{\partial E(\omega_2 \omega_3)}{\partial q_3},
\end{array}\right\} \quad (168)$$

u. s. w.

Um den Verlauf eines im ersten Medium gegebenen Strahles zu verfolgen, hat man aus I mit den gegebenen h_1, k_1, p_1, q_1 die Grössen p_2, q_2 zu suchen und aus II damit h_2, k_2 zu berechnen; aus III und IV folgt dann der Reihe nach ebenso p_3, q_3, h_3, k_3, u. s. w. Bringt man die in (168) geforderten Auflösungen und Substitutionen durch Einführung passender Hülfsgrössen auf eine für die numerische Rechnung schickliche Form, so gelangt man zu bekannten Rechnungsvorschriften für Strahlen, die nicht in einer Axenebene liegen. Ob man dabei die trigonometrische oder die rein algebraische Form der Rechnung wählt, ist im Grunde genommen Geschmackssache. In dem nachstehenden algebraischen und leicht zu verificierenden Formelsystem ist die Aufgabe gelöst für die Abbildung (167) oder

$$E(p, q, P, Q) = (a + \varrho)(NM - nm) - \varrho J,$$
$$J^2 = N^2 + n^2 - 2Nn(Mm + Pp + Qq)$$

zu gegebenen h, k, p, q die H, K, P, Q zu finden. Die Gleichungen sind dabei so angesetzt, dass mit einer vorgeschriebenen logarithmischen Stellenzahl die grösstmögliche Schärfe der Endwerthe erreicht wird, dass also die Genauigkeitsverluste, die bei einfacher aussehenden Formeln eintreten können, vermieden sind; die Endgleichungen geben direct die Aenderungen, die die h, k, p, q durch die Brechung erleiden. Also gegeben h, k, p, q, damit rechnet man der Reihe nach

$$m^2 = 1 - p^2 - q^2,$$

$$N\varrho\xi = h + \frac{a + \varrho}{m} p, \quad N\varrho\eta = k + \frac{a + \varrho}{m} q, \quad \zeta = \frac{\xi q - \eta p}{m},$$

$$\zeta_1 = m^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad \zeta_2 = +\sqrt{1 - \zeta_1 N^2}, \quad \zeta_3 = +\sqrt{1 - \zeta_1 n^2},$$

$$\zeta_4 = Nn\zeta_1\left(\frac{N}{1 + \zeta_2} - \frac{n}{1 + \zeta_3}\right), \qquad J = N - n + \zeta_4,$$

$$\zeta_5 = \frac{(N - n)J\zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_3}, \quad \zeta_6 = \zeta_5 - J(\xi p + \eta q),$$

$$\frac{M}{m} = 1 - \zeta_6, \quad P - p = -p\zeta_6 - \xi J, \quad Q - q = -q\zeta_6 - \eta J,$$

$$\zeta_7 = \frac{aJ}{M} + \varrho\frac{N - n}{M}\frac{p^2 + q^2}{1 + m} + \varrho\frac{N - n}{M}\zeta_4 + \varrho N\frac{\zeta_6}{1 - \zeta_6},$$

$$H - h = \xi\zeta_7, \qquad K - k = \eta\zeta_7.$$

Hierzu tritt die Controlgleichung

$$n(hq - kp) = N(HQ - KP).$$

Will man auf einem bereits durchgerechneten Lichtwege die Brennlinien bestimmen, so gestaltet sich bei Anwendung des Eikonals die Rechnung folgendermassen. Man differentiire die Gleichungen (168), indem alle Coordinaten als veränderlich betrachtet werden. Die Coefficienten der Differentiale sind dann bekannte numerische Grössen, und die Elimination der zu den Zwischenmedien gehörigen dh, dk, dp, dq bietet wegen der besonderen Form der Gleichungen keine erheblichen Schwierigkeiten. Nach beendeter Elimination erhält man für die dh, dk, dp, dq der beiden Endmedien ω_1 und ω_r Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
-n_1 dh_1 &= E_{11} dp_1 + E_{12} dq_1 + E_{13} dp_r + E_{14} dq_r, \\
-n_1 dk_1 &= E_{21} dp_1 + E_{22} dq_1 + E_{23} dp_r + E_{24} dq_r, \\
n_r dh_r &= E_{31} dp_1 + E_{32} dq_1 + E_{33} dp_r + E_{34} dq_r, \\
n_r dk_r &= E_{41} dp_1 + E_{42} dq_1 + E_{43} dp_r + E_{44} dq_r,
\end{aligned}$$

wo die $E_{\alpha\beta}$ zugleich die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des Eikonals $E(p_1, q_1, p_r, q_r)$ der zusammengesetzten Abbildung sind. Mit diesen Ableitungen sind aber die Grössen gegeben, die man in die Gleichung der Brennlinienorte (122) einsetzen muss.

Will man die Aenderungen der Brennlinien untersuchen, die bei der Verschiebung eines Lichtweges eintreten, so muss man die Ableitungen dritter Ordnung des Eikonals kennen. Die Fortsetzung dieser Betrachtungsweise führt zu der Aufgabe, für das Eikonal die Potenzreihenentwicklungen nach seinen Veränderlichen aufzustellen. Solche Reihenentwicklungen sind bisher vorzugsweise benutzt worden, um bei sphärischen Linsensystemen die sogenannten Aberrationen rein analytisch darzustellen. Die Mängel, die diesem Verfahren anhaften, sind bekannt. Die Gruppen von Gliedern einer bestimmten Ordnung werden mit wachsender Ordnungsnummer rasch ausserordentlich weitläufig; ferner lässt sich aus der analytischen Ordnungsnummer eines Gliedes nicht immer ein Schluss auf seine numerische Grössenordnung ziehen. Der erstgenannte Uebelstand liegt in der Natur der Sache. Der Zusammenhang zwischen den Strahlen im ersten und letzten Medium führt schon nach wenigen Brechungen auf complicirte algebraische Gebilde; dementsprechend ist die Kaustik, die ein homocentrisches σ-Büschel im

Bildraume erzeugt, eine algebraische Fläche mit verwickelten Singularitäten, und man kann geradezu sagen, dass die Kunst der Optiker dahin ziele, solche Singularitäten in einen möglichst engen Raum zusammenzudrängen. Stellt man sich die Aufgabe, übersichtlichere Entwicklungsformen aufzufinden, so müssten diese der besonderen Natur der darzustellenden Beziehungen angepasst sein; dazu gehört aber eine vollständigere Einsicht in die allgemeinen und wesentlichen Eigenschaften dieser Beziehungen, als wir sie zur Zeit besitzen. Der Nutzen der Potenzreihenentwicklungen und ihrer nächsten Abkömmlinge ist deshalb auf die Fälle beschränkt, wo die zu untersuchenden Aenderungen eines Lichtweges innerhalb eines geringen Spielraumes bleiben. Da die Betrachtung dieser Fälle immerhin als eine Annäherung von Werth ist, so möge noch gezeigt werden, wie sich für centrierte Abbildungen die Sache gestaltet, wenn man das Eikonal in eine Potenzreihe entwickelt und von dieser die Anfangsglieder benutzt.

XIII.

Die beiden auf einander abgebildeten Räume ω, Ω seien, wie früher, jeder auf sein eigenes Axensystem (xyz), (XYZ) bezogen. Einem Lichtwege mit den beiden Bestandtheilen σ, Σ' werde eine gewisse Bewegung ertheilt, die die beiden Strahlen in die Lage σ', Σ'' überführt, und zwar soll die Bewegung für σ aus einer Drehung um die x-Axe mit dem Drehungswinkel φ bestehen. Soll nun die entsprechende Bewegung von Σ' ebenfalls eine Drehung sein, und zwar um die X-Axe und mit demselben Drehungswinkel φ, so müssen selbstverständlich gewisse Bedingungen sowohl für die Abbildung, als auch für die Lage der Coordinatenaxen erfüllt sein. Sind diese Bedingungen allgemein, d. h. für jeden Strahl σ und für jeden Werth von φ, erfüllt, so wollen wir die Abbildung »centriert« nennen; die x- und X-Axen sind dabei die »Centrierungsaxen«. Das einfachste, aber nicht das einzige Beispiel von solchen Abbildungen sind die Linsensysteme, bei denen die Brechungen an coaxialen Umdrehungsflächen erfolgen.

Bei den nachstehenden Betrachtungen über centrierte Abbildungen legen wir die Axen der x, X immer in die Centrierungsaxen. Ist der Lichtweg $(\sigma'\Sigma'')$ aus dem Lichtwege $(\sigma\Sigma')$ durch die vorhin

betrachtete Drehung von der Grösse φ entstanden, und bezeichnet nun ferner die Coordinaten von σ', Σ'' durch Accente, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} h' &= h\cos\varphi - k\sin\varphi\,, & p' &= p\cos\varphi - q\sin\varphi\,, \\ k' &= h\sin\varphi + k\cos\varphi\,, & q' &= p\sin\varphi + q\cos\varphi\,, \\ H' &= H\cos\varphi - K\sin\varphi\,, & P' &= P\cos\varphi - Q\sin\varphi\,, \\ K' &= H\sin\varphi + K\cos\varphi\,, & Q' &= P\sin\varphi + Q\cos\varphi\,, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass im Bildraume die positiven Richtungen der Seitenaxen passend gewählt werden. Würde man im Bildraume die Richtungen $+Y$, $-Y$ oder $+Z$, $-Z$ mit einander vertauschen, so hätte man in den Gleichungen für die H', K', P', Q' an Stelle von φ den entgegengesetzten Werth $-\varphi$ zu schreiben. Wegen der Centrierung der Abbildung müssen die Abbildungsgleichungen bei Einführung der h', k', ... statt der h, k, ... ihre ursprüngliche Form wieder annehmen. Das Gleiche gilt von dem Eikonal $E(p, q, P, Q)$, das also die vier Veränderlichen nur in solchen Verbindungen enthalten darf, die sich durch die obige Transformation nicht ändern. Setzen wir nun voraus, was für die optischen Anwendungen immer zutrifft, dass die Abbildung in der Umgebung des Lichtweges

$$p = q = P = Q = 0$$

sich regulär verhalte, also keine Unstetigkeiten aufweise, so ist $E(p, q, P, Q)$ nach Potenzen der p, q, P, Q entwickelbar. Schreiben wir dementsprechend

$$E = G_0 + G_1 + G_2 + \cdots,$$

wo in G_α alle Glieder von der Dimension α zusammengefasst sind, so muss sich jedes einzelne G ebenso wie E verhalten, d. h. es nimmt bei dem Uebergange auf die h', k', ... die ursprüngliche Form wieder an. Diese Eigenschaft lässt sich auch so aussprechen: wenn in G_α die Substitution

$$p = r\cos s\,,\quad q = r\sin s\,,\quad P = R\cos S\,,\quad Q = R\sin S$$

vorgenommen wird, so enthält G ausser den r, R die s, S nur in der Verbindung $s - S$. Hieraus beweist man ohne Schwierigkeit, dass die G als ganze homogene Functionen der vier Verbindungen

$$\alpha = p^2 + q^2\,,\quad \beta = pP + qQ\,,\quad \gamma = P^2 + Q^2\,,\quad \delta = pQ - qP$$

darstellbar sind, und dass sich demgemäss E nach den α, β, γ, δ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln lässt. Alle Glieder in E sind hiernach in den p, q, P, Q von gerader Dimension, ferner enthalten die Ausdrücke für die h, k, H, K nur Glieder ungerader Dimension. Für den Lichtweg

$$p = q = P = Q = 0$$

verschwinden daher die h, k, H, K gleichzeitig; d. h. dieser Lichtweg fällt in die Centrierungsaxen.

Schreibt man für den Augenblick

$$E(p, q, P, Q) = E_1 d\alpha + E_2 d\beta + E_3 d\gamma + E_4 d\delta,$$

so werden die Abbildungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -nh &= 2pE_1 + PE_2 + QE_4, & NH &= pE_2 + 2PE_3 - qE_4, \\ -nk &= 2qE_1 + QE_2 - PE_4, & NK &= qE_2 + 2QE_3 + pE_4, \end{aligned}\right\} \quad (169)$$

woraus

$$n(pk - hq) = N(PK - HQ) \qquad (170)$$

folgt. Liegen die σ-Strahlen in einer Ebene g, die durch die x-Axe geht, so verschwindet in (170) die linke Seite, folglich ist auch die rechte gleich Null; die conjugierten Σ liegen daher ebenfalls in einer Ebene G, die durch die X-Axe geht. Dreht man g um einen bestimmten Winkel, so dreht sich G um denselben Winkel. Solche Ebenen können ebenfalls als conjugiert bezeichnet werden. Legt man nun die Seitenaxen so, dass die xy- und xz-Ebenen conjugiert zu den XY- und XZ-Ebenen werden, so liefern zwei Strahlen σ und σ', die symmetrisch zur xy-Ebene liegen, im Bildraume zwei Strahlen Σ und Σ', die symmetrisch zur XY-Ebene sind. Die beiden dazu gehörigen Lichtwege vertauschen ihre Rolle, wenn man bei den k, q, K, Q gleichzeitig die Vorzeichen umkehrt. Da diese Umkehrung das Eikonal wegen der Definitionsgleichung

$$E = \int(-nhdp - nkdq + NHdP + NKdQ)$$

ungeändert lässt und bei den vier Grössen α, β, γ, δ nur das Vorzeichen von δ ändert, so enthält die Reihenentwicklung von E nach den α, β, γ, δ nur gerade Potenzen von δ. Diese lassen sich aber wegen der Identität

$$\delta^2 = \alpha\gamma - \beta^2$$

eliminieren. Wenn also die Seitenaxen im Object- und Bildraume in conjugierte Ebenen g, G gelegt werden, so lässt sich das Eikonal in der Form

$$E(p, q, P, Q) = f(\alpha, \beta, \gamma) \tag{171}$$

schreiben und nach den α, β, γ in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln. Wir werden die Seitenaxen immer als in der eben angegebenen Weise gewählt denken und demnach E in der Form (171) voraussetzen.

Genau dieselben Betrachtungen lassen sich für die drei anderen Eikonale

$$E(h, k, P, Q)\,,\quad E(h, k, H, K)\,,\quad E(p, q, H, K)$$

anstellen; an die Stelle der α, β, γ treten dann die Verbindungen

$$\begin{array}{lll} h^2 + k^2, & hP + kQ, & P^2 + Q^2, \\ h^2 + k^2, & hH + kK, & H^2 + K^2, \\ p^2 + q^2, & pH + qK, & H^2 + K^2. \end{array}$$

Geht man in der Reihenentwicklung für $E(p, q, P, Q)$ bis zu den Gliedern vierter Ordnung, so erhält man noch durchgehends hinreichend übersichtliche Beziehungen. Zunächst bleiben wir in erster Annäherung bei den Gliedern zweiter Ordnung stehen und setzen an

$$E = a(p^2 + q^2) + b(pP + qQ) + c(P^2 + Q^2). \tag{172}$$

Die Abbildungsgleichungen werden

$$\left.\begin{array}{ll} -nh = 2ap + bP, & NH = bp + 2cP, \\ -nk = 2aq + bQ, & NK = bq + 2cQ. \end{array}\right\} \tag{173}$$

Führen wir wieder die auf den conjugierten Strahlen σ, Σ liegenden Punkte $\pi(xyz)$, $\Pi(XYZ)$ ein, so ist

$$\left.\begin{array}{ll} h = y - \dfrac{xp}{m}, & H = Y - \dfrac{XP}{M}, \\ k = z - \dfrac{xq}{m}, & K = Z - \dfrac{XQ}{M}. \end{array}\right\} \tag{174}$$

Da in (173) Glieder dritter Ordnung vernachlässigt worden sind, so ist dasselbe für (174) angezeigt, d. h. wir können $m = M = 1$ setzen, und erhalten

$$\left.\begin{array}{ll} -n(y - xp) = 2ap + bP, & N(Y - XP) = bp + 2cP, \\ -n(z - xq) = 2aq + bQ, & N(Z - XQ) = bq + 2cQ. \end{array}\right\} \tag{174a}$$

Die Quotienten

$$\frac{ny}{NY} = \frac{(nx - 2a)p - bP}{bp + (NX + 2c)P}, \quad \frac{nz}{NZ} = \frac{(nx - 2a)q - bQ}{bq + (NX + 2c)Q} \tag{175}$$

werden gleichzeitig von dem Lichtwege unabhängig, sobald man die x, X so wählt, dass

$$(nx - 2a)(NX + 2c) + b^2 = 0$$

ist. Hierbei wird

$$\frac{ny}{NY} = \frac{nz}{NZ} = \frac{nx - 2a}{b} = \frac{-b}{NX + 2c}. \tag{176}$$

Dies sind die bekannten Gleichungen für die Collineation zwischen den conjugierten Punkten π, Π. Die dem MALUS'schen Satze widersprechende Collineation ist offenbar durch die Nullsetzung der Grössen $1 - m$ und $1 - M$ in (174) zu Stande gekommen. Die Brennpunktsabscissen im Object- und Bildraume werden

$$f = \frac{2a}{n}, \quad F = -\frac{2c}{N}.$$

Der Coefficient b ist die reducierte Brennweite, und man erhält aus (175)

$$\frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = N\frac{x - f}{b} = -\frac{b}{n(X - F)}, \quad (x - f)(X - F) = -\frac{b}{n}\frac{b}{N}. \tag{177}$$

Die Abscissen der Hauptpunkte ergeben sich aus der Bedingung

$$y = Y, \quad z = Z,$$

und zwar wird

$$x = f + \frac{b}{N}, \quad X = F - \frac{b}{n}.$$

Die Knotenpunkte oder die conjugierten Punkte gleicher Strahlendivergenz folgen aus (174a) durch die Bedingungen

$$y = z = Y = Z = 0, \quad p = P, \quad q = Q.$$

Die Abscissen der Knotenpunkte werden damit

$$x = f + \frac{b}{n}, \quad X = F - \frac{b}{N}.$$

Die vorstehenden Definitionen der beiden Brennpunkte und der reducierten Brennweite beruhen offenbar auf dem Verhalten der

Elementarbüschel, die unendlich nahe bei den Centrierungsaxen verlaufen. Mit den Grössen f, F, b hat man dann

$$E(p,q,P,Q) = nf\frac{p^2+q^2}{2} + b(pP+qQ) - NF\frac{P^2+Q^2}{2}, \quad (178)$$

$$\left.\begin{aligned} -nh &= nfp + bP, & NH &= bp - NFP, \\ -nk &= nfq + bQ, & NK &= bq - NFQ. \end{aligned}\right\} \quad (179)$$

Um für die anderen hier in Betracht kommenden Eikonale die Bedeutung der Coefficienten zu erhalten, setzen wir an

$$\begin{aligned} E(h,k,P,Q) &= a_1(h^2+k^2) + a_2(hP+kQ) + a_3(P^2+Q^2), \\ E(h,k,H,K) &= b_1(h^2+k^2) + b_2(hH+kK) + b_3(H^2+K^2), \\ E(p,q,H,K) &= c_1(p^2+q^2) + c_2(pH+qK) + c_3(H^2+K^2), \end{aligned}$$

und fügen dazu die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} np &= 2a_1h + a_2P, & NH &= a_2h + 2a_3P, \\ np &= 2b_1h + b_2H, & -NP &= b_2h + 2b_3H, \\ -nh &= 2c_1p + c_2H, & -NP &= c_2p + 2c_3H, \end{aligned}$$

die mit dem System (173) aequivalent sein müssen. Durch die Vergleichung mit (173) erhält man die Eikonale

$$\begin{aligned} E(h,k,P,Q) &= -n\frac{h^2+k^2}{2f} - b\frac{hP+kQ}{f} - \frac{nNfF+b^2}{n}\cdot\frac{P^2+Q^2}{2f}, \\ E(h,k,H,K) &= \frac{(nN)^2}{nNfF+b^2}\left(-F\frac{h^2+k^2}{2N} + b\frac{hH+kK}{nN} + f\frac{H^2+K^2}{2n}\right), \\ E(p,q,H,K) &= \frac{nNfF+b^2}{N}\cdot\frac{p^2+q^2}{2F} - b\frac{pH+qK}{F} + N\frac{H^2+K^2}{2F}. \end{aligned}$$

Man erkennt aus diesen Formen, dass die Reihenentwicklung bei gewissen Lagen der Grundebenen versagt. Bei $E(h,k,P,Q)$ darf die ω-Grundebene nicht durch den Brennpunkt des Objectraumes gehen, weil dann f gleich Null ist. Das Entsprechende gilt für $E(p,q,H,K)$. Endlich dürfen bei $E(h,k,H,K)$ die Grundebenen nicht conjugiert sein. Bei dem Eikonal $E(p,q,P,Q)$ sind diese Einschränkungen in der Lage der Grundebenen dagegen nicht vorhanden.

Nimmt man in der Reihenentwicklung jetzt die Glieder vierter Ordnung mit hinzu, so sind die auftretenden Strahlenbüschel im Allgemeinen astigmatisch. Die Discussion der Grundgleichungen (81) oder

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial T} = \frac{\partial \Theta}{\partial U},$$

die jetzt in rationaler Form mit gewissen vorläufig unbestimmten Coefficienten auftreten, kann in sehr verschiedener Weise durchgeführt werden, je nachdem man diese oder jene Eigenschaft der Abbildung untersuchen will. Ein bequemes Mittel zur Veranschaulichung des Strahlenganges besteht darin, dass man die Durchschnitte einer Schaar mit Ebenen senkrecht zu den Centrierungsaxen aufsucht. Es werde, unter Mitnahme der Glieder vierter Ordnung, angesetzt:

$$p^2 + q^2 = u_1, \qquad pP + qQ = u_2, \qquad P^2 + Q^2 = u_3,$$
$$E(p, q, P, Q) = \tfrac{1}{2} nfu_1 + bu_2 - \tfrac{1}{2} NFu_3 + G,$$
$$2G = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$
$$dG = G_1 du_1 + G_2 du_2 + G_3 du_3,$$
$$\Theta = \tfrac{1}{2} nfu_1 + bu_2 - \tfrac{1}{2} NFu_3 + G$$
$$+ n(xm + yp + zq) - N(XM + YP + ZQ). \quad (180)$$

Die Differentiation von Θ nach p und P liefert zunächst zwei Bedingungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} 0 &= p(nf + 2G_1) + P(b + G_2) + n\left(y - \frac{px}{m}\right), \\ 0 &= p(b + G_2) + P(-NF + 2G_3) - N\left(Y - \frac{PX}{M}\right), \end{aligned}\right\} \quad (181)$$

die beiden anderen ergeben sich durch Vertauschung der Seitenaxen. Die Bedingungen (181) bringen wir unter Benutzung der Relation

$$y - h = \frac{px}{m}$$

auf die Form

$$P = -\frac{ym}{x}\frac{nf + 2G_1}{b + G_2} - \frac{h}{x}\frac{n(x - mf) - 2mG_1}{b + G_2}, \quad (182)$$

$$NY = \frac{y - h}{x} m(b + G_2) + P\left\{\frac{NX}{M} - NF + 2G_3\right\}.$$

Die Elimination von P liefert

$$NY = Ay + Bh,$$

wo

$$xA = mb + G_2 - \frac{nf + 2G_1}{b + G_2}\left(\frac{NmX}{M} - NmF + 2G_3\right),$$
$$xB = -mb - G_2 - \frac{n(x - mf) - 2mG_1}{b + G_2}\left(\frac{NX}{M} - NF + 2G_3\right).$$

Diese Gleichungen sind noch richtig, wenn man in G die Glieder aller Ordnungen mitnimmt. Entwickelt man nun nach den u, nimmt ferner die erlaubten Vernachlässigungen vor, und drückt in den u die P, Q nach (182) durch die y, z, h, k aus, so erhält man A und B in der Gestalt

$$A = A_0 + A_1(y^2 + z^2) + A_2(yh + zk) + A_3(h^2 + k^2),$$
$$B = B_0 + B_1(y^2 + z^2) + B_2(yh + zk) + B_3(h^2 + k^2),$$

wo die A_0, B_0 . . . nur von den Constanten des Eikonals und den Abscissen x, X abhängen.

Man denke sich jetzt in der Grundebene des Objectraumes eine Blende gegeben, deren Oeffnung ein um die x-Axe beschriebener Kreis mit dem Halbmesser D sein soll. Ferner denke man sich den Kegel von σ-Strahlen, der den gegebenen Punkt $\pi(xyz)$ des Objectraumes als Spitze und den Rand der Blende als Basis besitzt. Dieser Kegel erzeugt im Bildraume eine Σ-Schaar, deren Durchschnitt mit der Ebene

$$X = \text{constans}$$

durch die Gleichungen

$$NY = Ay + Bh, \qquad NZ = Az + Bk$$

bestimmt ist. Nimmt man, was keine wesentliche Einschränkung ist, $z = 0$ an, und setzt

$$h = D\cos\varphi, \qquad k = D\sin\varphi,$$

so erhält man für Y und Z eine Darstellung von der Form

$$\left.\begin{aligned} Y &= \alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\cos\varphi^2, \\ Z &= \phantom{\alpha + {}} \sin\varphi(\delta + \varepsilon\cos\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (183)$$

Der so bestimmte, von CHARLIER[1]) als »Aberrationscurve« bezeichnete, Durchschnitt der betrachteten Σ-Schaar ist vom vierten Grade und,

---

1) Ueber den Gang des Lichtes durch ein System von sphärischen Linsen. Der k. Ges. d. Wiss. zu Upsala vorgelegt am 20. Juni 1893.

wie man sich ausdrückt, unicursal oder vom Range Null, d. h. die Coordinaten lassen sich durch Substitution

$$\cos y = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2t}{1 + t^2}$$

als rationale Functionen eines Parameters t darstellen, und die Curve besteht deshalb aus einem einzigen in sich zurückkehrenden Linienzuge.

Wenn man in der Entwicklung des Eikonals die Glieder bis zur Ordnung $2r$ mitnimmt, so erhält man für die Aberrationscurve die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} Y &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos \varphi + \cdots + \alpha_r \cos \varphi^r, \\ Z &= \sin \varphi (\beta_0 + \beta_1 \cos \varphi + \cdots + \beta_{r-1} \cos \varphi^{r-1}), \end{aligned}\right\} \quad (184)$$

und zwar kommen, von Grenzfällen abgesehen, die Glieder mit den Coefficienten α_r und β_{r-1} wirklich vor. Die Curve ist also wieder unicursal, aber vom Grade $2r$. Nun ist bei einem Linsensystem, das aus gegebenen algebraischen Flächen zusammengesetzt ist, die hier betrachtete Σ'-Schaar eine algebraische Regelfläche von einem ganz bestimmten endlichen Grade, und dasselbe gilt von der Durchschnittscurve, während die benutzte Reihenentwicklung bei fortschreitender Annäherung auf beliebig hohe Grade führt. Dieser Widerspruch löst sich dadurch, dass die wahre Form der Aberrationscurve im Allgemeinen gar nicht unicursal ist.

Zur Erläuterung dieser Bemerkungen möge der Fall einer brechenden Kugel durchgerechnet werden. Wir setzen das Eikonal wie früher in der Form

$$E(p, q, P, Q) = (a + \varrho)(NM - nm) - \varrho J, \quad (185)$$

$$J^2 = N^2 + n^2 - 2Nn(Mm + Pp + Qq) \quad (186)$$

an und bilden daraus die Abbildungsgleichungen

$$-h = \frac{a+\varrho}{m} p + \frac{N\varrho}{J}\left(P - M\frac{p}{m}\right), \quad -k = \frac{a+\varrho}{m} q + \frac{N\varrho}{J}\left(Q - M\frac{q}{m}\right), \quad (187)$$

$$H = -\frac{a+\varrho}{M} P + \frac{n\varrho}{J}\left(p - m\frac{P}{M}\right), \quad K = -\frac{a+\varrho}{M} Q + \frac{n\varrho}{J}\left(q - m\frac{Q}{M}\right), \quad (188)$$

deren erstes Paar wir mit den Abkürzungen

$$h + \frac{a+\varrho}{m} p = N\varrho\xi\,, \quad k + \frac{a+\varrho}{m} q = N\varrho\eta$$

in die Form

$$0 = J\xi + P - M\frac{p}{m}\,, \quad 0 = J\eta + Q - M\frac{q}{m} \tag{189}$$

bringen. Weiter führen wir drei Hülfsgrössen α, γ, Γ ein, die durch die Gleichungen

$$\gamma = \sqrt{1 - \alpha n^2}\,, \quad \Gamma = \sqrt{1 - \alpha N^2} \tag{190}$$

zusammenhängen, und setzen

$$J = N\gamma - n\Gamma\,, \tag{191}$$

womit die Beziehung zwischen J und α bestimmt ist. Aus (186) und (191) folgt

$$\begin{gathered}(N\gamma - n\Gamma)^2 = N^2 + n^2 - 2Nn(Mm + Pp + Qq)\,,\\ Mm + Pq + Qq = Nn\alpha + \Gamma\gamma\,.\end{gathered} \tag{192}$$

Weiter giebt die Verbindung von (189) und (192)

$$\left.\begin{aligned}&\frac{M}{m} = Nn\alpha + \gamma\Gamma + J(p\xi + q\eta)\,,\\ &P = p\frac{M}{m} - J\xi\,, \quad Q = q\frac{M}{m} - J\eta\,,\end{aligned}\right\} \tag{193}$$

womit die M, P, Q durch die h, k, m, p, q, sowie durch die Constanten und durch α ausgedrückt sind. Bildet man von den letzten beiden Gleichungen die Quadratsumme, so wird nach gehöriger Reduction

$$\alpha = \xi^2 + \eta^2 - (p\xi + q\eta)^2\,. \tag{194}$$

Wir denken uns jetzt wieder wie oben die Kreisblende mit dem Radius D, legen die Grundebene des Eikonals in die Blendenebene und setzen dementsprechend

$$h = D\cos\varphi\,, \quad k = D\sin\varphi\,.$$

Beschränken wir uns ferner auf eine parallele σ-Schaar durch den Blendenrand, so sind die m, p, q constant. Besitzt endlich die »Schirmebene«, in der die Aberrationscurve durch die Σ-Schaar ausgeschnitten wird, die Abscisse X, so sind die Coordinaten Y, Z eines Curvenpunktes aus (188) und (193) in der Form

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{p}{m}(X - a - \varrho) - \frac{J\xi}{M}\left(X - a - \varrho - \frac{nm\varrho}{J}\right), \\ Z &= \frac{q}{m}(X - a - \varrho) - \frac{J\eta}{M}\left(X - a - \varrho - \frac{nm\varrho}{J}\right) \end{aligned}\right\} \quad (195)$$

bestimmt. Nehmen wir, was für unseren Zweck ausreicht, für X den besonderen Werth $a + \varrho$, machen wir ferner die erlaubte Vereinfachung $q = 0$, so wird

$$\left.\begin{aligned} (N\varrho)^2\alpha &= D^2 + p^2(a+\varrho)^2 + 2mp(a+\varrho)D\cos\varphi - p^2D^2\cos\varphi^2, \\ Y &= \xi\frac{nm\varrho}{M}, \qquad Z = \eta\frac{nm\varrho}{M}. \end{aligned}\right\} \quad (196)$$

Der Ausdruck α ist in $\cos\varphi$ vom zweiten Grade, ferner enthalten die Quotienten $Y:\xi$ und $Z:\eta$ die Irrationalitäten γ, Γ, die sich durch rationale Substitutionen für $\cos\varphi$ nicht gleichzeitig beseitigen lassen. Der Rang der betrachteten Curve ist deshalb sicher grösser als Null.

Der Zweck, zu dem die Einführung der Aberrationscurven dienen soll, lässt sich übrigens in sehr einfacher Weise erreichen, sobald die Reihenentwicklung des Eikonals bis zu einer gewissen Ordnung hin vorliegt. Setzen wir zunächst im Objectraume Parallelbüschel voraus, die in irgend einer Weise, z. B. durch Kreisblenden begrenzt sind, so gehört zu jedem Büschel von Lichtwegen ein mittlerer Lichtweg, dessen Coordinaten im Bildraume H_0, K_0, P_0, Q_0 sein mögen. Setzt man

$$H = H_0 + \delta H, \quad K = K_0 + \delta K, \quad P = P_0 + \delta P, \quad Q = Q_0 + \delta Q,$$

so ist für das Eikonal $E(p, q, P, Q)$

$$N\delta H = \frac{\partial E}{\partial(\delta P)}, \qquad N\delta K = \frac{\partial E}{\partial(\delta Q)},$$

und die Ausdrücke auf den rechten Seiten lassen sich unmittelbar bilden, sobald man aus der ursprünglichen Reihe die Entwicklung von E nach den δP, δQ abgeleitet hat. Hat die Schirmebene die Abscisse X, so wird für die Punkte Y, Z in der Schirmebene

$$\delta Y = \delta H - X\frac{\partial M}{\partial(\delta P)}, \quad \delta Z = \delta K - X\frac{\partial M}{\partial(\delta Q)}.$$

Unterwirft man nun z. B. die δP, δQ der Bedingung

$$\delta P^2 + \delta Q^2 = \text{constans} = D^2,$$

so wird das Σ-Büschel in Schaaren zerlegt, die hinreichend nahe dem Rande einer Kreisblende entsprechen und in der Schirmebene Aberrationscurven erzeugen.

Soll die Spitze der homocentrischen σ-Büschel im Endlichen liegen, so wird die Entwicklung in derselben Weise durchgeführt, nur dass dann das Eikonal $E(h, k, P, Q)$ zu benutzen ist.

Als Beispiel zu dem Vorstehenden wollen wir das theoretische Minimum für die Fehlerreste bei einem symmetrischen Objectiv aufsuchen. Wie bereits früher erwähnt wurde, ist es nicht möglich, bei einer symmetrischen Abbildung für die Brennebenen die Forderung der Anastigmasie und der correcten Zeichnung gleichzeitig zu erfüllen. Um die Vorstellung zu fixieren, denke man sich ein photographisches, für unendlich ferne Gegenstände bestimmtes, Objectiv, bei dem zwei congruente Linsensysteme symmetrisch zur Blendenebene angeordnet und dadurch zu einem einzigen centrierten System vereinigt sind. Die x-Axen fallen in die Figuraxe, und die Grundebenen legen wir gemeinsam in die Blendenebene. Das Eikonal setzen wir, mit der erlaubten Vereinfachung $n = N = 1$, in der Form

$$E(p, q, P, Q) = f(1 - m) + bv - F(1 - M) + G(u, v, w),$$
$$u = p^2 + q^2, \quad v = pP + qQ, \quad w = P^2 + Q^2$$

an, wo b die reducierte Brennweite und f, F die Brennpunktsabscissen bedeuten. Die Entwicklung von G nach den u, v, w fängt mit Gliedern zweiter Ordnung an. Wegen der vorausgesetzten Symmetrie ist

$$f = -F, \qquad G(u, v, w) = G(w, v, u).$$

Ein beliebiger Lichtweg schneidet die im Bildraume zur Figuraxe senkrechte Schirmebene mit der Abscisse X in einem Punkte, dessen Coordinaten

$$Y = (X - F)\frac{P}{M} + bp + \frac{\partial G}{\partial P}, \quad Z = (X - F)\frac{Q}{M} + bq + \frac{\partial G}{\partial Q}$$

sind. Weil das Linsensystem für unendlich ferne Objecte bestimmt ist, so kommen nur solche Büschel von Lichtwegen in Betracht, die im Objectraume aus parallelen Strahlen bestehen.

Für die Mittelstrahlen der Elementarbüschel durch das Centrum der Blendenebene gilt wegen der Symmetrie die Beziehung

$$p = P, \qquad q = Q.$$

Wir fordern nun zunächst, dass diese Elementarbüschel in der Brennebene des Bildraumes ein anastigmatisches Bild erzeugen. Es wird also für die Mittelstrahlen

$$X = F, \qquad Y = bp + \frac{\partial G}{\partial P}, \qquad Z = bq + \frac{\partial G}{\partial Q}.$$

Um die Bedingung für das Zusammenfallen der Brennlinien auf die Mittelstrahlen zu erhalten, haben wir den Lichtweg zu variieren, also statt der P, Q die Ausdrücke

$$P + \delta P, \qquad Q + \delta Q$$

einzuführen, während die p, q ungeändert bleiben. Die entsprechenden Variationen von Y und Z werden

$$\delta Y = \frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\delta P + \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial Q}\delta Q + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 G}{\partial P^3}\delta P^2 + \cdots,$$

$$\delta Z = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial Q}\delta P + \frac{\partial^2 G}{\partial Q^2}\delta Q + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 G}{\partial P^2 \partial Q}\delta P^2 + \cdots.$$

Mit der erlaubten Vereinfachung $q = 0$, $Q = 0$ wird bis zu den Gliedern zweiter Ordnung in den δP, δQ

$$\delta Y = \frac{\partial^2 G}{\partial P^2}\delta P + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 G}{\partial P^3}\delta P^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^3 G}{\partial P \partial Q^2}\delta Q^2,$$

$$\delta Z = \frac{\partial^2 G}{\partial Q^2}\delta Q + \frac{\partial^3 G}{\partial P \partial Q^2}\delta P . \delta Q,$$

und das Zusammenfallen der Brennlinien fordert die Erfüllung der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial Q^2} = 0$$

für $q = Q = 0$, $P = p$.

Die Bedingung für die correcte Zeichnung würde die Gleichungen

$$Y = \frac{bp}{m} = bp + \frac{\partial G}{\partial P}, \qquad Z = \frac{bq}{m} = bq + \frac{\partial G}{\partial Q}$$

liefern, die sich für $q = Q = 0$ auf die eine Gleichung

$$pb\left(\frac{1}{m} - 1\right) = \frac{\partial G}{\partial P}, \qquad (p = P)$$

reducieren. Diese Bedingung wollen wir vorläufig in der Form

$$p\,b\big(\varphi(m) - 1\big) = \frac{\partial G}{\partial P}$$

schreiben, wo $\varphi(m)$ eine vor der Hand beliebige Function von m bedeutet, d. h. wir wollen zunächst eine Verzerrung des Bildes zulassen, deren Betrag von dem Werthe des Ausdruckes

$$m\,\varphi(m) - 1$$

abhängt und mit diesem verschwindet. Bezeichnet man noch zur Abkürzung die partiellen Ableitungen nach den u, v, w durch Indices nach dem Schema

$$d\psi(u, v, w) \doteq \psi_1 du + \psi_2 dv + \psi_3 dw\,,$$

so wird für $q = Q = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial P} = pG_2 + 2\,PG_3\,,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = 2G_3 + p^2 G_{22} + 4p\,PG_{23} + 4\,P^2 G_{33}\,,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial Q^2} = 2\,G_3\,,$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial P^3} = 6pG_{23} + 12PG_{33} + p^3 G_{222} + 6p^2 PG_{223} + 12p\,P^2 G_{233} + 8\,P^3 G_{333}\,,$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial P\,\partial Q^2} = 2pG_{23} + 4\,PG_{33}\,,$$

wo auf den rechten Seiten schliesslich noch p für P zu schreiben ist. Die Anastigmasie der Elementarbüschel durch die Blendenmitte und die Verzerrungsgleichung liefert dann die drei Identitäten

$$0 = G_3(p^2, p^2, p^2)\,,$$

$$b\big(\varphi(m) - 1\big) = \frac{1}{p}\,\frac{\partial G}{\partial P} = G_2 + 2\,G_3 = G_2(p^2, p^2, p^2)\,,$$

$$0 = G_{22}(p^2, p^2, p^2) + 4\,G_{23}(p^2, p^2, p^2) + 4\,G_{33}(p^2, p^2, p^2)\,,$$

wo $m = \sqrt{1 - p^2}$ zu setzen ist. Differentiiert man diese Gleichungen wiederholt nach p und beachtet, dass in den Indices von G die Zahlen 1 und 3 mit einander vertauscht werden dürfen, so erhält man, mit Unterdrückung der Zwischenrechnung,

$$G_{11} = G_{33} = G_{13} + \frac{b\varphi'}{4m}, \qquad G_{12} = G_{23} = -2G_{13} - \frac{b\varphi'}{4m},$$

$$G_{22} = 4G_{13},$$

$$G_{222} = 12G_{123} + 18G_{133} - 2G_{333} + b\frac{\varphi' - m\varphi''}{2m^3},$$

$$G_{223} = -4G_{123} - 5G_{133} + G_{333} - b\frac{\varphi' - m\varphi''}{4m^3},$$

$$G_{233} = G_{123} + G_{133} - G_{333} + b\frac{\varphi' - m\varphi''}{8m^3},$$

wo φ' und φ'' die erste und zweite Ableitung von $\varphi(m)$ bedeuten. Mit Rücksicht hierauf gehen die obigen Ausdrücke für δY und δZ über in

$$\delta Y = \frac{bp}{4m^3}(3\varphi' - p^2(m\varphi)'')\delta P^2 + \frac{bp\varphi'}{4m}\delta Q^2,$$

$$\delta Z = \frac{bp\varphi'}{2m}\delta P\delta Q.$$

Diese Formeln geben die Hauptglieder in der Entwicklung nach den δP, δQ und gelten für beliebige p oder für beliebige Bildwinkel, da ja nach den p, q, P, Q keine Reihenentwicklung vorgenommen worden ist. Jedem Bildpunkte, den die Elementarbüschel durch die Blendenmitte in der Brennebene erzeugen, ist hiernach bei Büscheln von endlicher Oeffnung eine Coma oder Lichtmähne angehängt, deren Gestalt bei gegebener Brennweite in den Hauptgliedern nur von der Verzerrungsfunction $m\varphi$ abhängt. Soll keine Verzerrung stattfinden, so muss $m\varphi = 1$ sein, und man erhält

$$\delta Y = -\frac{bp}{4m^3}\left(\frac{3\delta P^2}{m^2} + \delta Q^2\right), \qquad \delta Z = -\frac{bp}{2m^3}\delta P\delta Q,$$

die Coma hat also für alle symmetrischen Systeme, die mit den Elementarbüscheln durch die Blendenmitte ein correctes anastigmatisches Bild in der Brennebene erzeugen, in den Hauptgliedern eine und dieselbe Form. Diese Form lässt sich etwas abändern, wenn man für die Elementarbüschel eine kleine Astigmasie oder eine kleine Verzerrung gestattet, was darauf hinauskommt, dass man dem benutzten Eikonal E eine kleine Variation δE von ebenfalls symmetrischer Gestalt superponiert. Jedoch kann man auf diese Weise

ohne starke Verzerrung keine erhebliche Verkleinerung der angesetzten Hauptcoefficienten erreichen, denn das Verschwinden dieser Coefficienten führt zu der Bedingung

$$\varphi = \text{constans},$$

und in diesem Falle werden unendliche ferne Gerade als Ellipsen abgebildet, deren Mittelpunkt in der optischen Axe liegt, und deren grosse Halbaxe gleich der Brennweite ist.

Hiernach sind die symmetrischen Systeme mit einem principiellen Mangel behaftet: wenn bei gegebener Oeffnung hinreichende Correctheit der Zeichnung innerhalb eines gegebenen Bildwinkels verlangt wird, so lässt sich die Bildschärfe durch keine Wahl der brechenden Flächen über eine bestimmte, theoretisch im Voraus feststehende Grenze steigern. Dass man dieser Grenze bei vorhandenen photographischen Objectiven bereits sehr nahe gekommen ist, lässt sich durch eine kleine Ueberschlagsrechnung bei mehreren STEINHEIL'schen Constructionen aus den Werthen der Oeffnung und des nutzbaren Bildwinkels unschwer erweisen. Da der verbleibende Rest von Unschärfe mit dem Wesen der Symmetrie nothwendig zusammenhängt, so ist seine weitere Verminderung nur durch den Verzicht auf die Symmetrie zu erreichen. Es dürfte nicht überflüssig sein, diesen Punkt ausdrücklich zu betonen, zumal der bündige Beweis für die ausgesprochenen Sätze mit den bisher in der geometrischen Optik benutzten Hülfsmitteln nur schwer zu erbringen gewesen wäre.

XIV.

Im Folgenden soll noch gezeigt werden, wie sich bei einer centrierten Abbildung die Bedingungen für ein ideales Objectiv mit den niedrigsten Gliedern der Eikonalreihe gestalten. Dass man dabei in der Sache zu bekannten Beziehungen gelangen muss, versteht sich von selbst. Der Kürze halber wollen wir jetzt das Auftreten eines anastigmatischen Flächenpaares als »Aplanasie« bezeichnen und diesen Ausdruck auch anwenden, wenn es sich um unendlich kleine Flächenstücke handelt. Die Forderungen, deren Erfüllung man sich bei einem Objectiv gewöhnlich vorsetzt, sind erstens die Aplanasie, zweitens die Ebenheit des Bildes für ein ebenes Object, drittens die Correctheit der Zeichnung. Die zweite und dritte Bedingung setzen

die erste voraus, da man andernfalls nicht von einer punktweisen Abbildung zweier Flächen auf einander sprechen könnte. Dagegen zieht die Aplanasie noch nicht die Bildebenheit und die Correctheit der Zeichnung nach sich, ebenso sind Aplanasie und Bildebenheit mit einer Verzerrung verträglich.

Aehnlich wie oben in (180) setzen wir an

$$\left.\begin{aligned}\Theta(p,q,P,Q) &= \tfrac{1}{2}nfu_1 + bu_2 - \tfrac{1}{2}NF + D(u_1,u_2,u_3)\\ &\quad + n(xm + yp + zq) - N(XM + YP + ZQ)\,,\end{aligned}\right\} \quad (197)$$

wo D nach Potenzen der Grössen

$$u_1 = p^2 + q^2\,,\qquad u_2 = pP + qQ\,,\qquad u_3 = P^2 + Q^2$$

entwickelt zu denken ist. Spalten wir D, indem die Glieder gleicher Ordnung zusammengefasst werden, in

$$D = G + G' + G'' + \cdots,$$

so sind die G, G', ... in den p, q, P, Q homogen von der vierten, sechsten u. s. w. Ordnung. Da vier Grundgleichungen werden

$$0 = \frac{\partial\Theta}{\partial p}\,,\quad 0 = \frac{\partial\Theta}{\partial P}\,,\quad 0 = \frac{\partial\Theta}{\partial q}\,,\quad 0 = \frac{\partial\Theta}{\partial Q}\,, \qquad (198)$$

von denen die beiden ersten, ausgeschrieben, die Form

$$\left.\begin{aligned}0 &= p(nf + 2D_1) + P(b + D_2) + n\left(y - x\frac{p}{m}\right),\\ 0 &= p(b + D_2) + P(-NF + 2D_3) - N\left(Y - X\frac{P}{M}\right)\end{aligned}\right\} \quad (199)$$

annehmen, wenn wieder die partiellen Ableitungen nach dem Schema

$$d\varphi(u_1,u_2,u_3) = \varphi_1 du_1 + \varphi_2 du_2 + \varphi_3 du_3$$

bezeichnet werden. Die noch fehlenden beiden Gleichungen folgen aus (199) durch Vertauschung der p, P mit den q, Q.

Da die Abbildung centriert ist, so müssen im Falle der Aplanasie die conjugierten Flächen Umdrehungsflächen um die Centrierungsaxen sein. Nehmen wir mit Rücksickt auf den Fall der Linsensysteme an, dass die Flächen sich in den Axen regulär verhalten, so lassen sich ihre Gleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned}x &= x_0 + x'(y^2 + z^2) + x''(y^2 + z^2)^2 + \cdots,\\ X &= X_0 + X'(Y^2 + Z^2) + X''(Y^2 + Z^2)^2 + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (199a)$$

schreiben. Die Anfangsglieder x_0, X_0 sind die Abscissen der »Flächenscheitel«, d. h. der Flächenpunkte in den Centrierungsaxen. Diese Axenpunkte sind für die im vorigen Abschnitt behandelte collineare Abbildung durch paraxiale Elementarbüschel conjugiert, also

$$0 = b^2 + nN(x_0 - f)(X_0 - F)\,;$$

die dazu gehörige Lateralvergrösserung ist

$$V = \frac{b}{N(x_0 - f)} = -\frac{n(X_0 - F)}{b}\,. \tag{200}$$

Für das zwischen den Punkten x_0, X_0 längs der Centrierungsaxen verlaufende Paar von Elementarbüscheln ist nach (199)

$$0 = n(f - x_0)p + bP\,, \qquad 0 = bp + N(X_0 - F)P\,,$$

also

$$\varkappa = \frac{p}{P} = \frac{b}{n(x^0 - f)} = -\frac{N(X_0 - F)}{b} = \frac{NV}{n}\,, \tag{201}$$

d. h. in den betrachteten Elementarbüscheln zwischen x_0, X_0 ist $\varkappa$ der Sinusquotient der Neigungen conjugierter Strahlen gegen die zugehörigen Axen.

Um die gesuchten Bedingungen direct und mit einem Schlage zu erhalten, hat man aus zwei der Grundgleichungen (198), z. B. aus

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial p}\,, \qquad 0 = \frac{\partial \Theta}{\partial q}$$

die p, q durch die übrigen Grössen auszudrücken und in die beiden anderen Gleichungen (198) einzusetzen. Das resultierende Gleichungspaar muss dann im Falle der Aplanasie identisch, d. h. für beliebige P, Q erfüllt sein. Dies führt zu zwei Arten von Bedingungen, solchen die nur die Form des Eikonals betreffen, und solchen die sich auch auf die Gestalt der beiden aplanatischen Flächen beziehen. Um jedoch die Bedeutung der einzelnen Bedingungen besser auseinander halten zu können, ist es zweckmässig, zunächst einen besonderen Fall, nämlich die Beziehung zwischen den Scheiteln der beiden Flächen zu behandeln. Ich beginne mit der »Aplanasie in der Axe«, d. h. die Flächenelemente in den Scheiteln x_0, X_0 sollen ein aplanatisches Paar bilden. In diesem Falle muss nicht nur das Punktepaar x_0, X_0 anastigmatisch sein, sondern auch der Sinussatz gelten. Denn der Sinusquotient conjugierter Neigungen kann höchstens

von den Azimuthen abhängen, ist aber im vorliegenden Falle wegen der Symmetrie um die Centrierungsaxen von den Azimuthen unabhängig, also constant. Sein für unendlich kleine Neigungen geltender Werth ist nach (201) gleich $\varkappa$, und dieser Werth ist also jetzt auch für endliche Neigungen anzusetzen. Da in dem betrachteten Büschelpaar die conjugierten Strahlen gleiche Azimuthe haben, so ist es erlaubt, nur die Lichtwege zu betrachten, die in den xy- und XY-Ebenen verlaufen, d. h. man darf in den Grundgleichungen (198) die Grössen q, Q, z, Z gleich Null setzen. Zwei von diesen Gleichungen sind dann von selber erfüllt, die beiden andern erhält man aus (199) für $q = 0$, $Q = 0$. Setzt man in (199)

$$y = Y = 0\,, \qquad x = x_0\,, \qquad X = X_0\,, \qquad p = \varkappa P\,, \tag{202}$$

so sind damit die gesuchten Bedingungen gefunden, deren Anzahl zunächst unendlich gross ist, da es sich nicht um Beziehungen zwischen den Zahlenwerthen einer endlichen Anzahl von Grössen, sondern vor der Hand um die Beziehungen zwischen Functionen handelt.

Statt nun die Substitutionen (202) unmittelbar vorzunehmen, wollen wir einen kleinen Umweg einschlagen. Wir lassen es einmal für den Augenblick auf sich beruhen, dass die auf den Axen senkrechten Ebenenelemente in den Punkten x_0, X_0 ein aplanatisches Paar bilden sollen, und betrachten statt dessen die Schaar der Lichtwege, die durch die Bedingungen

$$q = Q = 0\,, \qquad p = \varkappa P\,. \tag{203}$$

bestimmt sind, wo $\varkappa$ nach (201) aus x_0 oder X_0 berechnet ist. Diese Lichtebenen schneiden die Normalebenen

$$x = x_0\,, \qquad X = X_0$$

mit gewissen »Seitenabweichungen«, d. h. mit bestimmten Abständen von den Axen oder den Punkten x_0, X_0. Diese Seitenabweichungen sind gleich den aus (199) folgenden Werthen von y, Y, wenn man dort die Substitution (203) ausführt. Zunächst schreiben wir mit Rücksicht auf (201)

$$-ny = -\frac{b}{\varkappa}(p - \varkappa P) + 2pD_1 + PD_2 + nx_0\left(p - \frac{p}{m}\right),$$

$$NY = b(p - \varkappa P) + pD_2 + 2PD_2 - NX_0\left(P - \frac{P}{M}\right),$$

wo in den D, m, M für q, Q die Werthe Null zu setzen sind. Führt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{D}(p,P) = D(p^2, pP, P^2) + n x_0(\sqrt{1-p^2} + \tfrac{1}{2}p^2) - N X_0(\sqrt{1-P^2} + \tfrac{1}{2}P^2)$$

ein, und spaltet nach den Gliedern gleicher Dimension $\mathfrak{D}$ in

$$\mathfrak{D}(p,P) = \mathfrak{A}(p,P) + \mathfrak{A}'(p,P) + \mathfrak{A}''(p,P) + \cdots,$$

so sind die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... in den p, P von den Ordnungen 4, 6, 8, ... Schreibt man ferner

$$d\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 dp + \mathfrak{D}_2 dP, \qquad d\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 dp + \mathfrak{A}_2 dP, \text{ u. s. w.},$$

so kann man für die Seitenabweichungen ansetzen

$$\left.\begin{aligned} ny &= \frac{b}{\varkappa}(p - \varkappa P) - \mathfrak{D}_1(p,P). \\ NY &= b(p - \varkappa P) + \mathfrak{D}_2(p,P). \end{aligned}\right\} \tag{203a}$$

Hieraus folgt mit $p = \varkappa P$, da die $\mathfrak{A}$ homogen in den p, P sind,

$$\left.\begin{aligned} ny &= -P^3\mathfrak{A}_1(\varkappa,1) - P^5\mathfrak{A}'_1(\varkappa,1) - \cdots, \\ NY &= P^3\mathfrak{A}_2(\varkappa,1) + P^5\mathfrak{A}'_2(\varkappa,1) + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{204}$$

Die $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... sind also, abgesehen von den Factoren $-n$ und N, die Coefficienten in den nach P entwickelten Seitenabweichungen. Soll nun Aplanasie in der Axe stattfinden, so müssen y, Y unabhängig von P verschwinden, also in (204)

$$0 = \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2, \quad 0 = \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}'_2, \quad \ldots \tag{205}$$

sein. Nun ist

$$\left.\begin{aligned} p\mathfrak{A}_1(p,P) + P\mathfrak{A}_2(p,P) &= 4\mathfrak{A}(p,P), \\ p\mathfrak{A}'_1(p,P) + P\mathfrak{A}'_2(p,P) &= 6\mathfrak{A}'(p,P), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{206}$$

Es verschwinden also wegen (205) auch die Ausdrücke

$$\mathfrak{A}(\varkappa,1), \quad \mathfrak{A}'(\varkappa,1), \quad \ldots,$$

und man kann sagen, dass $\varkappa$ für die Gleichungen

$$0 = \mathfrak{A}(\xi,1) = \mathfrak{A}'(\xi,1) = \cdots$$

eine Doppelwurzel ist. Der Ausdruck $\mathfrak{D}$ entspringt aus Θ, wenn man die Substitutionen

$$x = x_0, \quad X = X_0, \quad y = Y = z = Z = 0, \quad q = Q = 0 \tag{207}$$

ausführt und die Glieder zweiter Ordnung unterdrückt. Da nun die Glieder zweiter Ordnung die Form

$$\tfrac{1}{2}n(f - x_0)p^2 + bpP + \tfrac{1}{2}N(X_0 - F)P^2 = -\frac{b}{2\varkappa}(p - \varkappa P)^2$$

besitzen, so kann man auch sagen, die Bedingung für die Aplanasie in der Axe bestehe darin, dass Θ nach Ausführung der Substitutionen (207) durch

$$(p - \varkappa P)^2$$

theilbar sei.

Die Bedingungen (205) sind ihrer äusseren Form nach einfach genug; in der That würde das Lästige bei ihrer Anwendung nur darin bestehen, dass mit wachsender Ordnungsnummer der mitgenommenen Glieder die Zahl der zu berechnenden Eikonalcoefficienten sehr rasch wächst.

Wenn Aplanasie in der Axe vorhanden ist, so besteht natürlich auch Anastigmasie zwischen den beiden Axenpunkten x_0, X_0. Um nun für letztere Eigenschaft allein die Bedingungen aufzustellen, denken wir uns zunächst ein homocentrisches σ-Büschel mit der Spitze im Axenpunkte x_0. Die conjugierten Σ-Strahlen schneiden die Normalebene $X = X_0$ mit bestimmten Seitenabweichungen, die man aus (203 a) gleich Y erhält, wenn dort y gleich Null gemacht und eine der Grössen p, P eliminiert wird. Wir schreiben zunächst (203 a) wieder in der Form

$$ny = \frac{b}{\varkappa}(p - \varkappa P) - \mathfrak{D}_1, \quad NY = b(p - \varkappa P) + \mathfrak{D}_2, \quad (208)$$

und bilden daraus

$$N(Y - Vy) = \varkappa\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2.$$

Hiermit setzen wir, indem y gleich Null gemacht wird, die Bedingungen

$$p = \varkappa P + \frac{\varkappa}{b}\mathfrak{D}_1(p, P), \quad NY = \varkappa\mathfrak{D}_1(p, P) + \mathfrak{D}_2(p, P) \qquad (209)$$

an, wo in der zweiten Gleichung die rechte Seite mit Gliedern dritter Ordnung beginnt. Die Auflösung nach p lässt sich mit Hülfe die Umkehrungsformel von LAGRANGE durchführen, jedoch werden die

Bedingungen bei weitem nicht so einfach, wie vorhin, und ich beschränke mich deshalb auf die beiden Anfangsglieder, nämlich

$$NY = 4P^3\mathfrak{A}(\varkappa, 1) + 6P^5\left(\mathfrak{A}'(\varkappa, 1) + \frac{\varkappa}{2b}\mathfrak{A}_1(\varkappa, 1)^2\right) + \cdots. \quad (210)$$

Die Anastigmasie führt dann zu den Bedingungen

$$0 = \mathfrak{A}(\varkappa, 1), \quad 0 = \mathfrak{A}'(\varkappa, 1) + \frac{\varkappa}{2b}\mathfrak{A}_1(\varkappa, 1)^2, \quad \text{u. s. w.}$$

Bei der Behandlung der Aplanasie ausserhalb der Axe gehen wir auf die Gleichungen (199) zurück, schreiben diese unter Berücksichtigung von (201) in der Form

$$\begin{aligned} -ny &= -\frac{b}{\varkappa}(p - \varkappa P) + 2pD_1 + PD_2 - npx_0\frac{1-m}{m} - np\frac{x - x_0}{m}, \quad (211)\\ NY &= \quad b(p - \varkappa P) + pD_2 + 2PD_3 + NPX_0\frac{1-M}{M} + NP\frac{X - X_0}{M}, \end{aligned}$$

und bilden daraus

$$\left.\begin{aligned} N(Y - yV) = 2\varkappa pD_1 + (p + \varkappa P)D_2 + 2PD_3 - n\varkappa px_0\frac{1-m}{m}\\ - n\varkappa p\frac{x - x_0}{m} + NPX_0\frac{1-M}{M} + NP\frac{X - X_0}{M}. \end{aligned}\right\} (212)$$

Zu (211) und (212) sind dann noch die zugehörigen Gleichungen hinzuzufügen, die aus den hingeschriebenen durch Vertauschung der Seitenaxen entstehen. Aus (211) und der Zugehörigen sind die p, q durch die übrigen Grössen auszudrücken und in (212) und die Zugehörige einzusetzen. Die damit sich ergebenden Gleichungen müssen identisch erfüllt sein, wenn Aplanasie stattfinden soll.

Bei der Entwicklung wollen wir in (211) und (212) nur bis zu den Gliedern dritter Ordnung gehen, haben uns also D auf seinen Anfangsterm vierter Ordnung beschränkt zu denken. In (199a) oder

$$x - x_0 = \frac{y^2 + z^2}{2r} + \cdots, \quad X - X_0 = \frac{Y^2 + Z^2}{2R} + \cdots,$$

sind die rechten Seiten zweiter Ordnung und die r, R die Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der aplanatischen Flächen. Hiernach schreiben wir zunächst (212) in der Form

$$\left.\begin{aligned} N(Y - yV) = 2\varkappa pD_1 + (p + \varkappa P)D_2 + 2PD_3 - \tfrac{1}{2}n\varkappa px_0u_1\\ - n\varkappa p(x - x_0) + \tfrac{1}{2}NPX_0u_3 + NP(X - X_0). \end{aligned}\right\} (213)$$

Da hierin die p, q nur in Gliedern dritter Ordnung auftreten, so genügt es, aus (211) die Glieder erster Ordnung, also

$$p = \varkappa P + \frac{n\varkappa y}{b}, \qquad q = \varkappa Q + \frac{n\varkappa z}{b}$$

anzusetzen. Die Substitution in (213) giebt

$$N(Y - yV) = yA + PB, \qquad N(Z - zV) = zA + QB,$$

$$A = \frac{n\varkappa}{b}\left(2\varkappa D_1 + D_2 - \tfrac{1}{2} n\varkappa x_0 u_1 - n\varkappa(x - x_0)\right),$$

$$B = 2(\varkappa^2 D_1 + \varkappa D_2 + D_3) - \tfrac{1}{2} n\varkappa^2 x_0 u_1 - n\varkappa^2(x - x_0) \\ + \tfrac{1}{2} N X_0 u_3 + N(X - X_0),$$

wo die u_1, u_2, u_3 von den Grössen

$$y^2 + z^2 = \varrho, \qquad yP + zQ = \sigma, \qquad P^2 + Q^2 = \tau$$

durch die Gleichungen

$$u_1 = \varkappa^2\tau + \frac{2n\varkappa^2}{b}\sigma + \left(\frac{n\varkappa}{b}\right)^2\varrho, \qquad u_2 = \varkappa\tau + \frac{n\varkappa}{b}\sigma, \qquad u_3 = \tau$$

abhängen. Setzt man mit Rücksicht auf die verlangte Annäherung noch an

$$x - x_0 = \frac{\varrho}{2r}, \qquad X - X_0 = \frac{\varrho V^2}{2R},$$

$$D = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}(u_1, u_2, u_3) = D - \tfrac{1}{8} n x_0 u_1^2 + \tfrac{1}{8} N X_0 u_3^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{E}_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \\ &\mathfrak{E}_{11} = D_{11} - \tfrac{1}{4} n x_0, \qquad \mathfrak{E}_{33} = D_{33} + \tfrac{1}{4} N X_0, \\ &\mathfrak{E}_{12} = D_{12}, \quad \mathfrak{E}_{13} = D_{13}, \quad \mathfrak{E}_{22} = D_{22}, \quad \mathfrak{E}_{23} = D_{23}, \end{aligned}\right\} (214)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}(p, P) &= \mathfrak{E}(p^2, pP, P^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_{11} p^4 + \mathfrak{E}_{12} p^3 P + (\mathfrak{E}_{13} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}_{22}) p^2 P^2 + \mathfrak{E}_{23} p P^3 + \mathfrak{E}_{33} P^4, \end{aligned}\right\} (215)$$

$$d\mathfrak{A}(p, P) = \mathfrak{A}_1 dp + \mathfrak{A}_2 dP,$$

$$d\mathfrak{E}(u_1, u_2, u_3) = \mathfrak{E}_1 du_1 + \mathfrak{E}_2 du_2 + \mathfrak{E}_3 du_3,$$

so wird zunächst

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{n\varkappa}{b}\left(2\varkappa\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 - \frac{n\varkappa\varrho}{2r}\right), \\ B &= 2(\varkappa^2\mathfrak{E}_1 + \varkappa\mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3) - \frac{(n\varkappa)^2\varrho}{2rn} + \frac{(n\varkappa)^2\varrho}{2RN}, \end{aligned}\right\} (216)$$

womit die A, B sich als lineare Verbindungen

$$A = A_1\varrho + A_2\sigma + A_3\tau\,, \qquad B = B_1\varrho + B_2\sigma + B_3\tau \tag{217}$$

der ϱ, σ, τ darstellen. Die Coefficienten hierin werden

$$A_1 = \left(\frac{NV}{b}\right)^3\left(\mathfrak{B} - \frac{b^2}{2\,NVr}\right), \qquad \mathfrak{B} = 2\,\varkappa\,\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{12}\,, \tag{218}$$

$$A_2 = \left(\frac{NV}{b}\right)^2 \mathfrak{B}', \qquad \mathfrak{B}' = 4\,\varkappa^2\mathfrak{C}_{11} + 4\,\varkappa\,\mathfrak{C}_{12} + \mathfrak{C}_{22}\,, \tag{219}$$

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= \frac{NV}{b}\,\mathfrak{A}_1(\varkappa, 1)\,, \\ \mathfrak{A}_1(\varkappa, 1) &= 2\,\varkappa^3\mathfrak{C}_{11} + 3\,\varkappa^2\mathfrak{C}_{12} + \varkappa\,(2\,\mathfrak{C}_{13} + \mathfrak{C}_{22}) + \mathfrak{C}_{23}\,, \end{aligned}\right\} \tag{220}$$

$$B_1 = 2\left(\frac{NV}{b}\right)^2\left(\mathfrak{B}'' - \frac{b^2}{4\,rn} + \frac{b^2}{4\,RN}\right), \quad \mathfrak{B}'' = \varkappa^2\mathfrak{C}_{11} + \varkappa\,\mathfrak{C}_{12} + \mathfrak{C}_{13}\,, \tag{221}$$

$$B_2 = 2\,\frac{NV}{b}\,\mathfrak{A}_1(\varkappa, 1)\,, \tag{222}$$

$$B_3 = 4\,\mathfrak{A}(\varkappa, 1)\,. \tag{223}$$

Die Aplanasie fordert das Verschwinden der Grössen A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, was wegen der Beziehung $B_2 = 2\,A_3$ zu vier Bedingungen führt. Die Forderung, dass überhaupt Aplanasie stattfinde, ohne Rücksicht auf die Form der beiden conjugierten Flächen, führt zu den drei Gleichungen

$$0 = \mathfrak{A}\,, \qquad 0 = \mathfrak{A}_1\,, \qquad 0 = \mathfrak{B}'. \tag{224}$$

Die erste Bedingung führt auf die Anastigmasie in der Axe, die zweite fügt die Aplanasie in der Axe und die dritte die Aplanasie ausserhalb der Axe hinzu. Die noch übrige, vierte Gleichung lautet

$$\mathfrak{B}'' = \left(\frac{b}{2}\right)^2\left(\frac{1}{nr} - \frac{1}{NR}\right) \tag{225}$$

und giebt eine Beziehung zwischen den Scheitelkrümmungen der Object- und Bildfläche oder zwischen den Wölbungen von Object und Bild. Wird zu einem ebenen Object ein ebenes Bild verlangt, so muss

$$\mathfrak{B}'' = 0 \tag{226}$$

sein. Sind die vier Bedingungen erfüllt, so bleibt die Gleichung

$$N(Y - yV) = y\varrho\,A_1 \tag{227}$$

übrig, in der die rechte Seite die Verzerrung giebt. Die Correct-

heit der Zeichnung verlangt, je nachdem r endlich oder unendlich ist,

$$b^2 = 2NVr\mathfrak{B} \quad \text{oder} \quad 0 = \mathfrak{B}. \tag{228}$$

Damit sind die gesuchten Bedingungen gefunden, und zwar, unabhängig von der Erzeugungsweise der Abbildung, unter der einzigen Voraussetzung, dass die Abbildung centriert sei. Die gefundenen Sätze gelten also z. B. auch für centrierte Linsensysteme mit nichtsphärischen Flächen.

Wenn das Object im Unendlichen liegt, so wird

$$x_0 = \infty, \quad \varkappa = 0, \quad \lim n x_0 \varkappa = b,$$

und man erhält die fünf Bedingungen

$$0 = 2D_{12} - b = D_{13} = D_{22} = D_{23} = 4D_{33} + NF, \tag{229}$$

die sich übrigens auch leicht direct aus der in (107) gegebenen expliciten Darstellung hätten herleiten lassen.

XV.

Die Anwendung der Reihenentwicklung des Eikonals auf ein Linsensystem setzt voraus, dass die Coefficienten aus den Bestimmungsstücken der einzelnen brechenden Flächen berechnet worden seien. Der Weg hierzu ist durch die Zusammensetzungsregel gegeben.

Es seien für die drei Räume ω_1, ω_2, ω_3 die Abbildungen $(\omega_1\omega_2)$, $(\omega_2\omega_3)$, $(\omega_1\omega_3)$ gegeben. Hängt man den Grössen n, h, k, p, q die Indices ihrer Räume an und bildet die drei Eikonale

$$A = E(p_1, q_1, p_2, q_2), \quad B = E(p_2, q_2, p_3, q_3), \quad C = E(p_1, q_1, p_3, q_3),$$

so sind nach der Zusammensetzungsregel die partiellen Ableitungen erster Ordnung des Ausdrucks

$$C - A - B$$

einzeln gleich Null zu setzen. Sind von den drei Abbildungen zwei centriert, und fallen für den gemeinsamen Raum die Centrierungsaxen zusammen, so ist auch die dritte Abbildung centriert. Indem wir nur centrierte Abbildungen voraussetzen, bilden wir unter Mitnahme der Glieder vierter Ordnung die Gleichungen

$$p_1^2+q_1^2=u_1\,,\quad p_1p_2+q_1q_2=u_2\,,\quad p_2^2+q_2^2=u_3\,,$$
$$p_2^2+q_2^2=v_1\,,\quad p_2p_3+q_2q_3=v_2\,,\quad p_3^2+q_3^2=v_3\,,$$
$$p_1^2+q_1^2=w_1\,,\quad p_1p_3+q_1q_3=w_2\,,\quad p_3^2+q_3^2=w_3\,,$$

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3+\tfrac{1}{2}\Sigma a_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta\,,\\ B &= b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\tfrac{1}{2}\Sigma b_{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta\,,\\ C &= c_1w_1+c_2w_2+c_3w_3+\tfrac{1}{2}\Sigma c_{\alpha\beta}w_\alpha w_\beta\,,\end{aligned}\right\}\ (\alpha,\beta=1,2,3)$$

und setzen

$$dA=A_1du_1+A_2du_2+A_3du_3\,,$$
$$dB=B_1dv_1+B_2dv_2+B_3dv_3\,,$$
$$dC=C_1dw_1+C_2dw_2+C_3dw_3\,.$$

Die Differentiation von $C-A-B$ nach p_1, p_2, p_3 liefert die Bedingungen

$$0=2p_1(C_1-A_1)-p_2A_2+p_3C_3\,, \tag{230}$$
$$0=p_1A_2+2p_2(A_3+B_1)+p_3B_2\,, \tag{231}$$
$$0=p_1C_2-p_2B_2+2p_3(C_3-B_3)\,, \tag{232}$$

zu denen die drei entsprechenden für die Ableitungen nach q_1, q_2, q_3 hinzugefügt zu denken sind. Eliminiert man mittelst der zweiten Gleichung p_2 aus der ersten und dritten, so wird

$$p_1[4(C_1-A_1)(A_3+B_1)+A_2A_2]+p_3[2C_2(A_3+B_1)+A_2B_2]=0\,,$$
$$p_1[2C_2(A_3+B_1)+A_2B_2]+p_3[4(C_3-B_3)(A_3+B_1)+B_2B_2]=0\,.$$

Hieraus und aus den entsprechenden Gleichungen für die q folgt

$$C_1-A_1=-\frac{A_2A_2}{4(A_3+B_1)}\,,\ C_2=-\frac{A_2B_2}{2(A_3+B_1)}\,,\ C_3-B_3=-\frac{B_2B_2}{4(A_3+B_1)}\,. \tag{233}$$

Setzt man hierin alle p, q gleich Null, was auf den in den Centrierungsaxen verlaufenden Lichtweg führt, so wird

$$c_1-a_1=-\frac{a_2a_2}{4(a_3+b_1)}\,,\ c_2=-\frac{a_2b_2}{2(a_3+b_1)}\,,\ c_3-b_3=-\frac{b_2b_2}{4(a_3+b_1)}\,. \tag{233a}$$

Schreibt man für den Augenblick

$$A_\alpha-a_\alpha=\delta a_\alpha\,,\quad B_\alpha-b_\alpha=\delta b_\alpha\,,\quad C_\alpha-c_\alpha=\delta c_\alpha\,,$$

und beschränkt sich auf die Glieder niedrigster Ordnung, so folgt aus (233)

$$\left.\begin{aligned}
\delta c_1 &= \delta a_1 - \frac{a_2\delta a_2}{2(a_3+b_1)} + \frac{a_2^2(\delta a_3+\delta b_1)}{4(a_3+b_1)^2}, \\
\delta c_2 &= -\frac{a_2\delta b_2 + b_2\delta a_2}{2(a_3+b_1)} + \frac{a_2b_2(\delta a_3+\delta b_1)}{2(a_3+b_1)^2}, \\
\delta c_3 &= \delta b_3 - \frac{b_2\delta b_2}{2(a_3+b_1)} + \frac{b_2^2(\delta a_3+\delta b_1)}{4(a_3+b_1)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (234)$$

Hierin sind die p_2, q_2 mittelst (231) fortzuschaffen, wozu es genügt, mit den Gliedern niedrigster Ordnung die Gleichungen

$$2p_2(a_3+b_1) = -p_1a_2 - p_3b_2, \quad 2q_2(a_3+b_1) = -q_1a_2 - q_3b_2$$

anzusetzen. Es ergiebt sich

$$\begin{aligned}
4v_1(a_3+b_1)^2 = 4u_3(a_3+b_1)^2 &= w_1a_2^2 + 2w_2a_2b_2 + w_3b_2^2, \\
2u_2(a_3+b_1) &= -w_1a_2 - w_2b_2, \\
2v_2(a_3+b_1) &= -w_2a_2 - w_3b_2,
\end{aligned}$$

und ferner, mit $2c_2(a_3+b_1) = -a_2b_2$,

$$\delta a_\alpha = w_1\left(a_{\alpha1} + \frac{c_2}{b_2}a_{\alpha2} + \left(\frac{c_2}{b_2}\right)^2 a_{\alpha3}\right) + w_2\left(\frac{c_2}{a_2}a_{\alpha2} + 2\frac{c_2}{a_2}\frac{c_2}{b_2}a_{\alpha3}\right) + w_3\left(\frac{c_2}{a_2}\right)^2 a_{\alpha3},$$

$$\delta b_\alpha = w_1\left(\frac{c_2}{b_2}\right)^2 b_{\alpha1} + w_2\left(2\frac{c_2}{a_2}\frac{c_2}{b_2}b_{\alpha1} + \frac{c_2}{b_2}b_{\alpha2}\right) + w_3\left(\left(\frac{c_2}{a_2}\right)^2 b_{\alpha1} + \frac{c_2}{a_2}b_{\alpha2} + b_{\alpha3}\right).$$

Dies in (234) oder

$$\begin{aligned}
\delta c_1 &= \delta a_1 + \frac{c_2}{b_2}\delta a_2 + \left(\frac{c_2}{b_2}\right)^2(\delta a_3 + \delta b_1), \\
\delta c_2 &= \frac{c_2}{b_2}\delta b_2 + \frac{c_2}{a_2}\delta a_2 + 2\frac{c_2}{a_2}\frac{c_2}{b_2}(\delta a_3 + \delta b_1), \\
\delta c_3 &= \delta b_3 + \frac{c_2}{a_2}\delta b_2 + \left(\frac{c_2}{a_2}\right)^2(\delta a_3 + \delta b_1)
\end{aligned}$$

eingesetzt, giebt durch Spaltung nach den w die $c_{\alpha\beta}$. Ich setze zunächst, mit den Abkürzungen

$$c_2 : a_2 = \alpha, \qquad c_2 : b_2 = \beta,$$

die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
c_{13} &= \alpha^2(a_{13} + a_{23}\beta + a_{33}\beta^2) + \beta^2(b_{11}\alpha^2 + b_{12}\alpha + b_{13}), \\
c_{22} &= \alpha^2(a_{22} + 4a_{23}\beta + 4a_{33}\beta^2) + \beta^2(b_{22} + 4b_{22}\alpha + 4b_{11}\alpha^2)
\end{aligned}\right\} \quad (235)$$

an. Die anderen Gleichungen lassen sich dann folgendermassen zusammenfassen. Man bezeichne mit dem Symbol $2F(\alpha, \lambda, \mu)$ die biquadratische Form

$$\left.\begin{aligned} 2F(a,\lambda,\mu) = {} & \lambda^2(a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda\mu + a_{13}\mu^2) \\ & + \lambda\mu(a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda\mu + a_{23}\mu^2) \\ & + \mu^2(a_{31}\lambda^2 + a_{32}\lambda\mu + a_{33}\mu^2) \\ = {} & a_{11}\lambda^4 + 2a_{12}\lambda^3\mu + (2a_{13} + a_{22})\lambda^2\mu^2 + 2a_{23}\lambda\mu^3 + a_{33}\mu^4, \end{aligned}\right\} \quad (236)$$

deren nahe Beziehung zu dem biquadratischen Ausdruck $\mathfrak{A}$ augenfällig ist, während die Ableitungen von F nach λ und μ mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in Beziehung gesetzt werden können. Mit diesem Symbol erhält man dann zwischen den a, b, c die Gleichung

$$F(c,\lambda,\mu) = F(a,\lambda,\alpha\mu + \beta\lambda) + F(b,\alpha\mu + \beta\lambda,\mu). \quad (237)$$

Diese Formel kann als die Regel für die Zusammensetzung der Aberrationen in der Axe bezeichnet werden.

Handelt es sich um ein centriertes Linsensystem, so fallen die Centrierungsaxen der einzelnen Abbildungen in eine einzige Gerade zusammen, und man kann die Grundebenen der einzelnen Räume ebenfalls zusammenlegen. Für die Anwendung der Formeln (235) und (236) muss dann zunächst das Eikonal einer einzelnen Brechung entwickelt werden. Ist

$$A = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \tfrac{1}{2}\Sigma' a_{\alpha\beta} u_\alpha \mu_\beta$$

das Eikonal für die Brechung an einer Kugel mit dem Radius r und der Scheitelabscisse a zwischen zwei Medien mit den Indices n_1, n_2, so giebt die Entwicklung des nach (167) gebildeten Ausdrucks

$$a_1 = \tfrac{1}{2} a n_1 - \frac{r}{2}\frac{n_1^2}{n_2 - n_1}, \quad a_2 = \frac{r n_1 n_2}{n_2 - n_1}, \quad a_3 = -\tfrac{1}{2} a n_2 - \frac{r}{2}\frac{n_2^2}{n_2 - n_1}, \quad (238)$$

$$a_{22} = r\frac{(n_1 n_2)^2}{(n_2 - n_1)^3}, \qquad a_{13} = \frac{r}{4}\frac{n_1 n_2(n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2)}{(n_2 - n_1)^3}, \quad (239)$$

$$F(a,\lambda,\mu) = \frac{a}{4}(n_1\lambda^4 - n_2\mu^4) + \frac{r(n_1 n_2)^2}{4}\frac{(\lambda - \mu)^4}{(n_2 - n_1)^3} - \frac{r}{4}\frac{(n_1\lambda^2 - n_2\mu_2)^2}{n_2 - n_1}. \quad (240)$$

Setzt man in gleicher Weise für eine zweite Kugelfläche mit der Scheitelabscisse b, dem Halbmesser s und den Indices n_2, n_3 das Eikonal

$$B = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 w_3 + \tfrac{1}{2}\Sigma b_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta$$

an, so giebt die Zusammensetzung nach (233a), (235) und (236) das Eikonal für die aus beiden Flächen gebildete Linse.

Es ist nicht nöthig, hier diese Entwicklungen weiter zu führen, da sie in der Hauptsache auf bekannte Beziehungen führen müssen, und da überdies der Inhalt der letzten Abschnitte zu dem Nachweise ausreicht, dass die gewöhnliche Behandlung der sogenannten sphärischen Aberration grossentheils Sätze enthält, die von der besonderen Erzeugungsweise der dort betrachteten strahlenweisen Abbildungen ganz unabhängig sind. So waren z. B. die oben abgeleiteten Formeln für Aplanasie, Bildwölbung und Correctheit der Zeichnung nur an die eine Bedingung gebunden, dass das betrachtete Eikonal centriert sei.

Fassen wir, rückblickend, den wesentlichen Inhalt unserer Untersuchung zusammen, so lassen sich folgende Sätze aussprechen.

In der Theorie der optischen Instrumente — dieses Wort in dem gewöhnlichen, engeren Sinne genommen — handelt es sich in Wahrheit um die strahlenweise Abbildung zweier Räume auf einander. Die Eigenschaften dieser Art von Abbildungen zerfallen in zwei Klassen, je nachdem sie von der besonderen Erzeugungsweise dieser Abbildungen unabhängig sind oder nicht. Die erstgenannte Klasse von Eigenschaften gehört ihrem Wesen nach der Geometrie an, und zwar der Liniengeometrie. Die zur Zeit vorzugsweise übliche Herleitung auf Grund optischer Voraussetzungen schliesst eine für die Beweisführung unnöthige Einschränkung in sich, denn die rein geometrischen Eigenschaften gelten auch für Abbildungen, die mit den uns zugänglichen dioptrischen Mitteln gar nicht zu verwirklichen sind. Das eigentliche Gebiet der Optik wird erst dann betreten, wenn es sich um Eigenschaften handelt, die wesentlich von der Erzeugungsweise der Abbildung abhängen, dahin gehört vor allem die Lehre von der Achromasie, die aus eben diesem Grunde bei der vorliegenden Untersuchung nicht in Betracht kam.

Allen verschiedenen optischen Instrumenten ist eine, und nur eine Eigenschaft gemeinsam, nämlich die Geltung des MALUS'schen Satzes, der für den vorliegenden Zweck in rein geometrischer Form ausgesprochen wurde; seine Geltung führt zu der Existenz der als Eikonale bezeichneten Abbildungsfunctionen. Die Eigenschaften einer

Abbildung sind durch jedes der dazu gehörigen Eikonale vollständig bestimmt. Hierbei lässt sich jedoch ein gewisser Unterschied feststellen. Das Eikonal enthält nämlich ausser den Lichtwegcoordinaten und den Indices der auf einander abgebildeten Räume noch gewisse Parameter, die von der Entstehungsweise des Eikonals abhängen. Ist das Eikonal durch die Forderung gewisser Eigenschaften definiert, z. B. als Lösung eines Systems von Bedingungsgleichungen, so spielen die Parameter im Wesentlichen die Rolle willkürlicher Constanten, denen man nach Belieben diese oder jene Werthe beilegen kann, und die Discussion wird in der Hauptsache auf geometrische Eigenschaften führen. Ist dagegen das Eikonal aus der Betrachtung eines bestimmten optischen Systems entstanden, so sind die auftretenden Parameter ebenso wie die Indices der Endmedien von der Wellenlänge des Lichtes abhängig; die Discussion hat dann das Eikonal als Function nicht nur der Strahlencoordinaten, sondern auch der Parameter zu behandeln und führt dementsprechend auch zu den eigentlich optischen Eigenschaften der Abbildung.

Der Nutzen, den die Einführung des Eikonals gewährt, ist zunächst formaler Natur, indem man in den Stand gesetzt wird, bei jeder einzelnen Frage die wesentlichen Voraussetzungen reinlich auszuscheiden. Er reicht indessen darüber hinaus, indem es jetzt möglich ist, Problemstellungen von nicht bloss theoretischer Bedeutung ernsthaft zu behandeln, für die die Methode der Reihenentwicklung kaum den mathematischen Ansatz zu bilden erlaubt; es ist, wenn man sich so ausdrücken will, das vorderste Hinderniss aus dem Wege geräumt.

Inhaltsübersicht.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

ZWEI-ZWEIDEUTIGE VERWANDTSCHAFTEN

UND

EINIGE ERZEUGNISSE DERSELBEN

VON

JOHANNES THOMAE

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

In den grundlegenden Werken über projective Geometrie werden die eineindeutigen Beziehungen und deren Erzeugnisse in erschöpfender Weise behandelt. Es sind die Gebilde zweiter Ordnung, die mit den eineindeutigen Verwandtschaften aufs Innigste verknüpft sind, und die durch die Theorie dieser Verwandtschaften eine allseitige Beleuchtung finden. Alsdann sind die Elemente eines Gebildes erster oder zweiter Ordnung zu Paaren von Elementen desselben oder eines anderen Gebildes in Beziehung gesetzt worden, es sind die einzweideutigen Verwandtschaften untersucht worden. Im Wesentlichen sind es die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte und die ihnen dualistisch gegenüber stehenden Gebilde, deren Eigenschaften aus denen der einzweideutigen Verwandtschaften abgeleitet werden.

Ueber mehrdeutige Verwandtschaften hat Weyr in seinen »Beiträgen zur Curvenlehre, Wien 1880« eine Reihe von Sätzen abgeleitet, aber nicht auf dem Wege der projectiven Geometrie, sondern maassgeometrisch unter Anwendung rechnender analytischer Methoden. Es wird daher vielleicht nicht unwillkommen sein, wenn ich hier meine auf rein projectivem Wege ausgeführten Untersuchungen über zweizweideutige geometrische Verwandtschaften folgen lasse. Manches davon mag in den »Grundzügen einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven« des Herrn Kötter (Berlin 1887) implicite enthalten sein, es ist nicht leicht, der von ihm angewandten ausserordentlich abstracten Beweisführung zu folgen. Hier aber, wo es sich um speciellere Gebilde handelt, vermag die Anschauung die Deductionen fortlaufend zu unterstützen. — Die folgenden Zeilen erheben nicht den Anspruch, den Gegenstand, mit dem sie sich beschäftigen, völlig zu erschöpfen, sie sollen vielmehr nur die grundlegenden Sätze und Anregung zu weiteren Studien geben. Namentlich dürfte die Zusammensetzung zweizweideutiger Verwandtschaften ein weiteres dankbares Forschungsfeld bilden.

§ 1. **Die Möbius'sche Verwandtschaft.** Es seien drei nicht in einer Geraden liegende Punkte $P_1 P_2 P_3$ gegeben, von denen die beiden ersten aggregirt ideale sein können. — Ich bediene mich dieses Ausdrucks statt »conjugirt imaginär«, weil das Wort »conjugirt« in der projectiven Geometrie in anderem Sinne so oft vorkommt. — Aus dem Büschel von Kegelschnitten, die durch $P_1 P_2$ gehen und für die P_3 und die $P_1 P_2$ verbindende Gerade p_3 Pol und Polare sind, wählen wir einen eigentlichen, d. h. einen nicht in ein Geradenpaar zerfallenden Kegelschnitt ω aus, um durch seine Vermittelung zu einer im Allgemeinen eineindeutigen Punktpunktverwandtschaft zu gelangen. Einen Punkt C der Ebene $P_1 P_2 P_3$ verbinden wir mit dem Punkte P_3 durch eine Gerade h — unter einer Geraden h werde in den nächstfolgenden Untersuchungen immer eine Gerade durch P_3 verstanden —, bezeichnen den Punkt, der auf h durch die Polare c von C in Bezug auf ω bestimmt wird, mit C' und ordnen den Punkt C' dem Punkte C zu, wobei dann umgekehrt auch C dem Punkte C' zugeordnet ist, sodass die Zuordnung eine involutorische ist. CC' sind für ω conjugirte Punkte, und die Punkte dieses Kegelschnittes entsprechen sich selbst. Die sich selbst entsprechenden Punkte sind ideale, wenn ω ein idealer Kegelschnitt ist. Durch diese Zuordnung ist eine im Allgemeinen eineindeutige Punktpunktverwandtschaft, eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft constituirt.

Fällt der Punkt C nicht auf P_3, so giebt es durch ihn nur eine Gerade h und nur eine Polare c, die von h verschieden ist und daher nur einen Punkt C' auf ihr bestimmt, wenn nicht C auf P_1 oder P_2 fällt. Demnach kann von der Eineindeutigkeit der Beziehung nur dann eine Ausnahme stattfinden, wenn C auf einen der drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ fällt. Rückt C auf P_3, so ist jede durch ihn gehende Gerade eine Gerade h, die Polare von C ist dann p_3, jeder Punkt von p_3 ist P_3 zugeordnet, dem Punkte P_3 entsprechen unendlich viele Punkte, die Punkte der Geraden p_3. Fällt C auf P_1, so fallen die zu ihm gehörende Gerade h und seine Polare c zusammen. — Die Geraden h und c sind ideale, wenn P_1 ein idealer Punkt ist. — Dem Punkte P_1 entsprechen alle Punkte der Geraden p_2, die P_1 mit P_3 verbindet. Ebenso entsprechen dem Punkte P_2 die Punkte der Geraden p_1, die P_2 mit P_3 verbindet. Die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ sind die einzigen Ausnahmen in Bezug auf die Eineindeutigkeit des Entsprechens, sie heissen

Hauptpunkte der MÖBIUS'schen Verwandtschaft. Die drei Hauptpunkte der MÖBIUS'schen Verwandtschaft zeigen sich als nicht vollkommen gleichartige, indem $P_1 P_2$ gerade Linien entsprechen, die durch sie selbst gehen, dem dritten Punkte P_3 aber eine Gerade, die nicht durch P_3 geht. Wenn es nöthig ist, wollen wir die beiden ersten Hauptpunkte laterale oder sich selbst entsprechende nennen. Sind zwei Hauptpunkte aggregirt ideale, so müssen sie jedesmal die lateralen sein.

Durchläuft der Punkt C eine Gerade k, so liegen die zu den Punkten C gehörenden Geraden h diesen Punkten perspectiv, und die Polaren c der C für ω sind diesen Punkten und mithin den Geraden h projectiv, die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel (h) (c) schneiden sich auf einem P_3 enthaltenden Kegelschnitte $\varkappa$, der auch die Punkte $P_1 P_2$ enthält, weil diese den Punkten (kp_2) bez. (kp_1) entsprechen. Auch der Pol K von k für ω liegt auf dem Kegelschnitte $\varkappa$. Den Punkten einer Geraden k entsprechen demnach die Punkte eines Kegelschnittes $\varkappa$ durch $P_1 P_2 P_3$ und zwar so, dass die Punkte der Geraden den Punkten des Kegelschnittes projectiv zugeordnet sind. Dem Punkte der Geraden k, dessen zugehörige Gerade h von ihr durch $P_1 P_2$ harmonisch getrennt ist, entspricht der Pol von k. — Umgekehrt entsprechen den Punkten eines Kegelschnittes $\varkappa$ durch $P_1 P_2 P_3$ die Punkte einer Geraden k. Denn bestimmt man zu zwei Punkten $C_1 C_2$ des Kegelschnittes die entsprechenden, z. B. die Punkte $(\omega\varkappa)$, und legt durch sie eine Gerade k, so entsprechen den Punkten von k die Punkte eines Kegelschnittes, der mit $\varkappa$ die beiden Punkte $C_1 C_2$ und die Punkte $P_1 P_2 P_3$ gemein hat, also ganz mit ihm zusammenfällt. Da das Entsprechen immer ein involutorisches ist, so entsprechen den Punkten von $\varkappa$ die Punkte von k.

Den Punkten einer Geraden g durch einen der Punkte P entsprechen Punkte einer Geraden g' durch einen der Punkte P. Von den Punkten einer Geraden durch P_3 ist es unmittelbar klar, dass sie den Punkten derselben Geraden entsprechen. Sind $P_1 P_2$ reale Punkte, so lassen sich durch sie reale gerade Linien legen. Den Punkten (C) einer Geraden g durch P_1 entsprechen die Schnittpunkte zweier perspectiven Strahlenbüschel, des Büschels (h) durch P_3, der die Punkte (C) aufnimmt, und des Büschels der Polaren (c) durch den Pol G von g für ω. G liegt auf p_2, der Polare des Punktes P_1,

der Strahl p_2 als Strahl des Büschels (h) entspricht p_2 als Strahl des Büschels (c), weil p_2 zum Punkte P_1 ebenso als Gerade h wie als Polare c gehört, die Büschel sind also perspective, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist eine Gerade g', die durch P_2 geht, weil P_2 dem Punkte (gp_1) in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft entspricht. — Es ist jedoch zu bemerken, dass im Grunde einer Geraden g durch einen Punkt P ebenso wie einer anderen Geraden ein Kegelschnitt entspricht, nämlich ein zerfallender Kegelschnitt. Einer Geraden durch P_3 entspricht diese selbst plus der Geraden p_3, die dem Punkte P_3 entspricht. Einer Geraden durch P_1 entspricht eine Gerade durch P_2 plus der Geraden p_2, die dem Punkte P_1 entspricht, und ähnlich verhält es sich mit einer Geraden durch P_2. Ein Büschel (g) durch P_1 oder P_2 ist dem entsprechenden Büschel (g') projectiv zugeordnet. Denn legt man eine Gerade h durch P_3, so entspricht dem Punkte (gh) der Punkt $(g'h)$, die entsprechenden Punkte auf einer Geraden h aber sind für ω conjugirte Punkte und also einander projectiv zugeordnet. Die entsprechenden Strahlen gg' schneiden sich auf ω, denn der Schnittpunkt $(g\omega)$ entspricht sich selber, woraus wiederum die Projectivität folgt.

In vielen Fällen sagt man, einer Geraden g durch einen Hauptpunkt entspreche eine Gerade durch einen Hauptpunkt, unterdrückt also im Sprachgebrauche die hier mit plus angeführten Geraden, die einem einzelnen Punkte auf g entsprechen.

§ 2. **Gegenseitiges Entsprechen von zwei Kegelschnitten durch zwei Hauptpunkte einer Möbius'schen Verwandtschaft.** — Den Punkten C eines Kegelschnittes γ durch zwei der drei Hauptpunkte entsprechen die Punkte C' eines Kegelschnittes γ' durch zwei Hauptpunkte, und es sind die entsprechenden Punkte einander projectiv zugeordnet.

Nehmen wir zuerst die Punkte $P_1 P_2 P_3$ als reale an, und lassen γ durch zwei von ihnen $P' P''$ gehen, so werden die Punkte C auf γ von $P' P''$ durch projective Strahlenbüschel $(P' C)$ $(P'' C)$ aufgenommen. Ihnen entsprechen projective Strahlenbüschel $(Q' C')$ $(Q'' C')$ durch zwei Hauptpunkte, die mit $P' P''$ zusammenfallen, wenn diese die lateralen sind, von denen aber einer der dritte ist, wenn nur einer ein lateraler ist. Die projectiven Strahlenbüschel $(Q' C')$ $(Q'' C')$ erzeugen einen Kegelschnitt γ' durch $Q' Q''$, und die C' sind den C projectiv

zugeordnet. Der Kegelschnitt γ' geht durch dieselben Hauptpunkte wie γ, wenn γ durch die beiden lateralen Hauptpunkte geht.

Schwieriger scheint der Beweis zu sein, wenn zwei der Punkte P aggregirt ideale sind, die dann die lateralen sein müssen. Ich gebe denselben wie folgt. Es seien $P_1 P_2$ aggregirt ideale Punkte, sodass p_3 ω nicht real trifft. Ein realer Kegelschnitt, der P_1 trifft, muss auch P_2 treffen. Zuerst sei γ ein Kegelschnitt durch $P_1 P_2$, der ω in zwei realen Punkten SS' trifft, und dessen Tangenten in S und S' durch P_3 gehen. Geht die Tangente in S durch P_3, so geht die in S' von selbst durch P_3. Denn der Schnittpunkt von (SS') mit p_3 hat in Bezug auf ω und γ dieselbe Polare, sie geht durch P_3, den Pol von p_3 für ω. Auf dieser Polare schneiden sich die Tangenten

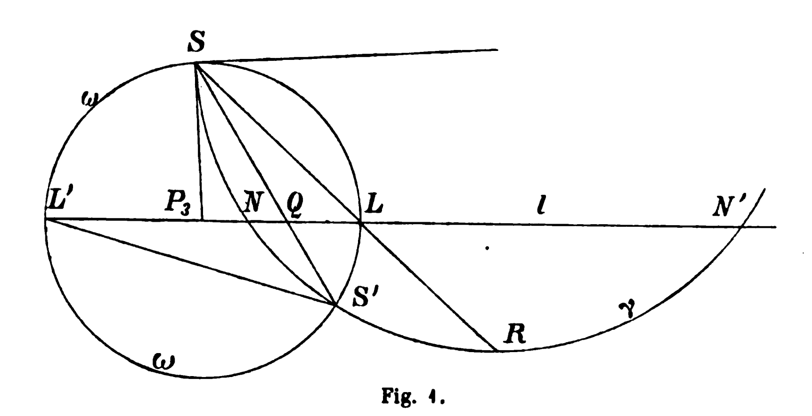


Fig. 1.

an γ in S und S', folglich gehen beide durch P_3, wenn eine diese Eigenschaft hat. — In der beistehenden Zeichnung sind für $P_1 P_2$ die absoluten Punkte gewählt, p_3 ist die uneigentliche (unendlich ferne) Gerade und Q' der uneigentliche Punkt von l. — Durch P_3 legen wir eine Gerade l, die ω in L und L', γ in N und N', (SS') in Q, p_3 in Q' trifft. Dann sind nach dem charakteristischen Satze über Kegelschnittbüschel $LL' \dots QQ' \dots NN'$ in Involution. Projicirt man die Punkte LL' bez. von SS' aus und variirt l, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen der projectiven Strahlenbüschel (SL) $(S'L')$ auf einem Kegelschnitte $\varkappa$ durch S und S'. Fällt L auf S', so geht $(S'L')$ durch P_3, P_3 liegt auf der Tangente der Curve $\varkappa$ in S', weil dem Strahl (SS') des Büschels (SL) die Tangente der durch (SL) $(S'L')$ erzeugten Curve in S' entspricht. Ebenso geht die Tangente an $\varkappa$ in S durch P_3. Die Punkte LL' der durch die Geraden (l) auf

ω erzeugten Involution fallen zusammen in den beiden Punkten, die die Involutionsaxe, die Polare p_3 von P_3 mit ω gemein hat, es erzeugen also (SL) $(S'L')$ auf p_3 projective Punktreihen, deren Doppelelemente die Punkte P_1P_2 sind. Sie erzeugen demnach einen Kegelschnitt (vgl. meine Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung, Halle 1894, Seite 109, 110), der durch P_1P_2 hindurchgeht. Somit fällt $\varkappa$ mit γ zusammen, oder (SL) $(S'L')$ schneiden sich in Punkten (R) auf γ. Die beiden Geraden (RN) (RN') sind durch (RL') gleich (RS') und (RL) gleich (RS) harmonisch getrennt, weil die Punkte (NN') auf γ eine Involution mit den Doppelpunkten SS' bilden. $LNL'N'$ sind harmonische Punkte, die Polare von N in Bezug auf ω geht durch N', NN' sind in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft entsprechende Punkte, also entsprechen den Punkten N eines Kegelschnittes γ, dessen Tangenten in den Schnittpunkten mit ω durch P_3 gehen und der durch P_1P_2 geht, den Punkten N' eines Kegelschnittes durch P_1P_2, nämlich den Punkten von γ selbst, und es sind die Punkte N den Punkten N' projectiv zugeordnet. Nebenbei sei bemerkt, dass die Tangente in S an ω von der Tangente in S an γ durch P_1P_2 harmonisch getrennt ist, und dass sie sich daher rechtwinklig schneiden, wenn P_1P_2 wie in der Zeichnung die absoluten Punkte sind.

Bildet man die Punkte C mittelst der in Rede stehenden MÖBIUS-schen Verwandtschaft auf die Punkte C' ab, und diese Punkte mittelst einer zweiten MÖBIUS'schen Verwandtschaft, in der $P_1P_2P_3$ wieder die Hauptpunkte, P_1P_2 die lateralen sind, in der aber der Kegelschnitt ω durch einen andern, ω in P_1P_2 berührenden Kegelschnitt ω' ersetzt wird, auf Punkte C'', so werden dadurch die Punkte C auf die Punkte C'' collinear bezogen. Jedem Punkte C entspricht nämlich ein Punkt C'', jeder Geraden eine Gerade, die Punkte $P_1P_2P_3$ entsprechen sich selbst, den Punkten einer Geraden g sind die Punkte einer Geraden g'' projectiv zugeordnet. Dies sind aber die Eigenschaften, die eine Collineation charakterisiren.

Ist nun ein Kegelschnitt $\varkappa'$ gegeben, der durch P_1P_2 hindurchgeht, und bestimmt die Polare von P_3 für $\varkappa'$ die realen Punkte SS' auf $\varkappa'$, sodass also P_3 ausserhalb $\varkappa'$ liegt, so giebt es in dem Büschel (ω) sich in P_1P_2 berührender Kegelschnitte, für die P_3p_3 Pol und Polare sind, einen Kegelschnitt ω', der durch S und folglich auch durch S' hindurchgeht. Die Tangenten von $\varkappa'$ in S und S' gehen durch

P_3. Die Punkte C' von $\varkappa'$ bilden sich in Bezug auf die zweite ω' als Leitcurve enthaltende MÖBIUS'sche Verwandtschaft auf einen Kegelschnitt durch $P_1 P_2$, nämlich auf $\varkappa'$ selbst ab, in Bezug auf die erste Verwandtschaft, deren sich selbst entsprechende Punkte auf ω liegen, bilden sich die Punkte C' auf eine $\varkappa'$ collineare Curve, also auf einen Kegelschnitt $\varkappa$ ab, der durch die Punkte $P_1 P_2$ geht, weil sie in der Collineation sich selbst entsprechen. Daraus folgt: einem Kegelschnitte $\varkappa'$ durch $P_1 P_2$ entspricht in der auf ω gegründeten MÖBIUS'schen Verwandtschaft ein Kegelschnitt $\varkappa$ durch dieselben Punkte $P_1 P_2$ in projectiver Zuordnung ihrer Punkte, wenn P_3 ausserhalb $\varkappa'$ und folglich ausserhalb $\varkappa$ liegt. Giebt es gerade Linien durch P_3, die $\varkappa'$ nicht treffen, so treffen dieselben geraden Linien auch $\varkappa$ nicht.

Liegt P_3 innerhalb des durch $P_1 P_2$ gehenden Kegelschnittes $\varkappa$, und ist $\varkappa_1$ ein anderer, durch $P_1 P_2$ gehender Kegelschnitt, für den P_3 ausserhalb liegt, so bestimmen $\varkappa \varkappa_1$ einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa, \varkappa_1)$, in dem es unendlich viele Individuen giebt, für die P_3 ausserhalb liegt. Es sei $\varkappa_2$ ein solches Individuum, so können wir den Büschel $(\varkappa, \varkappa_1)$ auch mit $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ bezeichnen. Jetzt legen wir durch einen Punkt H auf $\varkappa$ und durch die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ einen Büschel von Kegelschnitten $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots$, und es werde γ_1 von $\varkappa_1$ in $U_{11} V_{11}$, von $\varkappa_2$ in $U_{12} V_{12}$, von $\varkappa$ in HH_1 getroffen, γ_2 werde von $\varkappa_1$ in $U_{21} V_{21}$, von $\varkappa_2$ in $U_{22} V_{22}$, von $\varkappa$ in HH_2 getroffen u. s. w. Alsdann sind die je sechs Punkte $U_{11} V_{11} \cdot U_{12} V_{12} \cdot HH_1$, $U_{21} V_{21} \cdot U_{22} V_{22} \cdot HH_2$, u. s. w. in Involution. Die Bilder von $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \ldots$ in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft sind gerade Linien $g_1' g_2' g_3' \ldots$ durch den H entsprechenden Punkt H'. Die den Punkten $U_{11} V_{11} \cdot U_{12} V_{12} \cdot HH_1$ u. s. w. entsprechenden Punkte $U_{11}' V_{11}' \cdot U_{12}' V_{12}' \cdot H' H_1'$, $U_{21}' V_{21}' \cdot U_{22}' V_{22}' \cdot H' H_2'$, ... liegen bez. auf den Geraden $g_1' g_2' \ldots$, die $\gamma_1 \gamma_2 \ldots$ entsprechen, und sind ebenfalls zu je sechs in Involution. Die Kegelschnitte $\varkappa_1 \varkappa_2$, für die P_3 ausserhalb liegt, bilden sich nach den eben bewiesenen Sätzen auf Kegelschnitte $\varkappa_1' \varkappa_2'$ durch $P_1 P_2$ ab, der Kegelschnitt $\varkappa$ aber auf eine Curve ξ, die $P_1 P_2$, die Schnittpunkte von $\varkappa_1' \varkappa_2'$ und den Punkt H' enthält. Der Kegelschnitt $\varkappa$ trifft zwar die Geraden $p_1 p_2$ in idealen Punkten, aber in aggregirt idealen, ihnen entsprechen in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft die Punkte $P_1 P_2$, die demnach wirklich auf ξ liegen. Die Kegelschnitte $\varkappa_1' \varkappa_2'$ und die Curve ξ werden von den Geraden $g_1' g_2' g_3' \ldots$ in je sechs Punkten einer Involution getroffen. Dies ist, wie man mittelst des charakteristischen

Satzes vom Kegelschnittbüschel leicht indirect beweist, nur möglich, wenn ξ ein Kegelschnitt $\varkappa'$ des Büschels $(\varkappa_1', \varkappa_2')$ ist. Damit ist der Satz nun auch für den Fall erwiesen, dass P_3 innerhalb $\varkappa$ liegt.

Ideale Kegelschnitte kommen zweierlei Art vor. Durch vier paarweise aggregirt ideale Punkte lassen sich ideale Kegelschnitte legen, die von jeder realen Geraden in aggregirt idealen Punkten getroffen werden. Sollen die Polaren eines realen Punktes für die Kegelschnitte des durch jene vier Punkte gehenden Büschels einen linearen Strahlenbüschel ganz erfüllen, so muss man solche ideale Kegelschnitte, die ein System von Pol und Polaren in ihrer Ebene vollständig bestimmen, zulassen[1]). Solche sollen schlechthin ideale Kegelschnitte heissen. Andere ideale Kegelschnitte, die auch durch reale Punkte gehen können, kommen vor als Doppelelemente projectiver Kegelschnittbüschel mit gemeinsamen Grundpunkten. Die letzteren treten als aggregirt ideale Paare von Kegelschnitten auf, und werden durch diesen Zusatz hinreichend gekennzeichnet.

Den Beweis dafür, dass auch idealen Kegelschnitten durch $P_1 P_2$ ideale Kegelschnitte durch $P_1 P_2$ in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft entsprechen, zu führen, brauchen wir den Satz, dass einer Involution auf h eine ihr projective auf derselben Geraden h (durch P_3) entspricht. Er ist leicht zu erweisen und wird in etwas allgemeinerer Fassung im folgenden Paragraphen Platz finden und mag hier vorausgesetzt werden. — Die Kegelschnitte $\varkappa_1 \varkappa_2$ mögen sich ausser in $P_1 P_2$ noch in zwei anderen aggregirt idealen Punkten schneiden. Der Büschel $(\varkappa_1 \varkappa_2)$ bestimmt auf einer Geraden h durch P_3 eine Involution J, die hyperbolisch ist, weil sie auch aggregirt ideale Paare enthält. Durch die MÖBIUS'sche Verwandtschaft bilden sich die in $(\varkappa_1 \varkappa_2)$ enthaltenen Kegelschnitte auf reale Kegelschnitte eines Büschels $(\varkappa_1' \varkappa_2')$, der $P_1 P_2$ zu Grundpunkten hat, ab, die auf h eine J projective Involution J' bestimmen. Den idealen Paaren von J entsprechen ideale Paare von J' und da die Paare einander projectiv zugeordnet sind, weil sie auf einer Geraden projective Involutionen bestimmen, so muss einem durch einen idealen Kegelschnitt $\varkappa$ des Büschels $(\varkappa_1 \varkappa_2)$ bestimmten Paare von J das Paar von J' entsprechen, durch welches der ideale

---

1) In der analytischen Geometrie gehören zu ihnen Gleichungen mit reellen Coefficienten.

Kegelschnitt $\varkappa'$ des Büschels $(\varkappa_1'\varkappa_2')$ hindurchgeht, der $\varkappa$ in der Projectivität $(\varkappa_1\varkappa_2) \barwedge (\varkappa_1'\varkappa_2')$ entspricht. Dies gilt für jede Gerade h durch P_3, woraus man schliesst, dass allen Punkten von $\varkappa$ die von $\varkappa'$ entsprechen, w. z. b. w.

§ 3. **Projectives Entsprechen von Kegelschnittbüscheln.** Ein Strahlenbüschel (g) durch den Punkt G bildet sich durch die Möbius-sche Verwandtschaft auf einen Kegelschnittbüschel (γ) mit den Grundpunkten $P_1P_2P_3G'$ ab, wenn G' der G entsprechende Punkt ist, und die Geraden (g) sind den Kegelschnitten (γ) projectiv zugeordnet. Einem Kegelschnitte $\varkappa$ durch $P_1P_2P_3G$ entspricht nämlich eine Gerade k durch G'. Die Schnittpunkte von $\varkappa$ mit den Geraden (g) sind den Schnittpunkten von k mit den entsprechenden Kegelschnitten (γ) projectiv, und diese sind den Kegelschnitten (γ) projectiv zugeordnet, folglich ist $(g) \barwedge (\gamma)$.

Eine Involution J auf einer Geraden g bildet sich auf eine Involution J' auf einer Geraden oder allgemeiner auf einem durch $P_1P_2P_3$ gehenden Kegelschnitte γ ab, die der Involution J projecti zugeordnet ist. Denn ist H ein Punkt auf g und sind $H_1H_2H_3\ldots$ die Punkte, die von H durch die Paare der Involution J harmonisch getrennt sind, so sind die Bildpunkte H', $H_1'H_2'H_3'\ldots$ der Punkte H, $H_1H_2H_3\ldots$ auf γ durch die entsprechenden Paare der Involution J' harmonisch getrennt. Da nun $H_1H_2H_3\ldots$ den Punkten $H_1'H_2'H_3'\ldots$ projectiv entsprechen, so sind die Involutionen JJ' einander projectiv zugeordnet. Geht g durch P_3, so ist g zugleich Träger der Involutionen J und J'.

Einem Kegelschnittbüschel (γ) durch P_1P_2GH — wo GH auch aggregirt ideale Punkte sein können — entspricht ein Kegelschnittbüschel (γ') durch $P_1P_2G'H'$, wenn $G'H'$ die Bildpunkte von G und H sind, und es ist $(\gamma) \barwedge (\gamma')$, wie im vorigen Paragraphen bemerkt wurde. Sind P_1P_2 reale Punkte, so entspricht einem Kegelschnittbüschel (γ) durch P_1P_2GH ein ihm projectiver (γ') durch $P_1P_2G'H'$, was keinen neuen Beweis erfordert.

Die Kegelschnitte eines Büschels (γ) durch P_1P_2HG treffen einen nicht zum Büschel gehörenden Kegelschnitt $\varkappa$, der P_1P_2H enthält — was nur dann möglich ist, wenn H einen realen Punkt bedeutet — in Punkten (C), die den Kegelschnitten des Büschels projectiv zugeordnet sind. Dass dieser Satz richtig ist, wenn für $\varkappa$ eine Gerade

durch H eintritt, ist aus den Elementen bekannt. Bildet man durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft ab, in der $P_1 P_2$ die lateralen, H der dritte Hauptpunkt ist, so bildet sich der Kegelschnittbüschel auf einen ihm projectiven Strahlenbüschel (g') durch den Bildpunkt G' von G ab, $\varkappa$ auf eine Gerade k'. Die Schnittpunkte der Geraden (g') mit k' sind einerseits den Punkten die (γ) auf $\varkappa$ bestimmt projectiv, andererseits sind sie den Geraden (g') und folglich (γ) projectiv, und die Kegelschnitte (γ) sind daher ihren Schnittpunkten mit $\varkappa$ projectiv, oder, wenn man lieber will, perspectiv zugeordnet, w. z. b. w.

Die Punkte eines Kegelschnittes $\varkappa$ durch $P_1 P_2$ sind den entsprechenden Punkten des ihm in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft zugehörigen Kegelschnittes $\varkappa'$ projectiv zugeordnet. — Man lege durch zwei reale Punkte GH, von denen H auf $\varkappa$ liegt, und durch $P_1 P_2$ einen Kegelschnittbüschel (γ), er bestimmt auf $\varkappa$ Punkte (C), die (γ) projectiv zugeordnet sind. Die den Schnittpunkten (C) der (γ) und $\varkappa$ in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft entsprechenden Punkte (C'), die durch den entsprechenden Büschel (γ') auf $\varkappa'$ bestimmt werden, sind (γ') projectiv zugeordnet, und da $(\gamma) \barwedge (\gamma')$ ist, so folgt $(C) \barwedge (C')$, w. z. b. w. Dieser Satz ist im Allgemeinen schon im vorigen Paragraphen erwiesen, nur in dem Falle nicht, dass $P_1 P_2$ ideale Punkte sind, und dass P_3 im Innern von $\varkappa$ liegt.

Ein Kegelschnittbüschel (γ) durch $P_1 P_2 G H$ bestimmt auf einem Kegelschnitte $\varkappa$ durch $P_1 P_2$, z. B. auf ω, eine Involution, die dem Büschel projectiv zugeordnet ist, auch wenn $P_1 P_2 G H$ aggregirt ideale Punkte sind. — Nimmt man auf $\varkappa$ einen Punkt L an und bildet das gegebene Gebilde durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft ab, in der $P_1 P_2 L$ die Hauptpunkte, die beiden ersten die lateralen sind, so bildet sich (γ) auf einen ihm projectiven Kegelschnittbüschel (γ') ab, $\varkappa$ auf eine Gerade k'. Auf k' bestimmt (γ') eine (γ') projective Involution, die der von (γ) auf $\varkappa$ bestimmten Involution projectiv ist, die demnach (γ') und folglich (γ) projectiv ist.

§ 4. **Die Steiner'sche Verwandtschaft.** Dies sind etwa die Sätze über die MÖBIUS'sche Verwandtschaft, von denen hier Gebrauch gemacht werden wird. Man kann sich statt der MÖBIUS'schen Verwandtschaft ebensogut der Verwandtschaft bedienen, die von STEINER für den Fall realer Hauptpunkte im ersten Bande seiner gesammelten Werke Seite 408 in die Geometrie eingeführt ist, und die sich von

der Möbius'schen nicht eben wesentlich unterscheidet, in gewisser Beziehung vor ihr einen Vorzug hat, indem in ihr die Hauptpunkte als gleichberechtigte auftreten. — Sind die Punkte CC' einander in einer Möbius'schen Verwandtschaft zugeordnet, in der $P_1 P_2$ die lateralen Hauptpunkte sind, P_3 der dritte, und entsprechen den Punkten C' die Punkte C'' in einer Collineation in der P_3 sich selbst, P_1 aber P_2 und P_2 P_1 entspricht, so stehen die Punkte CC'' in einer Steiner'schen Verwandtschaft zu einander. Die Hauptsätze dieser Verwandtschaft folgen nach der hier gegebenen Definition aus denen der Möbius'schen so einfach, dass sie nur ausgesprochen zu werden brauchen, und es ist dabei gleichgültig, ob unter den Hauptpunkten aggregirt ideale sind oder nicht. — Jedem Punkte C entspricht ein Punkt C'', nur den Punkten $P_1 P_2 P_3$, den Hauptpunkten der Verwandtschaft, entsprechen alle Punkte der ihnen im Hauptdreieck $P_1 P_2 P_3$ bez. gegenüberliegenden Seiten $p_1 p_2 p_3$. Einer Geraden entspricht ein Kegelschnitt durch die Hauptpunkte, einem Kegelschnitte durch die Hauptpunkte entspricht eine Gerade. Genau genommen sind noch die Geraden $p_1 p_2 p_3$, die den Hauptpunkten entsprechen, hinzuzufügen, die man aber meist nicht besonders anführt. Einer Geraden durch einen Hauptpunkt entspricht eine Gerade durch denselben Hauptpunkt, und einem Büschel durch einen Hauptpunkt ist ein ihm projectiver zugeordnet. Kegelschnitten durch zwei Hauptpunkte entsprechen Kegelschnitte durch dieselben Hauptpunkte, einem Büschel von Kegelschnitten durch zwei Hauptpunkte entspricht ein ihm projectiver. Soll ein Punkt Q in der Steiner-schen Verwandtschaft sich selbst entsprechen, so muss die ihn mit einem Hauptpunkte P verbindende Gerade sich selbst entsprechen, denn dieser Geraden entspricht eine Gerade durch P, die nur dann Q enthält, wenn sie eben (PQ) selbst ist. Da nun die Geraden durch P ihren entsprechenden projectiv zugeordnet sind, so liegen die sich selbst entsprechenden Punkte auf zwei geraden Linien durch P. Sind $P_1 P_2$ die lateralen Hauptpunkte der Möbius'schen Verwandtschaft, und sind sie aggregirt ideale, so bestimmt die definirende Collineation auf p_3 eine Involution, in der $P_1 P_2$ ein ideales Paar ist, die deshalb eine hyperbolische ist, und die beiden Geraden durch P_3, die die sich selbst entsprechenden Punkte enthalten, sind reale. Die Punkte einer solchen Geraden haben ihre entsprechenden auf derselben Geraden und sind ihnen projectiv zugeordnet, daher giebt es auf jeder von ihnen im

Allgemeinen zwei sich selbst entsprechende, und es giebt daher in einer STEINER'schen Verwandtschaft im Allgemeinen vier sich selbst entsprechende Punkte. Es lässt sich übrigens erweisen, dass die Schnittpunkte von zwei Paaren aggregirt idealer Geraden in zwei Paare aggregirt idealer Punkte zerfallen und daher immer auf zwei realen Geraden liegen.

§ 5. **Die stereographische Projection.** Ich benutze nun, um einige für's Folgende wesentliche Sätze zu erweisen, eine Abbildung der dreifach unendlichen Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte durch zwei Punkte XY auf die Punkte des Raumes. Der vom mathematisch ästhetischen Gesichtspunkte aus vielleicht zu stellenden Forderung gerecht zu werden, dass diese Sätze mit den Hülfsmitteln der ebenen Geometrie allein erwiesen werden sollten, mag späteren Untersuchungen überlassen bleiben, auch die STEINER'sche Verwandtschaft ist von ihrem Urheber aus räumlichen Beziehungen abgeleitet. — Eine Ebene durch die Punkte XY werde mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet, und eine zweite ebenfalls durch XY gehende Ebene mit $\mathfrak{n}$. Einen Punkt S der Ebene $\mathfrak{s}$ verbinden wir mit XY bez. durch die Geraden $x_s y_s$ und einen Punkt N der Ebene $\mathfrak{n}$ verbinden wir mit XY bez. durch die Geraden $x_n y_n$. Durch die Geraden $x_s y_s$, $x_n y_n$ legen wir ein Hyperboloid Φ, es wird von den Ebenen $\mathfrak{s}\mathfrak{n}$ bez. in den Punkten SN berührt. Nun projiciren wir die Punkte der Ebene $\mathfrak{s}$ von N aus auf das Hyperboloid Φ. Eine ebene Curve auf Φ wird durch die Strahlen eines Kegels projicirt, dessen Spur in der Ebene $\mathfrak{s}$ ein Kegelschnitt durch XY ist, denn der projicirende Kegel enthält die Strahlen $x_n y_n$. Geht die ebene Curve auf Φ durch N, so entspricht ihr in $\mathfrak{s}$ eine Gerade, die mit der dem Punkte N entsprechenden Geraden (XY) zusammen ebenfalls als ein Kegelschnitt durch XY anzusehen ist. Einer Geraden auf Φ entspricht eine Gerade in $\mathfrak{s}$, und zwar entsprechen die Geraden auf Φ, die mit x_n zur selben Schaar Erzeugender gehören, gerade Linien durch Y, Geraden, die zur Schaar y_n gehören, entsprechen gerade Linien durch X, die Geraden $x_s y_s$ entsprechen sich selbst. Umgekehrt entspricht einem Kegelschnitte durch XY in $\mathfrak{s}$ auf Φ eine ebene Curve, ein Kegelschnitt oder eine Gerade. Denn entsprechen den Punkten ABC eines Kegelschnittes durch XY in $\mathfrak{s}$ auf Φ die Punkte $A'B'C'$, so projicirt sich der durch die Ebene $A'B'C'$ auf Φ bestimmte Kegelschnitt auf einen Kegelschnitt in $\mathfrak{s}$, der mit dem ge-

gebenen die Punkte $XYABC$ gemein hat, also ganz mit ihm zusammenfällt. So bestimmt also jeder Kegelschnitt der Ebene $\mathfrak{S}$ eine Ebene im Raume, nämlich die die Projection des Kegelschnittes auf Φ enthaltende Ebene, und wenn man dieser wieder ihren Pol in Bezug auf Φ zuordnet, so erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Kegelschnitten durch XY und den Punkten des Raumes. Einem Strahlenbüschel durch X entsprechen Ebenen durch x_n, die durch die Strahlen des Büschels hindurchgehen, ihm also projectiv zugeordnet sind. Ebenso sind die Pole dieser Ebenen den Strahlen des Büschels projectiv zugeordnet. Einem Strahlenbüschel durch X oder durch Y entsprechen die Punkte der Geraden x_n bez. y_n und zwar sind die Strahlen den Punkten dieser Geraden projectiv zugeordnet.

Einem Kegelschnittbüschel durch XY und zwei reale oder ideale Punkte UV entsprechen Ebenen durch zwei feste reale oder ideale Punkte, nämlich durch die Punkte, die UV in der Projection von N aus auf Φ entsprechen, also die Ebenen eines Büschels, und diesen Ebenen entsprechen als ihre Pole die Punkte einer Geraden im Raume. Eine Gerade x durch X in $\mathfrak{S}$ trifft den Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ mit den Grundpunkten $XYUV$ in Punkten (C), sie projiciren sich von N aus in Punkte (C') einer Geraden auf Φ, die (C) projectiv zugeordnet sind. Die den Kegelschnitten $(\varkappa)$ entsprechenden Ebenen gehen durch (C') und sie selbst wie ihre Pole sind daher (C') und (C) und folglich $(\varkappa)$ projectiv zugeordnet. Den Kegelschnitten eines Büschels $(\varkappa)$, von dem XY zwei Grundpunkte sind, entsprechen demnach die Punkte einer Geraden im Raume, die den Kegelschnitten des Büschels projectiv zugeordnet sind. Die Polare dieser Geraden in Bezug auf Φ trifft diese Fläche in den beiden Punkten, welche die Projectionen der beiden weitern Grundpunkte UV des Büschels $(\varkappa)$ von N auf Φ sind.

Die stereographische Projection setzt eine Ebene mit einer Kugel durch Projection aus einem Punkte der Kugel in Beziehung. Vom projectiven Standpunkte aus unterscheidet sich die stereographische Projection von der hier beschriebenen $\mathfrak{S}$ auf Φ abbildenden nur etwa dadurch, dass die Geraden von Φ real sind, während sie auf der Kugel ideal sind. Wir wollen deshalb die Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf Φ, wie sie eben gegeben ist, kurz eine stereographische nennen. Die Verwandtschaft, die durch Vermittelung der stereographischen Pro-

jection zwischen den durch XY gehenden Kegelschnitten und den Ebenen des Raumes hergestellt wird, mag die φ-Verwandtschaft, die zwischen den Kegelschnitten und den Punkten des Raumes mag die Φ-Verwandtschaft heissen. — Ich habe die Φ-Verwandtschaft für den Fall, dass Φ eine Kugel ist, also nur ideale Geraden enthält, in SCHLÖMILCH's Zeitschrift Jahrgang 29 benutzt, um das System der Kreise einer Ebene auf den Raum abzubilden. Der Uebelstand, dass bei dieser besondern Φ-Verwandtschaft realen Raumpunkten ideale Kreise entsprechen können, tritt hier, wo jeder Kegelschnitt des Systems zwei reale Punkte XY enthält, nicht ein. Projicirt man die Gebilde der Ebene $\mathfrak{E}$ von N auf Φ, und die Gebilde auf Φ von N in eine andere Ebene $\mathfrak{E}'$, so sind die Gebilde in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, die einander entsprechen, collinear. Liegen $N'\mathfrak{E}'$ zu Φ so wie N und $\mathfrak{E}$, ich meine so, dass $\mathfrak{E}'$ von N' aus auf Φ stereographisch projicirt wird, und bildet man erst $\mathfrak{E}$ von N aus auf Φ ab, dann Φ von N' aus auf $\mathfrak{E}'$, so stehen die Gebilde in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ in einer STEINER'schen Beziehung zu einander, was wir jedoch nicht weiter untersuchen wollen.

§ 6. **Erzeugniss zweier projectiver Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinsamen Grundpunkten.** Es seien XY zwei Punkte, die mit zwei andern realen oder aggregirt idealen mit XY in einer Ebene liegenden Punkten UV einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ bestimmen, und mit zwei andern realen oder aggregirt idealen Punkten $U'V'$ derselben Ebene einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa')$, und es seien die beiden Büschel projectiv auf einander bezogen, es sei $(\varkappa) \barwedge (\varkappa')$. Dann bestimmen die entsprechenden Kegelschnitte der Büschel Punktepaare, von denen wir einen einzelnen mit M bezeichnen. Die Reihe der Punkte M hat die Eigenschaft, mit jeder Geraden a oder mit jedem Kegelschnitte α durch XY vier Punkte gemein zu haben. Denn die Kegelschnitte $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ bestimmen auf a oder α zwei einander projective Involutionen und in solchen fällt viermal ein Element der einen mit einem entsprechenden der andern zusammen. Denn projicirt man die beiden Involutionen auf einen Kegelschnitt von einem Punkte desselben, so bestimmen die Paare der Involutionen einander projective Strahlbüschel durch die Involutionscentren, die entsprechenden Strahlen schneiden sich auf einem Kegelschnitte, der den Träger der Involutionen viermal trifft, wenn Berührungspunkte doppelt gezählt werden. Im Berührungsfalle sagen wir, dass die Gerade a oder der Kegelschnitt α

die Punktreihe M berühre, was auch zweimal auf demselben a oder α vorkommen kann. Auf Grund dieser Eigenschaften nennen wir die Gesammtheit der Punkte M eine Punktreihe vierter Ordnung und bezeichnen sie mit $M^{(4)}$.

Die Punkte XY gehören zur Punktreihe $M^{(4)}$, denn die Tangenten (t) der Kegelschnitte $(\varkappa)$ in X sind den Tangenten (t') der $(\varkappa')$ in X projectiv zugeordnet, und es giebt einen oder vielmehr im Allgemeinen zwei vielleicht aggregirt ideale Paare von entsprechenden Kegelschnitten $\varkappa\varkappa'$, von denen der eine den andern in X berührt, und diese bestimmen X als einen Punkt M. Ebenso gehören $UVU'V$ zu $M^{(4)}$.

Auf einer Geraden x durch X, und ebenso auf einer Geraden y durch Y liegen neben X bez. Y nur zwei Punkte der Reihe $M^{(4)}$. Denn die Kegelschnitte $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ bestimmen auf x projective Punktreihen, und diese haben zwei und nur zwei Punkte miteinander gemein. Fallen sie auf einer Geraden x in einen Punkt zusammen, so sagen wir, dass die Gerade x die Punktreihe $M^{(4)}$ an jener Stelle berühre. Die Punkte XY heissen Doppelpunkte der Punktreihe $M^{(4)}$, weil auf jeder Geraden durch sie ausser ihnen selbst nur noch zwei Punkte von $M^{(4)}$ liegen. Die Gerade (XY) hat mit $M^{(4)}$ ausser XY keinen Punkt gemein, weil sie von keinem Kegelschnitte der Büschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ in andern Punkten getroffen wird.

Zwei Kegelschnittbüscheln der Ebene $\mathfrak{S}$, dem Büschel $(\varkappa)$ mit den Grundpunkten $XYUV$ und $(\varkappa')$ mit den Grundpunkten $XYU'V'$ entsprechen in der Φ-Verwandtschaft im Raume zwei gerade Punktreihen $(\mathfrak{k})$, $(\mathfrak{k}')$, die einander projectiv zugeordnet sind. Die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{K}\mathfrak{K}'$ dieser Reihen entspricht in $\mathfrak{S}$ einem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten XY und den beiden Punkten, in denen sich die $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ entsprechenden Kegelschnitte $\varkappa\varkappa'$ schneiden. Alle diese Verbindungslinien erzeugen ein Hyperboloid Ψ, das auf unendlich viele Arten durch projective Ebenenbüschel erzeugt werden kann. Nehmen wir die Verbindungslinien irgend zweier Paare entsprechender Punkte auf $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$ zu Axen zweier Ebenenbüschel, die das Hyperboloid Ψ erzeugen, so sind diese Ebenenbüschel einander projectiv zugeordnet. Hieraus folgt durch Abbildung in die Ebene $\mathfrak{S}$: Erzeugen zwei projective Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ mit den Grundpunkten $XYUV$, $XYU'V'$ eine

Punktreihe $M^{(4)}$, und schneiden sich die entsprechenden Kegelschnitte $\varkappa\varkappa'$ in XYU_1V_1 und die entsprechenden Kegelschnitte $\varkappa_1\varkappa_1'$ in $XYU_1'V_1'$, so lassen sich die Kegelschnittbüschel (XYU_1V_1) $(XYU_1'V_1')$ oder $(\varkappa\varkappa')$ $(\varkappa_1\varkappa_1')$ so in projective Beziehung zu einander setzen[1], dass sie dieselbe Punktreihe $M^{(4)}$ erzeugen, als die Büschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$. Daraus folgt der nicht unwichtige Satz: Besitzt eine Punktreihe $M^{(4)}$ ausser XY überhaupt reale Punkte, so kann man die Reihe durch projective Kegelschnittbüschel erzeugen, von denen der eine oder beide nur reale Grundpunkte haben.

Construiren wir zu jeder Geraden auf Ψ die Polare in Bezug auf Φ, so erhalten wir wieder ein Hyperboloid Ψ'. Die Schnittpunkte der beiden Flächen $\Psi'\Phi$ sind die Projectionen der Punkte M von N aus auf Φ, die stereographischen Projectionen. Der Schnitt von Φ und Ψ' ist als Schnitt zweier continuirlicher Oberflächen eine continuirliche Curve, also ist auch ihre Projection $M^{(4)}$ eine continuirliche Curve, deren reale Theile, wie wir nachher sehen werden, einen oder zwei geschlossene Züge ausmachen können. Wir können also die Punktreihe $M^{(4)}$ eine Curve und zwar eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten nennen.

Eine zweite Curve $M_1^{(4)}$ mit denselben Doppelpunkten XY ist die stereographische Projection des Schnittes eines zweiten Hyperboloides Ψ_1' mit Φ. Den Schnittpunkten von $M^{(4)}$ und $M_1^{(4)}$ entsprechen stereographisch auf Φ erstens die Schnittpunkte der Hyperboloide $\Psi_1'\Psi'$ mit $x_n y_n$, die im Allgemeinen nicht zusammenfallen werden, und zweitens die Punkte, die die Hyperboloide $\Phi\Psi'\Psi_1$ mit einander gemein haben. Deren giebt es acht, sie heissen associirte Punkte, ebenso wollen wir die Schnittpunkte zweier Curven $M^{(4)}$ nennen. Die drei Hyperboloide können aber auch unendlich viele Punkte gemein haben, aber nur wenn der Schnitt zweier dieser Oberflächen entweder eine Gerade oder einen Kegelschnitt enthält. Enthält der Schnitt von Φ mit Ψ' einen Kegelschnitt, so enthält er noch einen zweiten, und seine Projection in $\mathfrak{S}$, die Curve $M^{(4)}$, zerfällt in zwei Kegelschnitte, die beide durch XY gehen, weil jeder Kegelschnitt auf Φ die Geraden $x_n y_n$ trifft. Zer-

1) Es ist dies der Satz der analytischen Geometrie, dass die Kegelschnittbüschel $\varkappa + \lambda\varkappa_1 = 0$, $\varkappa' + \lambda\varkappa_1' = 0$ dieselbe Curve erzeugen als die Büschel $\varkappa + \lambda\varkappa' = 0$, $\varkappa_1 + \lambda\varkappa_1' = 0$.

fällt $M_1^{(4)}$ ebenfalls in zwei Kegelschnitte, so können $M^{(4)} M_1^{(4)}$ ohne ganz zusammen zu fallen einen Kegelschnitt gemein haben. Haben $\Phi \Psi'$ eine Gerade gemein, so ist die stereographische Projection eine Gerade entweder durch X oder durch Y. Die Curve $M^{(4)}$ zerfällt dann in eine Gerade und eine Curve, die von jeder Geraden in drei Punkten getroffen wird, also in eine Gerade und eine Curve dritter Ordnung. Zerfällt nun $M_1^{(4)}$ ebenfalls in eine Gerade und eine Curve dritter Ordnung, so können $M^{(4)}$ und $M_1^{(4)}$ entweder die Gerade oder die Curve dritter Ordnung gemein haben, ohne ganz zusammen zu fallen. Wenn also die Curven $M^{(4)}$ $M_1^{(4)}$ nicht in Curven niederer Ordnung zerfallen, so schneiden sie sich in acht und nur acht Punkten, wobei natürlich Berührungspunkte doppelt zu zählen sind, oder sie fallen ganz zusammen.

Auf gleiche Weise erkennt man, dass ein Kegelschnitt, der nicht durch XY geht, mit einer Curve $M^{(4)}$ acht Punkte gemein hat. Ein Kegelschnitt plus der doppelt zu zählenden Geraden XY ist eine singuläre Curve $M^{(4)}$, die entsteht, wenn zwei projective Kegelschnittbüschel aus zerfallenden Kegelschnitten bestehen. Liegt U auf (XY) und U' ebenfalls, so erzeugen die beiden (uneigentlichen) Kegelschnittbüschel $(XYUV)$ $(XYU'V')$ einen Kegelschnitt und die Gerade XY.

Durch sieben Punkte im Raume ist der achte associirte bestimmt, also ist auch in der Ebene der achte associirte durch sieben gegebene bestimmt. Daraus folgt, dass durch ihre Doppelpunkte XY und acht Punkte im Allgemeinen eine Curve $M^{(4)}$ völlig bestimmt ist, nämlich dann, wenn die acht Punkte nicht associirte sind, in welchem Falle unendlich viele Curven $M^{(4)}$ durch die acht Punkte gehen, die einen Büschel bilden, weil durch jeden Punkt einer Geraden eine und nur eine Curve der Mannigfaltigkeit gelegt werden kann.

Enthält die Curve $M^{(4)}$ eine nicht durch X oder Y gehende Gerade, so projiciren sich die Punkte des geraden Theiles von $M^{(4)}$ stereographisch auf einen durch N gehenden Kegelschnitt auf Φ, das Hyperboloid Ψ' hat folglich noch einen Kegelschnitt mit Φ gemein, dessen Projection in der Ebene $\mathfrak{E}$ ein Kegelschnitt durch XY ist. Der Punkt N aber entspricht stereographisch der Geraden (XY), die Curve $M^{(4)}$ besteht demnach in diesem Falle aus jener Geraden, der Geraden (XY) und einem durch XY gehenden Kegelschnitte.

§ 7. **Abbildung auf Curven dritter Ordnung. Es giebt vier Tangenten von XY an $M^{(4)}$.** Die Curven dritter Ordnung sind nach projectiv geometrischer Methode als Erzeugniss eines Strahlbüschels und eines ihm projectiven Kegelschnittbüschels von SCHRÖTER in seiner »Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig bei Teubner 1888« behandelt worden und wir dürfen von den Ergebnissen dieser Untersuchungen Gebrauch machen. Zuerst benutzen wir sie, um nachzuweisen, dass es von XY an die Curve $M^{(4)}$ je vier Tangenten giebt. Die beiden Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ mögen die Curve $M^{(4)}$ erzeugen. Wir dürfen nach unsern obigen Ermittelungen voraussetzen, dass die Grundpunkte des einen derselben $XYUV$ sämmtlich reale sind. Dann können wir XYU zu Hauptpunkten einer MÖBIUS'schen Verwandtschaft machen, die beiden ersten zu lateralen. Durch diese Verwandtschaft bildet sich der Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ auf einen Strahlenbüschel (v) ab mit dem Punkte $\overline{V}$ als Träger, der V in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft entspricht, und $(\varkappa')$ bildet sich auf einen Kegelschnittbüschel (γ') ab. Da nun $(v) \barwedge (\gamma')$ ist, so erzeugen die Büschel eine durch XY gehende Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, genau genommen plus der Geraden (XY) als Bild des Punktes U und plus den doppelt zu zählenden Geraden (XU) (YU), die den Punkten XY entsprechen. Lassen wir diese mit plus angeführten Theile ausser Acht, so können wir sagen, dass jedem Punkte von $M^{(4)}$ ein Punkt von $C^{(3)}$ und umgekehrt jedem Punkte von $C^{(3)}$ ein Punkt von $M^{(4)}$ entspricht. Sind $\overline{U'}\,\overline{V'}$ die in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft $U'V'$ entsprechenden Punkte, so ist $\overline{V}$ der den Punkten $XY\overline{U'}\,\overline{V'}$ auf $C^{(3)}$ »gegenüberliegende« Punkt. Trifft die Gerade XU die Curve $C^{(3)}$ neben X in idealen Punkten, so ist X ein isolirter Punkt von $M^{(4)}$. In der Theorie der Curven dritter Ordnung beweist man den Satz, dass die vom Punkte $\overline{V}$ auf den Geraden (v) durch die weiteren Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ harmonisch getrennten Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, der die harmonische Polare des Punktes $\overline{V}$ in Bezug auf $C^{(3)}$ heisst. Der geometrische Ort dieser Punkte wird nämlich erzeugt durch den Strahlenbüschel (v) und die Polaren (l) von $\overline{V}$ für den Kegelschnittbüschel (γ'), diese Polaren gehen durch einen Punkt und sind (γ') und folglich (v) projectiv zugeordnet, die Büschel $(v) \barwedge (l)$ erzeugen daher einen Kegelschnitt. Daraus folgt, dass zu jedem Punkte von $C^{(3)}$ ein durch ihn gehender Kegelschnitt als harmonische Polare

gehört — der natürlich in ein Geradenpaar zerfallen kann — weil man jeden Punkt von $C^{(3)}$ zum Träger eines Strahlenbüschels machen kann, der mit einem gewissen ihm projectiven Kegelschnittbüschel $C^{(3)}$ erzeugt. Der Satz gilt also auch für die Punkte XY der Curve $C^{(3)}$. Da die harmonische Polare eines Punktes C von $C^{(3)}$ die Tangente in diesem Punkte mit $C^{(3)}$ gemein hat, so berührt sie dort $C^{(3)}$ und trifft diese Curve deshalb nur noch in vier Punkten. Die nach diesen Treffpunkten von C gezogenen Geraden sind die Tangenten von ihm an $C^{(3)}$, es giebt deren, abgesehen von der im Punkte C berührenden, vier.

Vom Punkte Y giebt es also vier Tangenten $\overline{y}$ an $C^{(3)}$, die diese Curve in Y und sonst nur noch einmal treffen. Bildet man $C^{(3)}$ rückwärts durch die MÖBIUS'sche Verwandtschaft auf $M^{(4)}$ ab, so entsprechen den vier Tangenten $\overline{y}$ vier gerade Linien x durch X, die $M^{(4)}$ neben X nur noch in je einem Punkte treffen, es giebt von X und ebenso von Y an $M^{(4)}$ vier Tangenten, abgesehen von den $M^{(4)}$ in den Punkten XY bez. selbst berührenden. — Dass immer wirklich vier Tangenten vorhanden sind, wenn $C^{(3)}$ keinen Doppelpunkt hat, die paarweise aggregirt ideale sein können, nehme ich als in der Theorie der Curven dritter Ordnung erwiesen an. Eine der vier Tangenten von C an $C^{(3)}$ kann allerdings mit der in C zusammenfallen, wenn dieser Punkt ein Wendepunkt ist, eben so kann auch eine der vier Tangenten von X an $M^{(4)}$ mit einer im Punkte X berührenden zusammenfallen.

§ 8. **Die projectiven zwei-zweideutigen Verwandtschaften.** Liegen auf einem Strahle x durch X die beiden Punkte MM_1 der Curve $M^{(4)}$, so bestimmen diese mit Y zwei Strahlen yy_1. Der Strahl y enthält ausser M noch einen Punkt von $M^{(4)}$ und dieser bestimmt mit X einen Strahl x_1. Auf diese Weise wird zwischen den Strahlenbüscheln (x) durch X und (y) durch Y eine zweizweideutige Verwandtschaft hergestellt, die wir eine projective nennen und durch

$$(x) \overset{2,2}{\wedge} (y)$$

bezeichnen. Jedem Strahl x entsprechen zwei Strahlen yy_1, und jedem Strahl y zwei Strahlen xx_1.

Ebenso sagen wir, die Punktreihen (A) (B), die die Strahlen (x) (y) bez. auf einer Geraden g oder einem durch XY gehenden

Kegelschnitte γ bestimmen (oder auch auf zwei Geraden bez. Kegelschnitten, von denen der eine die (A), der andere die (B) enthält) seien einander zweizweideutig projectiv zugeordnet, es sei

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B) \,.$$

Liegen die Verwandtschaften auf demselben Träger, so heissen sie collocal.

Ist x Tangente an $M^{(4)}$, so entspricht x nur ein Strahl y. Es giebt vier solche Strahlen, wir nennen sie **Verzweigungsstrahlen**, oder wenn dem Punkte A nur ein Punkt B in der Verwandtschaft (A) (B) entspricht, so heisst er ein Verzweigungspunkt oder Verzweigungselement der Reihe (A). Ebenso giebt es in der zweiten Reihe, der Reihe (y) oder der Reihe (B), vier Verzweigungselemente.

Giebt es auf $M^{(4)}$ einen Punkt D von der Beschaffenheit, dass zwei gerade Linien $a_1 a_2$ durch ihn die Curve $M^{(4)}$ nur noch in zwei Punkten treffen, so wird jede Gerade durch ihn und jeder Kegelschnitt α durch XY und ihn von $M^{(4)}$ nur noch in zwei Punkten getroffen, er ist ein Doppelpunkt. Denn denken wir uns $M^{(4)}$ durch zwei Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ erzeugt, von denen einer $(\varkappa)$ D unter seinen Grundpunkten enthält, so bestimmt $(\varkappa)$ auf a_1 eine Punktreihe (A_1), die $(\varkappa)$ projectiv ist. Fällt A_1 auf D, so berührt der zugehörige Kegelschnitt $\varkappa$ a_1 in D, und der diesem im Büschel $(\varkappa')$ zugeordnete Kegelschnitt muss durch D gehen. Auf a_2 bestimmt $(\varkappa)$ die Punktreihe (A_2), fällt A_2 auf D, so berührt dort der zugehörige Kegelschnitt des Büschels $(\varkappa)$ die Gerade a_2, und der diesem entsprechende Kegelschnitt des Büschels $(\varkappa')$ muss auch durch D gehen. Da also zwei Kegelschnitte von $(\varkappa')$ durch D gehen, so ist D ein Grundpunkt des Büschels $(\varkappa')$. Auf einer Geraden a durch D oder einem Kegelschnitte α durch XY und D bestimmen die beiden Büschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ projective Punktreihen, deren entsprechende Punkte nur zweimal zusammenfallen, so dass auf a oder α neben D nur noch zwei Punkte von $M^{(4)}$ liegen, was die charakteristische Eigenschaft eines Doppelpunktes ist. Man erkennt hieraus auch die volle Gleichberechtigung der Punkte XYD.

Bilden wir die Curve $M^{(4)}$ mit einem Doppelpunkte D durch eine MÖBIUS'sche (oder auch eine STEINER'sche) Verwandtschaft mit den Hauptpunkten XYD ab und zugleich die D als Grundpunkt enthal-

tenden erzeugenden Büschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$, so werden aus den letztern zwei projective Strahlbüschel (k) (k') im Bilde, die einen Kegelschnitt λ erzeugen. Die zweizweideutige projective Verwandtschaft, die man erhält, wenn man einen Kegelschnitt von zwei nicht auf ihm liegenden Punkten XY projicirt

$$(x) \overset{2,2}{\wedge} (y)$$

enthält in jeder der beiden Reihen nur zwei Verzweigungsstrahlen.

Gehen die beiden Geraden $a_1 a_2$ durch X bez. Y, so erhält man den Satz: Berührt eine Gerade x durch X $M^{(4)}$ in einem Punkte D, und ist die Gerade y gleich (YD) ebenfalls Tangente an $M^{(4)}$, so ist D ein Doppelpunkt von $M^{(4)}$. Die zweizweideutige projective Verwandtschaft $(x) \overset{2,2}{\wedge} (y)$ hat dann die Eigenschaft, dass ein Verzweigungsstrahl der einen Reihe einem Verzweigungsstrahle der andern Reihe entspricht, sie lässt sich durch eine MÖBIUS'sche Abbildung mit einer andern zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft eindeutig in Beziehung setzen, die in jeder Reihe nur zwei Verzweigungsstrahlen besitzt.

Enthält die Curve $M^{(4)}$ zwei Doppelpunkte DD', so kann die geführte Untersuchung auf jeden angewandt werden, wenn DD' reale Punkte sind. Der Kegelschnitt, auf dem $M^{(4)}$ sich mittelst der MÖBIUSschen Verwandtschaft mit den Hauptpunkten XYD abbildet, hat dann einen Doppelpunkt, er zerfällt in zwei gerade Linien. Die Rückabbildung ergiebt, dass $M^{(4)}$ aus zwei Kegelschnitten besteht, und dass die projective zweizweideutige Verwandtschaft (x) (y) in zwei eineindeutige zerfällt. Sind aber DD' aggregirt ideale Punkte, so kann man nicht einen zu einem Grundpunkte einer MÖBIUS'schen Verwandtschaft machen. Da aber jeder Kegelschnitt durch $XYDD'$ die Curve $M^{(4)}$ nicht mehr treffen soll, wenn er nicht ganz in die Curve $M^{(4)}$ fällt, und da doch immer durch $XYDD'$ und einen weiteren Punkt von $M^{(4)}$ ein Kegelschnitt gelegt werden kann, so folgt auch in diesem Falle, dass $M^{(4)}$ in zwei Kegelschnitte durch XY, und dass die zweizweideutige durch $M^{(4)}$ erzeugte Verwandtschaft in zwei eineindeutige zerfallen muss.

Doppelpunkte einer zweizweideutigen collocalen projectiven Verwandtschaft. Auf einer Geraden g oder einem Kegel-

schnitte γ durch XY bestimmen die $M^{(4)}$ von XY aus projicirenden Strahlen (x) (y) die Beziehung

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B) .$$

Die vier Schnittpunkte von g oder γ mit $M^{(4)}$ geben die Elemente A, die mit einem ihrer entsprechenden Elemente B zusammenfallen, sie heissen die sich selbst entsprechenden oder die Doppelelemente der Verwandtschaft. In einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft auf demselben Träger giebt es demnach im Allgemeinen vier Doppelelemente. Da der Träger der Verwandtschaft die Curve $M^{(4)}$ berühren kann, zwei-, drei- und vierpunktig, so ist es möglich, dass die Doppelelemente zu zwei oder drei oder vier oder paarweise zusammenfallen.

Ein- oder Zweizügigkeit der Curve $M^{(4)}$. Bildet man die Curve $M^{(4)}$ durch eine Möbius'sche Verwandtschaft ab, in der XY und ein realer Punkt von $M^{(4)}$ Hauptpunkte sind, so bildet sie sich auf eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ ab, von der man weiss, dass ihre realen Theile einen oder zwei Züge bilden. Dasselbe gilt daher auch vom Bilde $M^{(4)}$. Ausserdem kann diese Curve in XY isolirte Punkte besitzen.

§ 9. **Beziehung der Curven dritter Ordnung zu den zweizweideutigen projectiven Verwandtschaften.** Liegt von den Grundpunkten $XYUV$, $XYU'V'$ der Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ einer, etwa V, auf der Geraden XY, so artet der Büschel $(\varkappa)$ in Geradenpaare aus, von denen (XY) immer die eine ist. Die andern Geraden gehen durch U, sind $(\varkappa')$ projectiv zugeordnet und erzeugen mit $(\varkappa')$ eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ plus der Geraden (XY), denn irgend einer der ausgearteten Kegelschnitte $(\varkappa)$ muss dem ausgearteten Kegelschnitt $(XY) \cdot (U'V')$ des Büschels $(\varkappa')$ entsprechen, so dass alle Punkte von XY zu $M^{(4)}$ gehören. Die Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ erzeugt mit XY ebenso wie allgemeiner die Curve $M^{(4)}$ eine zweizweideutige projective Verwandtschaft (x) (y), die nur die Besonderheit hat, dass der Strahl (XY) als Strahl von (x) demselben Strahle als Strahl von (y) entspricht. In der That, die Gerade XY trifft $C^{(3)}$ noch in einem Punkte Q. Dem Strahl (XQ) entspricht der Strahl (YQ), beide fallen mit (XY) zusammen. Auf jeder Geraden g bestimmen daher die zweizweideutig projectiven Büschel (x) (y)

zweizweideutig projective Punktreihen, in denen der Schnittpunkt von g mit (XY) ein Doppelpunkt ist.

Eine Curve dritter Ordnung kann aber noch auf andere Weise als Schnittspunktscurve zweier projectiver Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinsamen Grundpunkten XY erzeugt werden, nämlich durch zwei Büschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ bez. mit den Grundpunkten $XYUV$, $XYU'V'$, wenn die ausgearteten Kegelschnitte $(XY) \cdot (UV)$ und $(XY) \cdot (U'V')$ einander in der Projectivität $(\varkappa) \barwedge (\varkappa')$ entsprechen. Dann liegt ebenfalls auf jeder Geraden g ein Doppelpunkt der durch $M^{(4)}$ auf ihr erzeugten zweizweideutigen Verwandtschaft im Schnittpunkte von g mit (XY), die Gerade (XY) ist in $M^{(4)}$ ganz enthalten, und es bleibt blos nachzuweisen, dass der nach Abzug der Geraden (XY) von $M^{(4)}$ verbleibende Rest $C^{(3)}$ eine Curve dritter Ordnung im gemeinen Sinne des Wortes ist, d. h. dass er durch einen Strahlenbüschel und einen ihm projectiven Kegelschnittbüschel erzeugt werden kann. Dies geschieht wie folgt. Der Schnittpunkt S von (UV) $(U'V')$ gehört zu $M^{(4)}$. Bildet man durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft mit den Hauptpunkten XYS ab, so wird aus $M^{(4)}$ eine Curve dritter Ordnung $\bar{C}^{(3)}$, wie man aus § 7 weiss. Der Büschel $(\varkappa)$ bildet sich auf einen Kegelschnittbüschel $(\bar{\varkappa})$ durch $XY\bar{U}\bar{V}$, und $(\varkappa')$ auf $(\bar{\varkappa}')$ durch $XY\bar{U}'\bar{V}'$, wenn $\bar{U}\bar{V}\bar{U}'\bar{V}'$ die Bildpunkte von $UVU'V'$ in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft sind. Die Kegelschnitte $(XY) \cdot (\bar{U}\bar{V})$ und $(XY) \cdot (\bar{U}'\bar{V}')$ der Büschel $(\bar{\varkappa}) \barwedge (\bar{\varkappa}')$ entsprechen sich, $(\bar{U}\bar{V})$ $(\bar{U}'\bar{V}')$ schneiden sich in S, wenn XY die lateralen Hauptpunkte sind, also liegt S auf der Bildcurve $\bar{C}^{(3)}$. Erzeugt man nun $\bar{C}^{(3)}$ durch einen Strahlenbüschel $(\bar{s})$ mit dem Träger S und einen ihm projectiven Kegelschnittbüschel $(\bar{y})$ mit den Grundpunkten $XYS'T'$ und bildet nun rückwärts ab, so wird aus dem Strahlenbüschel $(\bar{s})$ ein Strahlenbüschel (s) und aus dem Kegelschnittbüschel $(\bar{y})$ ein ihm projectiver (y), der XY zu Grundpunkten hat, aus $\bar{C}^{(3)}$ wird $M^{(4)}$, und $M^{(4)}$ enthält, wie die gewonnene Erzeugungsweise dieser Curve lehrt, eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, ganz w. z. b. w. Die Punkte $S'T'$ lassen sich auf unendlich viele Arten wählen, da bekanntlich einer von ihnen auf $\bar{C}^{(3)}$ willkürlich gewählt werden kann, wodurch dann der andere bestimmt ist.

§ 10. **Zwei Strahlenbüschel, die eine zweizweideutige projective Punktverwandtschaft projiciren, erzeugen eine Curve vierter**

Ordnung mit zwei Doppelpunkten. — Liegt auf einer Geraden g die zweizweideutig projective Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B),$$

die durch Strahlen (x) (y) erzeugt wird, die eine Curve $M^{(4)}$ von ihren Doppelpunkten aus projiciren, und projicirt man die Punktreihen (A) (B) von zwei andern Punkten $X_1 Y_1$ aus durch Strahlen (x_1) (y_1), so stehen offenbar die Strahlen (x_1) (y_1) in zweizweideutiger Beziehung zu einander, es ist aber fraglich, ob diese Beziehung eine projectiv zweizweideutige ist, d. h. es ist fraglich, ob sich die entsprechenden Strahlen (x_1) (y_1) auf einer Curve $M_1^{(4)}$ schneiden, die durch zwei projective Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinsamen Grundpunkten $X_1 Y_1$ erzeugbar ist. — Um die Bejahung dieser Frage zu erweisen, nehmen wir zuerst an, die Geraden (XY) $(X_1 Y_1)$ schneiden sich auf g. Alsdann bilden wir die Curve $M^{(4)}$ und die sie erzeugenden Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ durch eine Collineation ab, deren Fluchtlinie g ist, und deren Collineationscentrum der Schnittpunkt G von (XX_1) (YY_1) ist, und in der XX_1, YY_1 entsprechende Punktpaare und also (XY) $(X_1 Y_1)$ entsprechende gerade Linien sind. Durch diese Collineation bildet sich der Büschel $(\varkappa)$ auf einen ihm projectiven $(\varkappa_1)$ mit den Grundpunkten $X_1 Y_1$ ab und der ebenso wie $(\varkappa)$ durch XY gehende Büschel $(\varkappa')$ auf einen ihm projectiven $(\varkappa_1')$, unter dessen Grundpunkten sich $X_1 Y_1$ befinden, und es ist $(\varkappa_1) \barwedge (\varkappa_1')$. Diese Büschel erzeugen eine Curve $M_1^{(4)}$, die das collineare Bild von $M^{(4)}$ ist. Die Strahlen (x) durch X bilden sich auf Strahlen (x_1) durch X_1, die Strahlen (y) durch Y auf Strahlen (y_1) durch Y_1 ab, die Strahlen (x_1) (y_1) stehen daher in projectiv zweizweideutiger Beziehung zueinander und projiciren dieselben Punktreihen (A) (B) auf g als die Strahlen (x) (y).

Zweitens sei $(y) \barwedge (\bar{y})$, wo die Strahlen $(\bar{y})$ durch Y gehen, so beweisen wir, dass

$$(x) \overset{2,2}{\barwedge} (\bar{y})$$

sei. Erzeugen die durch X bez. Y gehenden Strahlenbüschel (g_x) (g_y) einen Kegelschnitt, und ist $(\bar{g}_y) \barwedge (g_y)$, so erzeugen die Büschel (g_x) $(\bar{g}_y)$ durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen ebenfalls einen Kegelschnitt durch XY. Die Projectivität $(g_y) \barwedge (\bar{g}_y)$ soll dieselbe sein

als die $(y) \barwedge (\bar{y})$. So entspricht jedem Kegelschnitt $\varkappa$ durch XY ein Kegelschnitt $\bar{\varkappa}$ durch XY, und einem Büschel $(\varkappa)$ durch $XYUV$ entspricht ein Büschel $(\bar{\varkappa})$ durch $XY\bar{U}\bar{V}$. Hier sind $\bar{U}\bar{V}$ die Punkte, von denen die Strahlen (XU) (XV) von den ihnen gemäss der Projectivität $(g_y) \barwedge (\bar{g}_y)$ entsprechenden getroffen werden. Die Büschel $(\varkappa)$ und $(\bar{\varkappa})$ sind einander projectiv zugeordnet, denn auf einer Geraden x durch X bestimmen die Büschel $(\varkappa)$ $(\bar{\varkappa})$ Punktreihen (C) $(\bar{C})$, und diese bestimmen mit Y Strahlenreihen (CY) $(\bar{C}Y)$, die einander projectiv entsprechen gemäss der Projectivität $(g_y) \barwedge (\bar{g}_y)$, also ist $(C) \barwedge (\bar{C})$ und also $(\varkappa) \barwedge (\bar{\varkappa})$. Ebenso entspricht dem Kegelschnittbüschel $(\varkappa')$ durch XY ein ihm projectiver $(\bar{\varkappa}')$ durch XY, und es ist $(\bar{\varkappa}) \barwedge (\bar{\varkappa}')$, wenn $(\varkappa) \barwedge (\varkappa')$ ist. Schneiden sich nun die Strahlen xy auf der durch $(\varkappa) \barwedge (\varkappa')$ erzeugten Curve $M^{(4)}$, so schneiden sich die Strahlen $x\bar{y}$ auf der durch $(\bar{\varkappa}) \barwedge (\bar{\varkappa}')$ erzeugten Curve $\bar{M}^{(4)}$, und es ist (x) dem Büschel $(\bar{y})$ zweizweideutig projectiv zugeordnet, w. z. b. w.

Durch nochmalige Anwendung dieses Verfahrens gelangt man zu dem Satze: Sind XY die Träger der Büschel (x) (y), $(\bar{x})$ $(\bar{y})$ und ist

$$(x) \barwedge (\bar{x}) \qquad (y) \barwedge (\bar{y}) \qquad (x) \overset{2,2}{\barwedge} (y),$$

so ist auch

$$(\bar{x}) \overset{2,2}{\barwedge} (\bar{y}) .$$

Schneiden sich drittens die Geraden (XY) (X_1Y_1) in einem Punkte H der nicht auf g liegt, so legen wir durch H eine Gerade g_1, auf ihr bestimmen die $M^{(4)}$ von XY aus projicirenden Strahlenbüschel (x) (y) zwei projective zweizweideutige Punktreihen (A_1) (B_1), und es ist $(A_1) \barwedge (A)$, $(B_1) \barwedge (B)$. Projiciren wir (A_1) (B_1) von X_1Y_1 aus durch die Büschel $(\bar{x}_1)$ $(\bar{y}_1)$, so stehen diese nach dem ersten der in diesem Paragraphen erwiesenen Sätze in projectiv zweizweideutiger Verwandtschaft zu einander. Die Strahlenbüschel (x_1) (y_1), die die Punktreihen (A) (B) auf g von X_1Y_1 aus projiciren, stehen zu $(\bar{x}_1)$ $(\bar{y}_1)$ in den projectiven Beziehungen $(\bar{x}_1) \barwedge (x_1)$, $(\bar{y}_1) \barwedge (y_1)$, und da $(\bar{x}_1) \overset{2,2}{\barwedge} (\bar{y}_1)$ ist, so folgt aus dem zweiten der hier bewiesenen Sätze

$$(x_1) \overset{2,2}{\barwedge} (y_1),$$

w. z. b. w.

So ist nun allgemein bewiesen, dass eine projective zweizweideutige Verwandtschaft auf einer Geraden von zwei beliebigen

Punkten aus projicirt zweizweideutig projectiv verwandte Strahlenbüschel bestimmt, deren entsprechende Strahlen eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, den Projectionscentren, erzeugen. Als specieller Fall ergiebt sich der Satz: Projicirt man die Punktreihen (A) (B) der Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$$

auf einer Geraden von zwei Punkten XY aus, einmal die (A) von X, die (B) von Y aus, ein andermal die Reihe der (A) von Y und die der (B) von X aus, so erzeugen die daraus hervorgehenden zwei Paare projectiv zweizweideutig verwandter Büschel zwei — im Allgemeinen von einander verschiedene — Curven $M^{(4)}$ mit Doppelpunkten in den Projectionscentren. — Die folgenden Sätze bedürfen nun keines Beweises mehr.

Gehen die Strahlen (x) durch X, die Strahlen (y) durch Y, die Strahlen (x_1) durch X_1, (y_1) durch Y_1, und ist

$$(x) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (y), \quad (x) \overline{\wedge} (x_1), \quad (y) \overline{\wedge} (y_1),$$

so ist

$$(x_1) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (y_1).$$

Liegen auf einer Geraden die Punktreihen (A) (B) und liegen auf einer andern oder derselben Geraden die Punktreihen (A_1) (B_1), und ist

$$(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B), \quad (A) \overline{\wedge} (A_1), \quad (B) \overline{\wedge} (B_1),$$

so ist auch

$$(A_1) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B_1).$$

Liegen auf einem Kegelschnitte γ die einander projectiv zweizweideutig zugeordneten Punktreihen (A) (B), so erhält man zwei einander projectiv zweizweideutig zugeordnete Strahlenbüschel, wenn man die Reihen von zwei Punkten des Kegelschnittes projicirt.

Die Punktreihen (A) (B) können auch auf verschiedenen Geraden oder Kegelschnitten liegen, nur müssen sie im letzteren Falle von zwei gemeinsamen Punkten der Kegelschnitte projicirt werden.

Projiciren die Strahlen (a) (b) die zweizweideutigen projectiven Punktreihen (A) (B) von einem beliebigen Punkte aus, oder wenn (A) (B) auf einem Kegelschnitte liegen, von einem Punkte dieses Kegelschnittes aus, so sagen wir ebenfalls, die Strahlen (a) (b) seien einander zweizweideutig projectiv zugeordnet.

§ 11. **Bemerkungen über die Dualität bei zweizweideutigen projectiven Verwandtschaften.** Ist durch die vier Geraden $xyuv$ eine Kegelschnittschaar (λ) und durch $xyu'v'$ eine zweite (λ') gegeben, und werden diese projectiv aufeinander bezogen, so bestimmen die entsprechenden Kegelschnitte durch ihre gemeinsamen Tangenten einen Geradenbüschel $m^{(4)}$, der mit jedem linearen Strahlenbüschel und jedem xy enthaltenden Büschel zweiter Ordnung (Büschel der Tangenten eines Kegelschnittes) vier Strahlen gemein hat, wie das Gesetz der Dualität unmittelbar lehrt. Durch jeden Punkt auf x oder y aber giebt es neben dieser Geraden selbst nur zwei Strahlen von $m^{(4)}$, weshalb xy als Doppelstrahlen des Büschels $m^{(4)}$ anzusehen sind. Die beiden Strahlen mm_1 von $m^{(4)}$, die durch einen Punkt X auf x gehen, bestimmen auf y zwei Punkte YY_1. In gleicher Weise bestimmt der Punkt Y auf y zwei Punkte XX_1 auf x, wir erhalten so zwei einander zweizweideutig zugeordnete Punktreihen (X) (Y) auf den Geraden xy. Projicirt man die Punkte (X) (Y) von einem Punkte G aus, so erhält man zwei collocale einander zweizweideutig zugeordnete Strahlenbüschel (a) (b), und zu jedem der oben ausgesprochenen Sätze giebt es einen ihm dualistisch gegenüberstehenden. Die einzige Frage, die dabei zu erledigen bleibt, ist die, ob die Verwandtschaft zwischen (a) und (b) eine zweizweideutig projective genannt werden darf, in dem Sinne, wie dieser Ausdruck hier definirt wurde. Dies ist in der That der Fall. — Bildet man die Kegelschnittschaaren, den von ihnen erzeugten Büschel $m^{(4)}$ u. s. w. dualistisch ab, indem man zu jeder Geraden ihren Pol, zu jedem Punkte seine Polare in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt σ construirt, so entsprechen projectiven Punktreihen projective Strahlenbüschel, projectiven Strahlenbüscheln projective Punktreihen, einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung entspricht eine Curve zweiter Ordnung und einem Büschel von Büscheln zweiter Ordnung (den Tangenten einer Kegelschnittschaar) entspricht ein dem ersten projectiv zugeordneter Kegelschnittbüschel. Daraus geht hervor, dass den Strahlenbüscheln (a) (b) zwei projectiv zugeordnete Punktreihen entsprechen, (A) (B), die auf einer Geraden g liegen, der Polare von G, und (A) (B) sind einander zweizweideutig projectiv verwandte Reihen. Nun wurden im vorigen Paragraphen zwei concentrische Strahlenbüschel (g) (h), welche die Punktreihen (A) (B) projiciren, oder zwei

Strahlenbüschel (g') (h') von der Eigenschaft $(g') \overline{\wedge} (g)$ $(h') \overline{\wedge} (h)$ als einander zweizweideutig projectiv verwandt definirt. Da nun $(a) \overline{\wedge} (A)$ $(b) \overline{\wedge} (B)$ $(A) \overline{\wedge} (g)$ $(B) \overline{\wedge} (h)$ ist, so ist auch $(a) \overline{\wedge} (g)$ $(b) \overline{\wedge} (h)$ und die Strahlenbüschel (a) (b) sind einander in dem früher festgesetzten Sinne zweizweideutig projectiv zugeordnet. Aus diesen Betrachtungen folgt zur Genüge, dass sich das Gesetz der Dualität auch auf zweizweideutig projective Verwandtschaften und deren Erzeugnisse vollständig erstreckt.

§ 12. **Eine zweizweideutige Verwandtschaft ist im Allgemeinen durch acht Elementenpaare bestimmt. Auffindung weiterer Paare.** — Nimmt man auf einer Geraden g oder einem Kegelschnitte γ acht Punktepaare A_1B_1, A_2B_2, ... A_8B_8 als einander zweizweideutig projectiv entsprechende willkürlich an, und projicirt sie von zwei Punkten XY, die auf γ liegen, wenn die Paare auf diesem Kegelschnitte gegeben sind, durch Strahlenpaare x_1y_1, x_2y_2, ... x_8y_8, so schneiden sich diese in acht Punkten M_1M_2 ... M_8. Es ist zu zeigen, dass durch sie eine Curve vierter Ordnung $M^{(4)}$ mit den Doppelpunkten XY gelegt werden kann. Wir wissen bereits aus § 6, dass durch acht nicht associirte Punkte eine Curve $M^{(4)}$ bestimmt ist, und wir können auch die dort gefundene Beziehung zum Raume benutzen, um die Curve wirklich Punkt für Punkt herzustellen, in den Fällen jedoch, in denen nicht mehr als zwei Paare der gegebenen Punkte ideale sind, lassen sich die Constructionen in der Ebene ausführen. Wir beschäftigen uns um so mehr damit, als sich daraus weitere Sätze über die Curven $M^{(4)}$ ergeben.

Wollte man durch XYM_1M_2 einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ und durch XYM_3M_4 einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa')$ legen, so würden drei weitere Punkte $M_5M_6M_7$ eine projective Beziehung zwischen $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ bestimmen, und die Büschel würden eine Curve $M^{(4)}$ mit XY als Doppelpunkten erzeugen, die sieben von den gegebenen Punkten enthält, den achten aber im Allgemeinen nicht enthalten wird. Man sieht daraus, dass für die von XY verschiedenen Grundpunkte eine Curve $M^{(4)}$ erzeugender Kegelschnittbüschel nicht jedes beliebige Quadrupel von Punkten auf $M^{(4)}$ gewählt werden kann, sondern dass für sie eine die Lage beschränkende Beziehung besteht. Bildet man die Curve $M^{(4)}$ durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft ab, in der XY laterale Hauptpunkte sind und deren dritter Hauptpunkt N auf $M^{(4)}$

liegt, so ist das Bild von $M^{(4)}$ eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ durch XY. Von einer solchen Curve weiss man, dass zu vier Punkten $XYRS$ ein ganz bestimmter, ein, wie man ihn nennt $XYRS$ gegenüber liegender Punkt T auf $C^{(3)}$ existirt, der im Allgemeinen durch weitere fünf Punkte von $C^{(3)}$ bestimmt ist, ein Punkt T von der Eigenschaft, dass $C^{(3)}$ durch den Kegelschnittbüschel $(XYRS)$ und einen ihm projectiven Strahlenbüschel mit dem Träger T erzeugt wird. Es ist daher im Allgemeinen $C^{(3)}$ durch XY und weitere sieben Punkte völlig bestimmt. Es mag noch bemerkt werden, dass auch $XYRS$ nicht ganz frei sind, indem nicht drei von ihnen auf einer Geraden liegen dürfen.

Sind nun XY und acht Punkte $M_1 M_2 \dots M_8$ gegeben, so bilden wir die sieben ersten durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft mit den Grundpunkten XYM_8 (die beiden ersten sind die lateralen) auf die Punkte $C_1 C_2 \dots C_7$ ab, M_8 entspricht der Geraden (XY). Durch XYC_6C_7 legen wir einen Kegelschnittbüschel (γ), wobei $C_6 C_7$ aggregirt ideale Punkte sein können. Dann construiren wir den XYC_6C_7 in der durch $C_1 C_2 \dots C_5$ bestimmten Curve dritter Ordnung gegenüberliegenden Punkt C_9. Dies ist in bekannter Weise ausführbar, wenn unter den Punkten $C_1 C_2 \dots C_5$ sich nicht mehr als ein aggregirt ideales Paar befindet[1]). $C^{(3)}$ wird durch den Kegelschnittbüschel (γ) durch XYC_6C_7 und einen ihm projectiven Strahlenbüschel (g') durch C_9 erzeugt. Die Rückabbildung lehrt, dass die XY als Doppelpunkte und $M_1 M_2 \dots M_8$ als einfache Punkte enthaltende Curve $M^{(4)}$ durch zwei projective Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ durch XYM_6M_7 und $(\varkappa')$ durch XYM_8M_9 erzeugt wird, worin der Punkt M_9 durch $XYM_1 M_2 \dots M_8$ bestimmt ist, wenn die $M_1 M_2 \dots M_8$ nicht associirte Punkte sind.

Da die entsprechenden Punkte einer MÖBIUS'schen Verwandtschaft durch lineare Constructionen gefunden werden, so ist ersichtlich, dass M_9 durch lineare Constructionen aus den gegebenen Punkten zu finden ist. — Sind die Punkte $M_1 M_2 \dots M_8$ associirte, so giebt es einfach unendlich viele Curven $M^{(4)}$, die durch sie hindurch gehen. Durch einen weiteren Punkt aber ist $M^{(4)}$ völlig bestimmt.

---

1) Dass eine Projectivität durch drei Elementenpaare auch dann bestimmt ist, wenn von den Elementen jeder Reihe je ein Paar aggregirt ideale sind, ist in meinem Buche: Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung, Halle 1892, auf Seite 175 gezeigt.

Daraus folgt, dass eine zweizweideutige Verwandtschaft durch acht Paare entsprechender Elemente im Allgemeinen bestimmt ist, denn sie liefern, wenn die Elemente auf einer Geraden g oder einem Kegelschnitt γ als Punkte gegeben gedacht werden, durch Projection von zwei Punkten XY aus, die bez. auf γ liegen, projicirt acht Punkte einer Curve vierter Ordnung, bestimmen diese und damit eine projective zweizweideutige Verwandtschaft, in der die acht gegebenen Paare Paare entsprechender Punkte sind. Ist die Curve $M^{(4)}$ und also die Verwandtschaft nicht bestimmt, so sagen wir, die acht Paare seien nicht unabhängig von einander, sie seien associirte Paare. Die Verwandtschaft ist dann durch ein weiteres Paar bestimmt.

Ein Kegelschnittbüschel durch vier Punkte einer Curve dritter Ordnung schneidet diese in Punktepaaren, deren Verbindungslinien durch einen Punkt, den den vier ersten gegenüberliegenden Punkt gehen. Die MÖBIUS'sche Abbildung lehrt: Auf einer Curve $M^{(4)}$ mit den Doppelpunkten XY bestimmt ein Kegelschnittbüschel durch die vier Punkte $XYUV$ der Curve Punktepaare, die mit einem weiteren Punkte U' der Curve einen Kegelschnittbüschel bestimmen, dessen vierter Grundpunkt V' ebenfalls auf $M^{(4)}$ liegt.

Ist von den acht gegebenen Paaren A_1B_1, A_2B_2, ... A_8B_8 auf einer Geraden g eins ein zusammenfallendes, also der Punkt ein Doppelelement der Verwandtschaft, so kann man durch ihn eine Gerade legen und auf dieser XY annehmen. Die zugehörige Curve $M^{(4)}$ besteht dann aus der Geraden XY und einer Curve $C^{(3)}$ und ist in Folge dessen etwas einfacher als im allgemeineren Falle zu construiren.

Sind die Kegelschnittbüschel und ihre Zuordnung gefunden, die eine durch acht Paare einer zweizweideutig projectiven Verwandtschaft bestimmte Curve $M^{(4)}$ erzeugen, so findet man in den Schnittpunkten entsprechender Kegelschnitte beliebig viele Punkte von $M^{(4)}$ und damit beliebig viele Paare der Verwandtschaft. Aber auch die Aufgabe, zu einem gegebenen Punkte die entsprechenden zu construiren, wenn acht Paare gegeben sind, ist lösbar. Denn verbindet man den gegebenen Punkt A mit X durch x, so bestimmen die beiden Kegelschnittbüschel auf x projective Punktreihen, die sich selbst entsprechenden Elemente derselben werden mit bekannten Mitteln, natürlich nicht linear, gefunden, und damit die beiden Strahlen

yy' die x, und die beiden Punkte BB', die A entsprechen. Die Elemente BB' können aggregirt ideale sein.

Zu einem Punkt A_1 können in einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft zwei aggregirt ideale Punkte $B_1 B_1'$ gehören, dann gehören, wenn sie gegeben sind, zu diesen Paaren zwei aggregirt ideale Punkte von $M^{(4)}$, die als gegeben zu betrachten sind. Es können zu mehreren der gegebenen Punkte A aggregirt ideale Punkte der Reihe B gehören, es können auch zu einem realen Punkte der Reihe B aggregirt ideale Elemente der Reihe A gegeben sein. Es ist also denkbar, dass von der Curve $M^{(4)}$, die zur Vervollständigung einer durch acht Paare gegebenen zweizweideutigen Verwandtschaft dient, und von der die acht Paare acht Punkte bestimmen, die bekannten Punkte zu mehreren Paare aggregirt idealer Punkte sind. Sind mehr als vier Paare mit idealen Elementen unter den acht bekannten Paaren, so lässt uns die eben zur Vervollständigung der Verwandtschaft gegebene Methode im Stich. Man kann dann zur Vervollständigung der Verwandtschaft, zur Auffindung acht realer Paare derselben, wenn deren existiren, die stereographische Projection benutzen. Man projicire die gegebenen acht Punkte von $M^{(4)}$ auf das Hyperboloid Φ des § 5. Es lassen sich jedesmal die Geraden angeben und auf ihnen die elliptischen Involutionen, deren Doppelelemente die Punkte von Φ sind, die einem aggregirt idealen Paare von Punkten der Curve $M^{(4)}$ entsprechen. Man hat Mittel durch die acht Punkte auf Φ ein zweites Hyperboloid Ω zu legen. Die Schnittpunkte von Ω und Φ geben durch stereographische Projection die Curve $M^{(4)}$, und damit die Verwandtschaft (A) (B), zu der die acht gegebenen Paare gehören. Die Curve kann ganz imaginär sein, nur die beiden Punkte XY als isolirte enthalten. Irgend zwei gerade Linien des Hyperboloides Ω, die derselben Schaar angehören, bestimmen auf Φ Punktepaare, deren stereographische Projectionen zu Grundpunkten von Kegelschnittbüscheln gemacht werden können, die die Curve $M^{(4)}$ erzeugen.

Zwei collocale zweizweideutige projective Verwandtschaften haben acht Paare mit einander gemein, denn projicirt man sie von XY aus, wenn sie als Punktverwandtschaften auf einer Geraden gegeben gedacht werden, so erzeugen die beiden Verwandtschaften zwei Curven vierter Ordnung, die nach § 6 acht Punkte mit einander

gemein haben. Die von XY nach den gemeinsamen Punkten führenden Projectionsstrahlen bestimmen auf dem Träger der beiden Verwandtschaften die gemeinsamen Paare, es sind associirte Paare.

§ 13. **Paare, die eine zweizweideutige projective Verwandtschaft mit einer Involution oder Projectivität gemein hat. Symmetrische Verwandtschaften.** Eine projective zweizweideutige Verwandtschaft besitzt vier Paare von Elementen, die von einem Paare gegebener Elemente harmonisch getrennt sind, mit anderen Worten, eine zweizweideutige projective Verwandtschaft hat vier Paare mit einer gegebenen ihr collocalen Involution gemein. — Wir denken uns die Verwandtschaft auf einem Kegelschnitte $\varkappa$ liegend und projiciren sie von zwei Punkten XY dieses Kegelschnittes, so dass die projicirenden Strahlen eine Curve $M^{(4)}$ mit den Doppelpunkten XY erzeugen. Die Involution auf demselben Kegelschnitt von denselben Punkten XY aus projicirt erzeugt einen Kegelschnitt λ. Der Kegelschnitt λ trifft die Curve $M^{(4)}$ neben XY noch in vier Punkten, und wenn die Verwandtschaft nicht in zwei eineindeutige zerfällt, von denen eine die Involution selbst ist, nur in vier Punkten. Die Projectionsstrahlen von XY nach diesen vier Punkten treffen den Kegelschnitt in vier Punktepaaren, die der Verwandtschaft und der Involution zugleich angehören. Wenn der Kegelschnitt die Curve $M^{(4)}$ berührt, so reducirt sich die Zahl der gemeinsamen Paare. Man kann dann sagen, dass sich die Verwandtschaft und die Involution berühren. — Wird statt der Involution ein Gebilde von zwei collocalen projectiven Elementenreihen gesetzt, — wir wollen ein solches Gebilde eine lineare Projectivität nennen, — so folgt in derselben Weise, dass viermal ein Paar der Verwandtschaft mit einem Paare der linearen Projectivität zusammenfällt. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn man fragt, wievielmal ein Element der ersten Reihe der Verwandtschaft mit einem Elemente der ersten Reihe der Projectivität, und zugleich ein entsprechendes Element der zweiten Reihe der Verwandtschaft mit einem entsprechenden Elemente der zweiten Reihe der Projectivität zusammenfällt. Fasst man aber die Projectivität unabhängig von den sie erzeugenden Reihen auf, ich meine, lässt man auch noch die Punkte der zweiten Reihe der Projectivität mit denen der ersten Reihe der zweizweideutigen Verwandtschaft zusammenfallen, und fragt, wie oft ein entsprechender Punkt der

ersten Reihe der Projectivität mit einem Punkte der zweiten Reihe der Verwandtschaft zusammenfällt, so erhält man noch vier gemeinsame Paare. Die Verwandtschaft und die Projectivität haben also im Allgemeinen acht Paare mit einander gemein, die sich in zwei Quadrupel spalten, wenn man die die Verwandtschaft und die Projectivität erzeugenden Reihen in bestimmter Weise einander zuordnet. Sind z. B. die Beziehungen gegeben

$$(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B) \quad (B) \overline{\wedge} (C) \, ,$$

und fragt man, wie oft C auf einen B in der zweizweideutigen Verwandtschaft entsprechenden Punkt (A) fällt, so ist die Antwort vier. Fragt man aber nach den Coincidenzen entsprechender Paare schlechthin, so ist die Antwort acht, da noch viermal der Punkt C der Projectivität auf einen Punkt B der Verwandtschaft und zugleich der C in der Projectivität entsprechende Punkt auf einen B in der Verwandtschaft entsprechenden Punkt A fällt. — Eine lineare Projectivität kann eine zweizweideutige Verwandtschaft ebenfalls in einem oder in mehreren Paaren berühren.

Um in einem Punkte M von $M^{(4)}$ eine Tangente zu zeichnen, kann man $M^{(4)}$ durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft, deren laterale Hauptpunkte XY sind und deren dritter Hauptpunkt ein Punkt Q von $M^{(4)}$ ist, auf eine Curve $C^{(3)}$ abbilden. C sei der Bildpunkt von M. Die harmonische Polare von C berührt $C^{(3)}$ in C, so dass die Tangente t in C an $C^{(3)}$ bekannt ist. Man kann daher einen Kegelschnitt γ construiren, der durch $XYQC$ geht und t zur Tangente hat. Bildet man alles durch die MÖBIUS'sche Verwandtschaft rückwärts ab, so ist das Bild g von γ die Tangente an $M^{(4)}$ in M.

Will man eine lineare Projectivität herstellen, die eine zweizweideutige Verwandtschaft in einem bestimmten Paare berührt, so projicire man die Verwandtschaft auf einen Kegelschnitt $\varkappa$, und projicire die so erhaltene von zwei Punkten XY des Kegelschnittes. Die projicirenden Strahlen erzeugen eine Curve $M^{(4)}$, und das gegebene Paar bestimmt einen Punkt M auf $M^{(4)}$. An ihn ziehen wir die Tangente t und zeichnen einen Kegelschnitt λ, der durch XY geht und t in M berührt. Die λ von XY aus projicirenden Strahlen bestimmen auf $\varkappa$ eine Projectivität, die die zweizweideutige Verwandtschaft in dem gegebenen Paare berührt. Da es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit

von Kegelschnitten λ giebt, die den gestellten Bedingungen genügen, so giebt es unendlich viele lineare Projectivitäten, die die zweizweideutige Verwandtschaft in einem gegebenen Paare berühren, und es lässt sich noch die Forderung erfüllen, dass die Projectivität und die Verwandtschaft ein weiteres gegebenes Paar gemein haben, oder dass sich die Berührung zur Schmiegung steigere.

Ist in der collocalen zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B)$$

dem Element A als Element der ersten Reihe das Element B der zweiten Reihe zugeordnet, und dem Element B als Element der ersten Reihe das Element A als Element der zweiten Reihe, so heissen AB ein involutorisches Paar der Verwandtschaft. Sind alle Paare involutorische, so ist die Verwandtschaft eine symmetrische.

Es giebt in einer zweizweideutigen projectiven nicht zerfallenden Verwandtschaft zwei involutorische Paare, oder alle Paare sind involutorisch. — Projiciren wir die zweizweideutige projective Verwandtschaft (A) (B), die auf einer Geraden g liegen möge, von zwei Punkten XY aus und erzeugen eine Curve $M^{(4)}$ durch die Schnittpunkte der entsprechenden die (A) aufnehmenden Strahlen (x) und der die (B) aufnehmenden Strahlen (y), und erzeugen wir eine zweite Curve $\overline{M}^{(4)}$ durch die die (B) aufnehmenden Strahlen $(\bar{x})$ und die die (A) aufnehmenden Strahlen $(\bar{y})$, so haben die beiden Curven $M^{(4)}$ $\overline{M}^{(4)}$, wenn sie nicht ganz zusammenfallen, oder wenn nicht die Curven und damit die Verwandtschaft zerfallen, acht Punkte mit einander gemein. Von diesen liegen vier auf g, es sind die vier Doppelpunkte der Verwandtschaft, diese Punkte zählen wir nicht zu den involutorischen. Von den übrigen vier Schnittpunkten, die nicht auf g liegen, liefern je zwei ein involutorisches Paar. Schneiden sich (XA) (YB) in M, (YA) (XB) in $\overline{M}$, so muss $\overline{M}$ auf $M^{(4)}$ liegen, wenn das Paar ein involutorisches sein soll, und $\overline{M}$ liegt dann nothwendig auch auf $\overline{M}^{(4)}$, so dass immer je zwei Schnittpunkte zu je einem involutorischen Paare gehören. Fallen die Curven $M^{(4)}$ und $\overline{M}^{(4)}$ vollständig zusammen, so ist die Verwandtschaft eine symmetrische, und es findet dies allemal statt, wenn drei involutorische Paare vorhanden sind und wenn die Verwandtschaft nicht zerfällt.

Sind die Punktreihen $(A) \barwedge (B)$ in Involution, und ist $(A_1) \barwedge (B_1)$ und $(A_1) \barwedge (B)$ und lässt man dem Punkte A die Punkte BB_1, A_1 ebenfalls die Punkte BB_1 entsprechen, so hat man damit eine zerfallende zweizweideutige projective Verwandtschaft hergestellt, die unendlich viele involutorische Paare besitzt, ohne eine symmetrische zu sein.

§ 14. **Ein besonderer Fall einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft.** Legt man durch zwei Punkte XY zwei Strahleninvolutionen $x_1x_1' \cdot x_2x_2' \cdot x_3x_3' \cdots$ durch X und $y_1y_1' \cdot y_2y_2' \cdot y_3y_3' \cdots$ durch Y und ordnet diese einander projectivisch zu, so erzeugen die entsprechenden Strahlen eine Curve vierter Ordnung $C^{(4)}$, die von jeder Geraden in vier, von den Geraden durch XY in zwei Punkten getroffen wird, so dass XY Doppelpunkte der Curve sind. Auf jeder Geraden g oder jedem Kegelschnitte γ durch XY liegen vier Punkte von $C^{(4)}$, weil die beiden projectiven Involutionen, die die Büschel (x) (y) auf g bez. γ erzeugen, viermal einen Punkt entsprechend gemein haben. Auf jeder Geraden erzeugen (x) (y) eine zweizweideutige Verwandtschaft (A) (B), in der die den Punkten A entsprechenden Elemente Paare einer Involution sind, und ebenso die den Punkten (B) entsprechenden Elemente Paare einer Involution sind. Nun können zwar die x_1x_1', $x_2x_2' \ldots$ und ebenso die y_1y_1', $y_2y_2' \ldots$ als Individuen von projectiven Kegelschnittbüscheln angesehen werden, aber nicht von Kegelschnittbüscheln, die beide XY zu Grundpunkten haben, und es wird daher nachzuweisen sein, dass die in Rede stehende Verwandtschaft eine zweizweideutige projective in dem hier verstandenen Sinne ist.

Dies nachzuweisen nehmen wir XY zu lateralen Hauptpunkten einer MÖBIUS'schen Verwandtschaft, einen Punkt U von $C^{(4)}$ zum dritten Hauptpunkt. Dann bilden sich die Geraden x_1x_1', x_2x_2', ..., y_1y_1', y_2y_2',... bez. auf gerade Linien ab, $\bar{y}_1\bar{y}_1'$, $\bar{y}_2\bar{y}_2'$, ... durch Y, $\bar{x}_1\bar{x}_1'$, $\bar{x}_2\bar{x}_2'$, ... durch X als Gebilde in Involution. Dem Strahl XU entspricht in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft die Gerade YX und dem Strahl YU ebenfalls die Gerade XY. Die beiden Involutionen $\bar{x}_1\bar{x}_1'$, $\bar{x}_2\bar{x}_2'$, ..., y_1y_1', y_2y_2', ... befinden sich daher in der Lage, die SCHRÖTER im § 3 seiner Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung die halbperspective nennt, und erzeugen, wie SCHRÖTER eben dort erweist, eine gemeine Curve dritter Ordnung. Legt man nun durch XY und

zwei Punkte $\bar{U}'\bar{V}'$ der Curve einen Kegelschnittbüschel $(\bar{\varkappa}')$, und ist $\bar{V}$ der $XY\bar{U}'\bar{V}'$ auf der Curve dritter Ordnung gegenüberliegende Punkt, so wird eben diese Curve durch den Kegelschnittbüschel $(\bar{\varkappa}')$ und einen durch $\bar{V}$ gehenden Strahlenbüschel $(\bar{k})$ erzeugt. Bildet man nun durch die MÖBIUS'sche Verwandtschaft rückwärts ab, so wird aus der Curve dritter Ordnung wieder die Curve $C^{(4)}$, und diese wird durch die $(\bar{k})$ und $(\bar{\varkappa}')$ entsprechenden Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ durch $XYUV$ und $(\varkappa')$ durch $XYU'V'$ erzeugt, wo $VU'V'$ die Bildpunkte zu $\bar{V}\bar{U}'\bar{V}'$ sind. Die Curve $C^{(4)}$ ist demnach eine Curve $M^{(4)}$, und die Verwandtschaft (A) (B) eine zweizweideutig projective[1]). Bestimmen die in einer solchen Verwandtschaft stehenden Büschel (x) (y) auf einer Geraden eine collocale zweizweideutige Beziehung (A) (B), in der die Paare, die den Punkten der Reihe (A) entsprechen und die Paare, die der Reihe (B) entsprechen, einer und derselben Involution angehören, und ist die projective Beziehung zwischen den beiden Involutionen selbst eine involutorische, so kann die Verwandtschaft eine symmetrische sein.

§ 15. **Beziehungen zwischen einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft und einer eben solchen symmetrischen.** — Wir erweisen, dass eine zweizweideutig projective Verwandtschaft mit einer symmetrischen in Correspondenz gesetzt werden kann. Das will sagen: Ist

$$(A) \overset{2,2}{\barwedge} (B),$$

so lassen sich zwei solche Projectivitäten

$$(A) \barwedge (A_1) \qquad (B) \barwedge (B_1)$$

angeben, dass die zweizweideutig projective Verwandtschaft

$$(A_1) \overset{2,2}{\barwedge} (B_1)$$

---

1) Sind $f_1(x)$ $f_2(x)$ ganze Functionen zweiten Grades in x, $f_3(y)$ $f_4(y)$ ebensolche in y, so wird die oben beschriebene Verwandtschaft algebraisch durch die Gleichungen

$$f_1(x) : f_2(x) = f_3(y) : f_4(y)$$

repräsentirt. Die Gleichungen $f_1(x) : f_2(x) = f_1(y) : f_2(y)$ constituiren eine symmetrische Verwandtschaft derselben Art.

eine symmetrische ist. Für eine solche symmetrische Verwandtschaft wollen wir die Bezeichnung

$$(A_1) \overset{2,2}{\sim} (B_1)$$

einführen.

Ist ein Punkt W und eine Gerade w gegeben, so wollen wir zwei Punkte für W und w symmetrisch liegende nennen, wenn sie auf einer Geraden durch W liegen, und durch W und w harmonisch getrennt sind.

Eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ besitzt mindestens einen realen Wendepunkt W, wie bei SCHRÖTER im § 28 der Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung auf projectiv geometrischem Wege erwiesen ist. — In der beistehenden Zeichnung ist dieser reale Wendepunkt als ein unendlich ferner angenommen. —

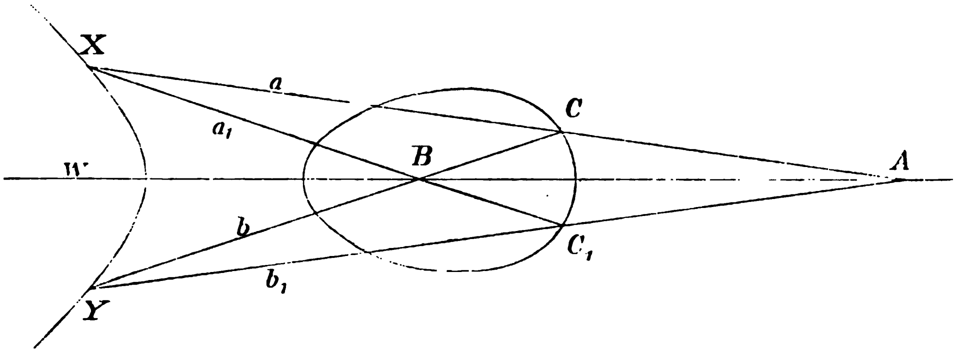


Fig. 2.

Die harmonische Polare von W für $C^{(3)}$ ist eine Gerade w, sie mag die zu W gehörende Symmetrieaxe der Curve $C^{(3)}$ heissen, weil ihre Punkte nach der hier von der Symmetrie gegebenen Definition symmetrisch zu W und w liegen. Projicirt man von zwei symmetrisch zu W und w liegenden Punkten XY der Curve die Punkte C derselben durch die Strahlen (a) (b) nach (A) bez. (B) auf w, und zieht die Geraden (XB) gleich (a_1), (YA) gleich (b_1), so bestimmen diese Strahlen nach bekannten Vierecksätzen Punkte (C_1), die von den Punkten (C) bez. durch W und w harmonisch getrennt sind, also auf $C^{(3)}$ liegen. Folglich bestimmen die Strahlen (a) (b) auf w eine symmetrische zweizweideutig projective Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B).$$

Ist auf einer Geraden eine zweizweideutige projective Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$$

gegeben, so projiciren wir sie von zwei Punkten XY durch Strahlen (a) (b) und erzeugen dadurch eine zur Verwandtschaft gehörende Curve $M^{(4)}$. Alsdann giebt es sechzehn Kegelschnitte durch XY, welche die Curve $M^{(4)}$ in einem Punkte M vierpunktig berühren. Denn bildet man durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft mit den lateralen Doppelpunkten XY und einem Punkte M von $M^{(4)}$ als drittem Hauptpunkte ab, so bildet sich $M^{(4)}$ auf eine Curve $C^{(3)}$ ab, die Kegelschnitte durch XY bilden sich auf Kegelschnitte durch XY ab, unter diesen giebt es (SCHRÖTER, ebene Curven dritter Ordnung § 32, Seite 279, 280) sechzehn, die $C^{(3)}$ in einem Punkte vierpunktig berühren. Bildet man rückwärts ab, so ergiebt sich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes. Giebt es unter den sechzehn Berührungspunkten einen realen P, so nehmen wir diesen statt des oben willkürlich gelassenen Punktes M als dritten Hauptpunkt der MÖBIUS'schen Verwandtschaft an. Dann ist das Bild von $M^{(4)}$ eine Curve $C^{(3)}$, die in dem Punkte W einen Wendepunkt besitzt, in dem die Gerade XY die Curve $C^{(3)}$ neben XY noch trifft. Denn dem $M^{(4)}$ in P vierpunktig berührenden Kegelschnitte λ entspricht nach der MÖBIUS'schen Verwandtschaft eine Gerade l durch den Punkt W, die mit $C^{(3)}$ keinen weiteren Punkt gemein hat, die also eine Wendetangente ist, woraus folgt, dass eben W ein Wendepunkt ist. Die Punkte XY liegen auf einer Geraden durch W, liegen also in Bezug auf W und seine harmonische Polare w symmetrisch. Von ihnen aus werden die Punkte C von $C^{(3)}$ nach Punkten (A) (B) auf w projicirt, die in symmetrisch zweizweideutig projectiver Beziehung zu einander stehen. Bildet man nun durch die MÖBIUS'sche Verwandtschaft rückwärts ab, so findet man, dass die Strahlen (x) (y) durch X und Y die Punkte der Curve $M^{(4)}$ auf eine symmetrische Verwandtschaft

$$(A_1) \overset{2,2}{\sim} (B_1)$$

projiciren, die auf einem $M^{(4)}$ vierpunktig berührenden Kegelschnitte ω liegt. Da aber $(A_1) \overline{\wedge} (A)$ $(B_1) \overline{\wedge} (B)$ ist, so wird hierdurch in der That eine zweizweideutige projective Verwandtschaft mit einer symmetrischen ebensolchen in Correspondenz gesetzt, in dem oben

gegebenen Sinne dieses Ausdruckes. Da eine gleichzeitige Abbildung der Reihen (A) (B) durch dieselbe Projectivität eine symmetrische Verwandtschaft offenbar wieder in eine symmetrische überführt, so ist daraus ersichtlich, dass man eine zweizweideutig projective Verwandtschaft schon dadurch zu einer symmetrischen in Correspondenz setzen kann, dass nur die eine der Reihen (A) (B) durch eine Projectivität in eine andere übergeführt wird, während die andere unverändert bleibt.

Bestimmen die Strahlenbüschel (a) (b) auf einer Geraden eine zweizweideutig projective Verwandtschaft (A) (B), erzeugen also eine Curve $M^{(4)}$, so kann man die Gerade von den Doppelpunkten aus auf eine andere projiciren, die mit $M^{(4)}$ einen realen Punkt gemein hat, also kann man die Verwandtschaft (A) (B) mit einer andern in Correspondenz setzen, die einen realen Doppelpunkt hat. Es beschränkt daher die Allgemeinheit der Untersuchung nicht, wenn wir annehmen, die Verwandtschaft (A) (B) besitze einen realen Doppelpunkt D.

Nun ist es freilich nicht nöthig, dass ein realer Punkt P existirt, in dem ein durch XY gehender Kegelschnitt $M^{(4)}$ vierpunktig berührt. Um die Realitätsverhältnisse näher zu untersuchen, bilden wir durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft mit den lateralen Hauptpunkten XY und dem Doppelpunkt D der zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft als drittem Hauptpunkte noch einmal alles ab, $M^{(4)}$ auf eine Curve $C^{(3)}$, die Gerade g, den Träger der Verwandtschaft (A) (B) auf eine Gerade, und richten unser Augenmerk auf die Punkte, in denen $C^{(3)}$ von einem durch XY gehenden Kegelschnitte vierpunktig berührt wird. Wir müssen deshalb auf die Methode eingehen, die zur Auffindung der Berührungspunkte dient. — Die Gerade XY treffe $C^{(3)}$ noch in E. Von E zieht man eine Tangente an $C^{(3)}$, es giebt deren vier, von einem Berührungspunkte zieht man wieder eine Tangente an $C^{(3)}$, es giebt deren wieder vier, der Berührungspunkt ist ein Punkt P, es giebt deren sechzehn.

Sind die Verzweigungselemente der Verwandtschaft (A) (B) auf g und also die Verzweigungselemente der Verwandtschaft $(\bar{A})$ $(\bar{B})$ auf $\bar{g}$, in die die Gerade g durch die MÖBIUS'sche Abbildung übergeführt wird, alle reale, sowohl die der Reihe $(\bar{A})$, als auch die der Reihe $(\bar{B})$, so liegen XY auf dem unpaaren Zuge von $C^{(3)}$, die in diesem Falle

eine zweizügige Curve ist, denn nur von den Punkten des unpaaren Zuges aus giebt es vier reale Tangenten an die Curve, und E als Schnittpunkt von XY mit $C^{(3)}$ liegt auch auf dem unpaaren Zuge. Von E giebt es vier reale Tangenten an $C^{(3)}$, zwei berühren $C^{(3)}$ auf dem paaren, zwei auf dem unpaaren Zuge. Die Tangenten von den letzteren an $C^{(3)}$ sind reale und liefern acht reale Punkte P.

Giebt es in der Reihe der (A) zwei reale und zwei aggregirt ideale Verzweigungselemente, so ist $C^{(3)}$ einzügig, es giebt von X aus zwei reale und zwei ideale Tangenten an $C^{(3)}$, und da Y auf demselben dem einen realen Zuge liegen muss, so giebt es auch von Y aus zwei reale und zwei ideale Tangenten, so dass auch von den Verzweigungselementen der Reihe B zwei real und zwei aggregirt ideal sind. — Dies giebt nebenbei den Satz: Sind in einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft von den Verzweigungselementen der einen Reihe zwei real, zwei aggregirt ideal, so verhält es sich mit den Verzweigungselementen der andern Reihe ebenso. — Die Gerade XY trifft $C^{(3)}$ in E, und von E giebt es zwei reale und zwei ideale Tangenten, also zwei reale Berührungspunkte. Von den ersteren giebt es je zwei reale und je zwei aggregirt ideale Tangenten an $C^{(3)}$, und es giebt daher im Ganzen vier reale Punkte P.

Sind die Verzweigungselemente in der Reihe der (A) und in der Reihe der (B) sämmtlich ideale, natürlich zu Paaren aggregirt ideale, so ist $C^{(3)}$ zweizügig, und XY liegen auf dem paaren Zuge, E auf dem unpaaren, es giebt dann wieder acht reale Punkte P.

Sind die Verzweigungselemente in A reale, in B ideale, so liegt der Punkt X auf dem unpaaren, Y auf dem paaren Zuge von $C^{(3)}$, und E liegt deshalb auf dem paaren Zuge, es giebt von E keine realen Tangenten an $C^{(3)}$, und es giebt in diesem Falle keine realen Punkte P.

Sind in einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft die Verzweigungselemente der einen Reihe sämmtlich reale, die der anderen paarweise aggregirt ideale, so lässt sich die Verwandtschaft vom projectiv geometrischen Standpunkte aus nicht mit einer symmetrischen in Correspondenz in dem oben definirten Sinne setzen, wie sich a priori voraussehen liess. Denn in einer symmetrischen Verwandtschaft müssen die Verzweigungselemente der einen Reihe zugleich die Verzweigungselemente der andern Reihe sein, was nicht

möglich ist, wenn sich in ihnen nicht gleich viele ideale und gleich viele reale vorfinden, und durch reale Projection können reale und ideale Elemente nicht zur Deckung gebracht werden. In der analytischen Geometrie kann man auch lineare Gleichungen mit imaginären Coefficienten zur Definition einer Projectivität zulassen, von diesem Standpunkte würde auch im letzteren Falle nur realer Verzweigungselemente in der einen und nur idealer in der anderen Elementenreihe eine zweizweideutige Verwandtschaft mit einer symmetrischen in Correspondenz gesetzt werden können.

Da also die Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$$

durch Projectivitäten

$$(A) \overline{\wedge} (A_1) \qquad (B) \overline{\wedge} (B_1)$$

mit einer symmetrischen Verwandtschaft

$$(A_1) \overset{2,2}{\sim} (B_1)$$

in Correspondenz gesetzt werden kann, und in letzterer die Verzweigungselemente der einen Reihe mit denen der andern Reihe zusammenfallen, so folgt daraus, dass die Verzweigungselemente der Reihe (A) und die der Reihe (B) einander projectiv zugeordnet werden können. Dass dies wenn auf eine, so auf vier verschiedene Weisen geschehen kann, folgt aus elementaren Sätzen der Lehre von den projectiven Verwandtschaften. Aber der gegebene Beweis dieses Satzes enthält eine Lücke, indem er den Fall nicht mit einschliesst, dass die Verzweigungselemente der (A) sämmtlich reale, die der B sämmtlich ideale sind. Um den Satz für diesen Fall zu erweisen, projicirt man die Verwandtschaft (A) (B) von zwei Punkten XY aus, die mit dem Doppelpunkte D der zweizweideutig projectiven Verwandtschaft in einer Geraden liegen. Die Projectionsstrahlen erzeugen eine Curve $C^{(3)}$, und die Tangentenquadrupel von XY an $C^{(3)}$ sind einander nach einem bekannten Satze projectiv zugeordnet (Schröter, Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung § 13. 3). — Derselbe Satz lehrt, dass die verschiedenen zweizweideutigen Verwandtschaften, die man erhält, wenn man eine Curve dritter Ordnung von zwei Punkten XY und zwei anderen $X_1 Y_1$ der Curve aus projicirt, Verzweigungselemente besitzen, die einander projectiv zugeordnet werden können.

§ 16. **Erzeugung einer Curve $M^{(4)}$ durch einen Kegelschnittbüschel und einen ihm projectiv zweizweideutig zugeordneten Strahlenbüschel. Bedingung für das Zerfallen einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft.** — Erzeugen zwei Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ durch $XYUV$ und $(\varkappa')$ durch $XYU'V'$, die projectiv auf einander bezogen sind, eine Curve vierter Ordnung $M^{(4)}$, so stehen die die Punkte $M^{(4)}$ projicirenden Strahlen (x) durch X und die Kegelschnitte $(\varkappa)$ in zweizweideutiger Beziehung zu einander, d. h. die Polaren (q) eines Punktes Q für $(\varkappa)$ und die Strahlen (x) erzeugen eine Curve $\overline{M}^{(4)}$, oder (x) und (q) stehen zu einander in zweizweideutig projectiver Beziehung. — Bilden wir durch eine MÖBIUS'sche Verwandtschaft mit XY als lateralen und U als drittem Hauptpunkt ab, so geht $(\varkappa)$ in den linearen Büschel $(\overline{k})$ durch den Bildpunkt $\overline{V}$ von V über, $M^{(4)}$ in $C^{(3)}$, diese Curve dritter Ordnung wird durch den Strahlenbüschel $(\overline{k})$ und den $(\varkappa')$ in der MÖBIUS'schen Verwandtschaft entsprechenden Kegelschnittbüschel $(\overline{\varkappa}')$ erzeugt. Die Geraden (x) durch X bilden sich auf gerade Linien $(\overline{y})$ durch Y ab. Die Strahlen $(\overline{k})$ und die Strahlen $(\overline{y})$ aber stehen zu einander in projectiv zweizweideutiger Beziehung, weil $C^{(3)}$ mit (XY) zusammen als eine Curve vierter Ordnung mit XY als Doppelpunkten anzuzusehen ist.

Die Polaren (q) von Q für die Kegelschnitte des Büschels $(\varkappa)$ sind diesen Kegelschnitten und mithin $(\overline{k})$ projectiv und es ist

$$(q)\,\overline{\wedge}\,(\overline{k})\,\overset{2,2}{\overline{\wedge}}\,(\overline{y})\,\overline{\wedge}\,(x)\,, \qquad (q)\,\overset{2,2}{\overline{\wedge}}\,(x)\,, \qquad (\varkappa)\,\overset{2,2}{\overline{\wedge}}\,(x)\,,$$

w. z. b. w. Dieser Beweis bedarf jedoch der Ergänzung, wenn UV aggregirt ideale Punkte sind. — Wird $M^{(4)}$ durch zwei Büschel $(\varkappa)(\varkappa')$ erzeugt, deren Grundpunkte XY und bez. UV, $U'V'$ sind, wo UV, $U'V'$ Paare aggregirt idealer Punkte sind, so kann man, wie wir oben sahen, $M^{(4)}$ auch durch projective Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ $(\varkappa_1')$ erzeugen, von denen $(\varkappa_1')$ die realen Grundpunkte $XYU_1'V_1'$ hat. Dann ist nach dem eben erwiesenen Satze $(x)\,\overset{2,2}{\overline{\wedge}}\,(\varkappa_1')$, wenn sich die (x) und $(\varkappa_1')$ auf $M^{(4)}$ schneiden, und weiter ist $(\varkappa_1')\,\overline{\wedge}\,(\varkappa)$, folglich ist auch in diesem Falle $(x)\,\overset{2,2}{\overline{\wedge}}\,(\varkappa)$.

Im Allgemeinen erzeugen ein Strahlenbüschel und ein Kegelschnittbüschel, die einander zweizweideutig zugeordnet sind, eine

Curve sechster Ordnung. Der Kegelschnitt $(XU) \cdot (XV)$ des Büschels $(\varkappa)$ aber trifft $M^{(4)}$ in zwei Punkten, von denen einer auf (XU) liegt. Der zugehörige Strahl (x) also (XU) fällt ganz in den Kegelschnitt, und jeder Punkt von (XU) gehört zur Curve, die durch (x) $(\varkappa)$ erzeugt wird. Ebenso gehört der Strahl (XV) zu ihr. Es spalten sich also hier von der Curve sechster Ordnung die geraden Linien (XU) (XV) ab, der Rest ist $M^{(4)}$.

Zerfällt eine zweizweideutige projective Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\wedge} (B)$ in zwei eineindeutige, so zerfällt die zugehörige Curve $M^{(4)}$ in zwei Kegelschnitte durch XY. Es giebt dann nur zwei Verzweigungselemente in der Reihe der (A) und zwei in der Reihe der (B). Der Strahl x nämlich, der durch einen der beiden Punkte geht, die die beiden Kegelschnitte neben XY noch gemein haben, ist ein Verzweigungsstrahl, es giebt deren in jeder Reihe zwei und nur zwei. Zugleich aber ist das dem Verzweigungselemente A zugeordnete Element B ein Verzweigungselement der zweiten Reihe. Umgekehrt ist es auch eine hinreichende Bedingung für das Zerfallen einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft in zwei eineindeutige, dass zwei Verzweigungselementen der einen Reihe je ein Verzweigungselement der anderen Reihe entspricht. Ist nämlich A ein Verzweigungselement der ersten Reihe und das ihm entsprechende zugeordnete Element B ein Verzweigungselement der andern Reihe, so ist (XA) Tangente an $M^{(4)}$ und (YB) ebenfalls. Der Schnittpunkt dieser Strahlen ist ein Punkt, durch den zwei gerade Linien gehen, auf denen neben X und Y nur noch ein Punkt der Curve $M^{(4)}$ liegt, ihr Schnittpunkt ist demnach ein Doppelpunkt von $M^{(4)}$. Kommt dies zweimal vor, so besitzt $M^{(4)}$ mit XY zusammen vier Doppelpunkte und muss deshalb in zwei Kegelschnitte durch diese vier Punkte zerfallen, und demnach zerfällt die Verwandtschaft in zwei eineindeutige oder projective.

§ 17. **Der Directionsbüschel. Eine einzweideutige Punktgeradenverwandtschaft.** — Projicirt man eine zweizweideutige projective Verwandtschaft von zwei Punkten XY aus auf einen durch sie gehenden Kegelschnitt ω, erzeugt dort die Punktreihen (A) (B), die natürlich in zweizweideutig projectiver Beziehung zu einander stehen, und verbindet die Paare entsprechender Punkte (AB) durch gerade Linien (m), so erhält man einen Strahlenbüschel $m^{(4)}$, den wir den

Directionsbüschel der Verwandtschaft nennen wollen. WEYR nennt in seiner Curvenlehre (Wien 1880) auf Seite 6 die von dem Büschel umhüllte Curve, die Stützcurve des Büschels, die Directionscurve. Dass eine solche Curve existire, ist vom Standpunkte der projectiven Geometrie nicht von vornherein klar.

Durch einen beliebigen Punkt P gehen vier Strahlen des Büschels $m^{(4)}$, denn ein durch P gehender Strahlenbüschel bestimmt auf ω eine Involution, und diese hat nach § 13 vier Paare mit der Verwandtschaft (A) (B) gemein. Aus diesem Grunde wird der Büschel $m^{(4)}$ ein Büschel vierter Ordnung genannt.

Ist AB ein Paar der Verwandtschaft auf ω, und $M^{(4)}$ die Curve, die die von XY aus projicirte auf ω liegende Verwandtschaft erzeugt, so ist der Schnittpunkt M von (XA) (YB) ein Punkt der Curve, und t mag die Tangente in M an $M^{(4)}$ sein. Ein Kegelschnittbüschel (γ) werde durch $XYMM$ bestimmt, d. h. durch die drei Punkte XYM und die Tangente t in M. Die Strahlen (XB) (YA) mögen sich in M' schneiden, und γ sei der Kegelschnitt des Büschels (γ) der durch M' geht. Dann bestimmen die von XY nach den Punkten von γ gezogenen Strahlen eine Involution auf ω, weil sie projective Punktreihen bestimmen, in denen AB ein involutorisches Paar ist. Diese Involution berührt nach § 13 die zweizweideutige Verwandtschaft im Paare AB, d. h. sie hat ausser diesem nur noch zwei Paare mit der Verwandtschaft gemein. Das auf der Geraden (AB) liegende Centrum P dieser Involution hat die Eigenschaft, dass durch P nur drei Strahlen von $m^{(4)}$ gehen. Diesen Punkt nennt man den Stützpunkt des Strahles m oder (AB) im Büschel $m^{(4)}$.

Die Verwandtschaft (A) (B) besitzt zwei involutorische Paare, ihre Verbindungslinien seien xy. Durch jeden Punkt von P auf x oder y gehen nur noch zwei Strahlen von $m^{(4)}$. Denn unter den vier Paaren, die die durch P auf ω bestimmte Involution mit der Verwandtschaft gemein hat, befinden sich die beiden Paare AB und BA, wenn AB ein involutorisches Paar ist. Demnach sind die Strahlen xy des Büschels $m^{(4)}$ als Doppelstrahlen desselben zu bezeichnen.

Ist die Verwandtschaft (A) (B) eine symmetrische, so sind alle Paare involutorische, und es gehen daher durch jeden Punkt P nur zwei Strahlen des Directionsbüschels, der Büschel $m^{(4)}$ besteht dann

aus einem Büschel zweiter Ordnung, der doppelt zu zählen ist. Es wird zu beweisen sein, dass dieser Büschel sich auf einen Kegelschnitt stützt. In der analytischen Geometrie würde es allerdings selbstverständlich sein, dass ein auf algebraischem Wege erzeugter Büschel zweiter Ordnung eine Stützcurve besitzt, die ein Kegelschnitt ist. In der projectiven Geometrie fehlen ähnliche Schlussmethoden, und es ist demnach eine Untersuchung nöthig, den in Rede stehenden Satz im vorliegenden Falle zu erweisen, was nachher geschieht.

Die Beziehung, die zwischen $M^{(4)}$ und $m^{(4)}$ besteht, ist im Grunde die einer einzweideutigen Punktgeradenverwandtschaft, der wir einige Betrachtungen widmen. — Projicirt man von zwei Punkten XY eines durch sie gehenden Kegelschnittes ω die Punkte L der ω enthaltenden Ebene, und verbindet die Punkte, die die Projectionsstrahlen auf ω bestimmen, durch gerade Linien l, so wird dadurch eine Zuordnung zwischen den Punkten L und den Geraden l hergestellt, die im Allgemeinen eine einzweideutige ist. Jedem Punkte L entspricht eine Gerade l, nur den Punkten XY entsprechen unendlich viele gerade Linien. Trifft die Gerade XX, d. h. eine beliebige Gerade durch X, ω in Q und der Strahl YX den Kegelschnitt in X, so ist QX die zu X gehörende Gerade l, es entspricht also X jede Gerade durch X als Gerade l, und Y entspricht jede Gerade durch Y als Gerade l. Einem Punkte von ω entspricht die Tangente an ω in diesem Punkte.

Umgekehrt entsprechen jeder Geraden l zwei Punkte L, und es liegt von diesen Punkten einer innerhalb, der andere ausserhalb ω, wenn l ω real trifft, sie fallen zusammen, wenn l Tangente ist, sie sind ideale, wenn l ω nicht real trifft, es lässt sich in diesem Falle eine reale Gerade angeben, auf der sie liegen. Einer Geraden durch X entspricht der Punkt X und ein Punkt auf der Tangente von ω in X, jeder Geraden durch Y entspricht der Punkt Y und ein Punkt auf der Tangente in Y. Der Geraden (XY) entspricht jeder Punkt dieser Geraden und der Pol dieser Geraden in Bezug auf ω.

Durchläuft L eine Gerade g, so bestimmen die Schnittpunkte der die Punkte L von XY aus projicirenden Strahlen auf ω projective Punktreihen, die zugehörigen Geraden l stützen sich daher auf einen Kegelschnitt, der ω in den beiden Punkten berührt, in denen g ω trifft. Durchläuft ω einen durch XY gehenden Kegelschnitt γ,

so stützen sich die Geraden l ebenfalls auf einen Kegelschnitt, der ω in den Schnittpunkten von γ mit ω berührt.

Liegen zwei Punkte MM' so, dass (XM) (YM) auf ω durch zwei Punkte AB, und (XM') (YM') auf ω durch dieselben Punkte AB gehen, so sagen wir, die Punkte MM' liegen symmetrisch in Bezug auf XY und ω.

Enthält ein Kegelschnitt durch XY zwei symmetrisch zu XY und ω liegende Punkte, so giebt es zu jedem Punkte auf ihm einen symmetrisch liegenden, weil die Projectionsstrahlen von XY nach den Punkten von γ auf ω eine Involution bestimmen. Jede Curve von dieser Eigenschaft soll eine symmetrisch zu ω und XY liegende Curve heissen. Die Geraden l, die den Punkten einer symmetrisch zu XY und ω liegenden Geraden, oder eines ebenso liegenden Kegelschnittes entsprechen, gehen durch einen Punkt, bilden einen linearen Büschel, der doppelt durchlaufen wird, wenn L die Gerade oder den Kegelschnitt durchläuft.

Geht eine Gerade g durch X, so entsprechen den Punkten L auf ihr Strahlen eines linearen Büschels mit dem Schnittpunkt (ωg) als Träger, dazu kommt noch der lineare Strahlenbüschel mit dem Träger X, dessen Strahlen dem Punkte X entsprechen. Ebenso entsprechen einer Geraden durch Y die Strahlen zweier linearen Strahlenbüschel, so jedoch, dass dem mit dem Träger Y der Punkt Y allein entspricht.

§ 18. **Symmetrische Curven $M^{(4)}$.** — Ist W ein Wendepunkt einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, w seine harmonische Polare, also eine Gerade, und sind XY, ST je ein Paar symmetrisch zu W und w gelegene Punkte von $C^{(3)}$, so trifft der Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $XYST$ die Curve $C^{(3)}$ in symmetrisch zu W und w gelegenen Punkten. Denn trifft ein Individuum dieses Kegelschnittbüschels $C^{(3)}$ in einem Punkte C, so enthält dieser Kegelschnitt, weil W und w Pol und Polare für ihn sind, auch den symmetrisch zu C gelegenen Punkt C', der ein Punkt von $C^{(3)}$ ist, weil $C^{(3)}$ symmetrisch zu W und w liegt. Durch MÖBIUS'sche Abbildung kann man zu einem entsprechenden Satze über Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten gelangen, der indessen ebenso leicht direct erwiesen wird.

Erzeugt eine Curve $M^{(4)}$ mit den Doppelpunkten XY auf einem durch XY gelegten Kegelschnitte ω eine symmetrische zweizweideutige

Verwandtschaft, so liegen die Punkte von $M^{(4)}$ paarweise symmetrisch zu XY und ω, wie diese Symmetrie im vorigen Paragraphen definirt wurde. Sind UV zwei symmetrisch gelegene Punkte derselben, so trifft jeder Kegelschnitt des Büschels $(XYUV)$ die Curve $M^{(4)}$ in symmetrisch gelegenen Punkten. Denn enthält ein solcher Kegelschnitt den Punkt M von $M^{(4)}$, so enthält er auch den symmetrisch dazu gelegenen M'. Da nämlich jeder Kegelschnitt des Büschels das Paar symmetrisch gelegener Punkte UV enthält, so enthält er, wie schon früher erwiesen wurde, zu jedem seiner Punkte den symmetrischen.

Liegen zwei Punkte zu XY und ω symmetrisch, so geht ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt, nämlich den Pol von XY für ω, oder wenn für ω eine Gerade eintritt, durch den Punkt, der vom Schnittpunkte dieser Geraden mit der Geraden (XY) durch XY harmonisch getrennt ist.

Sind vier symmetrisch zu XY und ω liegende Paare von Punkten gegeben, so sind sie associirte Punkte, eine Curve $M^{(4)}$ ist durch sie nicht völlig bestimmt. Denn liegen drei Punktepaare von $M^{(4)}$ symmetrisch, so giebt es zu jedem Punkte auf ihr einen symmetrisch gelegenen, und folglich sind die acht Punkte nicht unabhängig von einander. Durch fünf Paare oder durch fünf Punkte und die Bedingung, dass $M^{(4)}$ zu XY und ω symmetrisch liegen soll, ist diese Curve bestimmt. Legt man durch ein symmetrisches Paar $M_1 M_1'$ und XY einen Kegelschnittbüschel, durch $M_2 M_2' XY$ einen zweiten, so bestimmen die drei weiteren Punkte $M_3 M_4 M_5$ eine projective Beziehung zwischen ihnen, die beiden projectiven Kegelschnittbüschel bestimmen die symmetrische Curve $M^{(4)}$. Daraus folgt: Eine zweizweideutige projective symmetrische Verwandtschaft ist durch fünf Paare von Elementen bestimmt.

Hat die zu XY und ω symmetrisch liegende Curve $M^{(4)}$ einen Doppelpunkt, so hat sie noch einen zweiten, die zugehörige Verwandtschaft zerfällt in zwei Involutionen. Liegt aber der Doppelpunkt auf ω, so ist dies nicht nöthig, das zugehörige Paar der Verwandtschaft auf ω ist dann ein Doppelpunkt derselben.

§ 19. **Der Directionsbüschel einer symmetrischen Verwandtschaft stützt sich auf einen Kegelschnitt.** — Es sei ω der Träger der symmetrischen zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B),$$

in der AB, A_1B_1, A_2B_2, ... Paare sind. Sie bestimmen von zwei Punkten XY des Kegelschnittes aus projicirt eine zu XY und ω symmetrisch liegende Curve $M^{(4)}$. Die Geraden (AB) (A_1B_1), die gleichzeitigen Directionsstrahlen der Punkte SS', M_1M_1' sind die Polaren der Punkte ZZ_1, die die Geraden (SS'), (M_1M_1') auf der Geraden (XY) gleich p bestimmen, in Bezug auf den Kegelschnitt λ_1, der durch

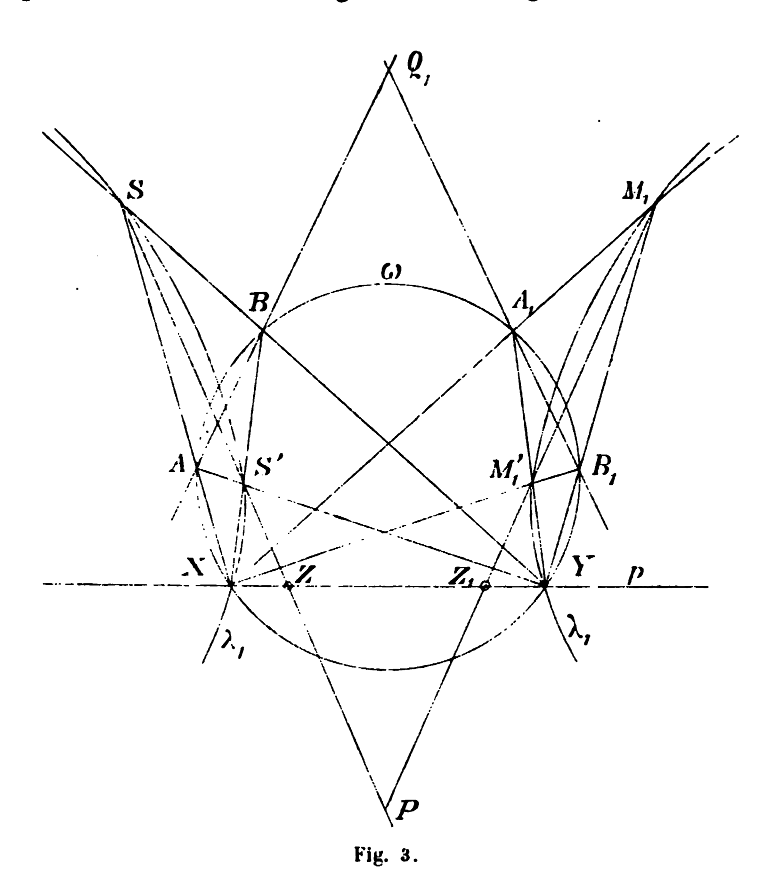


Fig. 3.

$XYSS'M_1M_1'$ geht. Denn man findet einen Punkt der Polare von Z für λ_1, indem man die Secanten ZXY, ZSS' zieht, S mit X, S' mit Y verbindet, der Schnittpunkt A dieser Geraden ist ein Punkt der Polare. Der Schnittpunkt von (SY) mit $(S'X)$, also der Punkt B, ist ein zweiter Punkt dieser Polare, (AB) ist die Polare von Z, (A_1B_1) die von Z_1. Der Schnittpunkt Q_1 von (AB) und (A_1B_1) ist der Pol von p für λ_1 als der Schnitt der Polaren zweier Punkte von p.

Geht man nun vom Punktepaare $M_1 M_1'$ der Curve $M^{(4)}$ zu andern symmetrisch gelegenen Paaren $M_2 M_2'$, $M_3 M_3'$, ... der Curve über, so geht der Kegelschnitt λ_1 der Reihe nach in die Kegelschnitte $\lambda_2 \lambda_3$ ... eines Büschels durch $XYSS'$ über, die Geraden $(A_1 B_1)$ $(A_2 B_2)$ $(A_3 B_3)$ ... bestimmen auf (AB) die Punktreihe $Q_1 Q_2 Q_3$ ..., die Pole der Geraden p für $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ..., die den Kegelschnitten des Büschels $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ... projectiv zugeordnet sind.

Ist TT' ein neues symmetrisches Paar von $M^{(4)}$, so bestimmt es mit $M_1 M_1'$, $M_2 M_2'$, $M_3 M_3'$, ... einen Kegelschnittbüschel $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ ... und die Pole der Geraden p für die Individuen dieses Büschels sind die Punkte $R_1 R_2 R_3$ ..., die die Geraden $(A_1 B_1)$ $(A_2 B_2)$ $(A_3 B_3)$ ... auf der Geraden (CD) bestimmen, wenn CD das Paar der symmetrischen Verwandtschaft auf ω ist, das zu T und also auch zu T' gehört, in denen also die Strahlen (XT) (YT) die Curve ω treffen. Diese Punkte sind den Kegelschnitten $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ ... projectiv zugeordnet, und da $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \overline{\wedge}\, \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots$ ist, so muss $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots \overline{\wedge}\, R_1 R_2 R_3 \ldots$ sein. Es bestimmen demnach die Directionsstrahlen $(A_1 B_1)$ $(A_2 B_2)$ $(A_3 B_3)$ ... auf zweien unter ihnen, auf (AB) und (CD) projective Punktreihen, ihre Stützcurve ist deshalb ein Kegelschnitt. Die Stützcurve des Directionsbüschels einer symmetrischen zweizweideutigen Verwandtschaft ist ein Kegelschnitt.

Wir wollen den Beweis noch ein wenig anders führen. — Bildet man die symmetrisch zu XY und ω gelegene und durch die zu XY und ω symmetrisch gelegenen Kegelschnitte $(\varkappa)$ durch $XYSS'$ und $(\varkappa')$ durch $XYTT'$ erzeugte Curve $M^{(4)}$ nach § 17 durch die auf $XY\omega$ gegründete einzweideutige Punktgeradenverwandtschaft ab, so entspricht jedem Kegelschnitte $\varkappa$ ein linearer Strahlenbüschel, dessen Centrum auf der Geraden (AB) liegt, wenn AB durch die Strahlen (XS) (YS) auf ω bestimmt werden. Die Curven $(\varkappa')$ bilden sich auf lineare Strahlenbüschel ab, deren Centren auf (CD) liegen, wenn CD durch (XT) (YT) auf ω bestimmt sind. Auf einer Geraden durch X bilden die Kegelschnitte $(\varkappa)$ ihnen projective Punktreihen, ihnen entsprechen in der Verwandtschaft des § 17 projective Strahlen durch einen Punkt, diese gehen durch die Involutionscentren. Die Involutionscentren sind also den Kegelschnitten $(\varkappa)$ projectiv zugeordnet. Dasselbe gilt von dem Büschel $(\varkappa')$, seine Individuen entsprechen den ihnen zugeordneten Involutionscentren auf (CD) projectiv.

Die Verbindungslinien entsprechender Involutionscentren sind die Directionsstrahlen der Punkte, in denen sich die einander projectiv entsprechenden, $M^{(4)}$ erzeugenden Kegelschnitte der Büschel $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ schneiden, sie sind die Directionsstrahlen der Paare der gegebenen symmetrischen Verwandtschaft, und da die Involutionscentren einander projectiv zugeordnet sind, so stützen sich die Directionsstrahlen auf einen Kegelschnitt.

Die Umkehrung dieses Satzes beweisen wir indirect. — Treffen die Strahlen eines Büschels zweiter Ordnung den Kegelschnitt ω in den Punktepaaren AB, CD, A_1B_1, A_2B_2, ..., so erzeugen sie dadurch auf ω eine zweizweideutige symmetrische projective Verwandtschaft. Projicirt man die Paare AB, BA, CD, DC, A_1B_1, B_1A_1, A_2B_2, ... von zwei Punkten XY auf ω, so erhält man Punktepaare SS', TT', M_1M_1', M_2M_2', ... die in Bezug auf XY und ω symmetrisch liegen. Legt man durch $XYSS'$ einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$, durch $XYTT'$ einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa')$ und bestimmt zwischen diesen Büscheln eine projective Verwandtschaft, indem man die durch $M_1M_2M_3$ gehenden Kegelschnitte $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$, $\varkappa_1'\varkappa_2'\varkappa_3'$ dieser Büschel einander entsprechen lässt, so erzeugen $(\varkappa)$ $(\varkappa')$ eine Curve $M^{(4)}$, die auch die Punkte $M_1'M_2'M_3'$ enthält und auf der zu jedem Punkte M auch der symmetrische M' liegt. Diese Curve $M^{(4)}$ bestimmt auf ω eine zweizweideutige Verwandtschaft, deren Directionsbüschel ein gemeiner Büschel zweiter Ordnung ist, und der mit dem gegebenen fünf Strahlen, (AB) (CD) (A_1B_1) (A_2B_2) (A_3B_3), gemein hat, also ganz mit ihm zusammenfällt. Die Strahlen desselben bestimmen daher auf ω eine zweizweideutige projective Verwandtschaft, w. z. b. w.

Die Vervollständigung einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft, von der fünf Paare gegeben sind, ist hiernach sehr einfach. Man projicirt die Verwandtschaft auf einen Kegelschnitt ω, bestimmt aus den gegebenen fünf Paaren den Directionsbüschel zweiter Ordnung und den Kegelschnitt, der seine Stützcurve ist. Die Tangenten dieses Kegelschnittes bestimmen beliebig viele weitere Paare, und um zu einem gegebenen Punkte seine entsprechenden zu finden, zieht man von ihm die Tangenten an jenen Kegelschnitt, die Schnittpunkte derselben mit ω sind die gesuchten.

Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung hat mit dem Directionsbüschel $m^{(4)}$ einer zweizweideutigen

projectiven Verwandtschaft nicht mehr als acht Strahlen gemein.

Die Verwandtschaft liege auf dem Kegelschnitte ω und erzeuge einerseits durch die sie von den Punkten XY des Kegelschnittes aus projicirenden Strahlen eine Curve $M^{(4)}$ und andrerseits durch die Verbindungslinien der Paare der Verwandtschaft den Directionsbüschel $m^{(4)}$. Der gegebene Strahlenbüschel zweiter Ordnung erzeugt auf ω eine symmetrische Verwandtschaft, und diese von XY aus projicirt eine Curve $\overline{M}^{(4)}$, die symmetrisch zu XY und ω gelegen ist. $M^{(4)}$ und $\overline{M}^{(4)}$ können sich, wenn sie nicht ganz zusammenfallen oder zerfallen, nur in acht Punkten schneiden, und der Directionsbüschel und der gegebene Büschel zweiter Ordnung können nur acht Strahlen, die jenen acht Punkten nach der Verwandtschaft des § 17 entsprechen, gemein haben. Geht $\overline{M}^{(4)}$ durch die zwei Paare symmetrisch zu XY und ω auf $M^{(4)}$ gelegenen Punkte, d. h. enthält der Büschel zweiter Ordnung die beiden Strahlen xy von $m^{(4)}$, welche die involutorischen Paare der zweizweideutigen Verwandtschaft verbinden, so hat der Büschel neben diesen beiden Strahlen nur noch vier mit $m^{(4)}$ gemein. Ist die zweizweideutige Verwandtschaft eine symmetrische, so hat selbstverständlich der gegebene Büschel zweiter Ordnung nur vier Strahlen mit ihrem Directionsbüschel gemein, die doppelt zu zählen sind, wenn der allgemeine Satz aufrecht erhalten werden soll.

§ 20. **Erzeugung einer Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten durch einen Strahlenbüschel und einen Büschel von Curven dritter Ordnung.** — Die Curve $M^{(4)}$ sei durch die projectiven Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ durch $XYUV$ und $(\varkappa')$ durch $XYU'V'$ erzeugt. Durch X legen wir eine Gerade g, auf ihr bestimmen die Kegelschnitte $(\varkappa)$ eine ihnen projective Punktreihe (E). Ziehen wir nach ihnen von Y aus die geraden Linien (y_g), so ist $(y_g) \barwedge (E)$ und also $(y_g) \barwedge (\varkappa)$ und $(y_g) \barwedge (\varkappa')$. Die beiden Gebilde (y_g) und $(\varkappa')$ erzeugen eine Curve dritter Ordnung $C_g^{(3)}$, die in Y einen Doppelpunkt hat und durch $XU'V'$ und zwei andere von g unabhängige Punkte $M_u M_v$ geht. Der Punkt E auf g, der der Schnittpunkt von (YU) und g ist, bestimmt in $(\varkappa)$ den zerfallenden Kegelschnitt $(YU) \cdot (XV)$, ihm entspricht in $(\varkappa')$ ein Kegelschnitt $\varkappa'_u$. Der Punkt auf M_u, in dem (YU) von $\varkappa'_u$ getroffen wird, liegt auf $C_g^{(3)}$ und ebenso liegt der Punkt M_v, in dem YV von dem dem zerfallenden Kegelschnitt $(YV) \cdot (XU)$ der

Reihe $(\varkappa)$ entsprechenden $\varkappa'_e$ der Reihe $(\varkappa')$ getroffen wird, auf $C_g^{(3)}$, und es sind diese beiden Punkte unabhängig von g. Curven dritter Ordnung, die einen Doppelpunkt gemein haben, schneiden sich ausser in diesem noch in fünf Punkten, und die durch die fünf Schnittpunkte gehenden Curven bilden einen Büschel. Die Schnittpunkte von $C_g^{(3)}$ mit g sind Punkte von $M^{(4)}$. Denn fällt der Punkt E von g auf einen Punkt M von $M^{(4)}$, so entspricht in der Projectivität $(y_g) \barwedge (\varkappa)$ der Strahl (YM) dem durch M in $(\varkappa)$ bestimmten Kegelschnitte $\varkappa_m$, und dieser dem durch M in $(\varkappa')$ gehenden Kegelschnitte $\varkappa'_m$, in der Projectivität $(y_g) \barwedge (\varkappa')$ entsprechen sich demnach (YM) und $\varkappa'_m$, sie treffen sich in M, der Punkt M liegt auf $C_g^{(3)}$. Lässt man die Gerade g sich um X drehen, so erhält man einen Büschel von Curven $C_g^{(3)}$, und die einander entsprechenden Geraden (g) und Curven $(C_g^{(3)})$ erzeugen die Curve $M^{(4)}$.

Um zu einem gegebenen Strahle l durch Y den Kegelschnitt $\varkappa'_{gl}$ des Büschels $(\varkappa')$ zu finden, der bei gegebenem g mit l einen Punkt von $C_g^{(3)}$ bestimmt, verfährt wie man folgt. Der Punkt L, in dem l g trifft, bestimmt einen Kegelschnitt $\varkappa_{gl}$ des Büschels $(\varkappa)$, dem ein Kegelschnitt $\varkappa'_{gl}$ in der Reihe der $(\varkappa')$ gemäss der Projectivität $(\varkappa) \barwedge (\varkappa')$ entspricht, er ist der gesuchte. Fällt l auf die Gerade (XY) gleich p, so ist $\varkappa_{gp}$ der Kegelschnitt, der g in X berührt, der ihm in der Reihe $(\varkappa')$ entsprechende werde mit $\varkappa'_{gp}$ bezeichnet. Dreht man nun g um X, so sind die Geraden (g) als Tangenten der Kegelschnitte $(\varkappa_{gp})$ diesen projectiv zugeordnet, und folglich ist $(g) \barwedge (\varkappa'_{gp})$. Die Curve $C_g^{(3)}$ hat mit dem Kegelschnitte $\varkappa'_{gp}$ neben $XXYU'V'$ noch den Punkt gemein, in dem p den Kegelschnitt $\varkappa'_{gp}$ trifft, also eben den Punkt X, d. h. X ist doppelt zu zählen, der Kegelschnitt $\varkappa'_{gp}$ berührt $C_g^{(3)}$ in X. Die gemeinsame Tangente sei t. Dann sind die Tangenten (t) der Curven $(C_g^{(3)})$, wenn g den Büschel (g) durchläuft, den Kegelschnitten $(\varkappa'_{gp})$ projectiv, und diese sind den Geraden (t) projectiv, also ist $(g) \barwedge (t)$. Nun sagt man aber, dass ein Curvenbüschel den Tangenten der Curven in einem Grundpunkte projectiv zugeordnet sei, man kann deshalb sagen, es sei $(g) \barwedge (C_g^{(3)})$, und es werde $M^{(4)}$ durch einen Strahlenbüschel und einen ihm projectiven Büschel von Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte erzeugt.

§ 21. **Die Kegelschnitte eines $M^{(4)}$ erzeugenden Büschels treffen diese Curve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien sich auf einen**

Kegelschnitt stützen. — Sind die beiden $M^{(4)}$ erzeugenden Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$ und $(\varkappa')$, so sind sie einander projectiv zugeordnet, der erste gehe durch $XYUV$, der zweite durch $XYU'V'$. Der Büschel $(\varkappa)$ bestimmt auf einem Individuum $\varkappa'$ des Büschels $(\varkappa')$ eine Involution, von der die zerfallenden Kegelschnitte $(XU)\cdot(YU)$ das Paar PQ, $(XV)\cdot(YU)$ das Paar RS bestimmen. Das Involutionscentrum J dieser Involution ist der Schnitt von (PQ) mit (RS) und liegt auf der Geraden (UV), weil $(YX)\cdot(UV)$ ebenfalls ein Kegelschnitt des Büschels $\varkappa$ ist, und also (UV) ein Paar der Involution auf $\varkappa'$ bestimmt. Variirt man $\varkappa'$, indem man andere und andere Kegelschnitte des Büschels $(\varkappa')$ dafür setzt, so variirt das Involutionscentrum J und durchläuft eine Punktreihe (J) auf (UV), die Punkte RS durchlaufen Reihen (R) auf (XV) und (S) auf (YU), und zwar so, dass $(R)\,\overline{\wedge}\,(S)\,\overline{\wedge}\,(\varkappa')$ ist. Da aber der durch den Schnittpunkt von $(XV)\,(YU)$ gehende Kegelschnitt des Büschels $(\varkappa')$

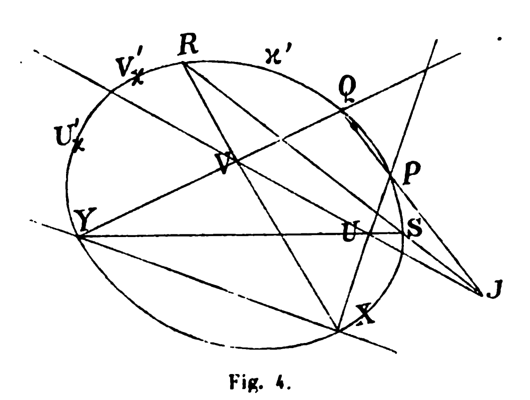


Fig. 4.

die beiden Träger der projectiven Reihen $(R)\,(S)$ in denselben Punkten trifft, so sind diese Reihen perspectiv, die Geraden (RS) gehen durch einen Punkt, und es ist folglich $(J)\,\overline{\wedge}\,(R)\,\overline{\wedge}\,(S)$, und also $(J)\,\overline{\wedge}\,(\varkappa')$. Auf der Geraden $(U'V')$ erzeugen die Kegelschnitte $(\varkappa)$ in gleicher Weise eine ihnen und $(\varkappa')$ projective Punktreihe (J'), wenn J' durch die Verbindungslinien der beiden Schnittpunkte irgend eines Kegelschnittes der Reihe $(\varkappa')$ mit einem Kegelschnitt der Reihe $(\varkappa)$ auf $(U'V')$ bestimmt wird. Sind nun $(\varkappa)\,(\varkappa')$ einander projectiv zugeordnet, so bestimmt die Verbindungslinie der Schnittpunkte eines entsprechenden Paares $\varkappa\varkappa'$ zwei Punkte JJ' bez. auf (UV) und $(U'V')$, und wenn $\varkappa\varkappa'$ der Bedingung $(\varkappa)\,\overline{\wedge}\,(\varkappa')$ gemäss variiren, so durchlaufen JJ' projective Punktreihen und ihre Verbindungslinien sind Tangenten eines Kegelschnittes. Die Geraden $(UV)\,(U'V')$ gehören zu den Verbindungslinien, denn dem Kegelschnitt $(UV)\cdot(XY)$ der Reihe $(\varkappa)$ entspricht ein Kegelschnitt der Reihe $(\varkappa')$, und (UV) ist selbst die Verbindungslinie der Schnittpunkte dieser beiden Kegel-

schnitte. — Legt man durch die Doppelpunkte XY und zwei andre Punkte einer Curve $M^{(4)}$ einen Kegelschnittbüschel $(\varkappa)$, so treffen die Individuen desselben die Curve in Punktepaaren, deren Verbindungslinien einen Kegelschnitt zur Stützcurve haben, und von dem die Verbindungslinie der beiden gewählten Grundpunkte des Kegelschnittbüschels eine Tangente ist, denn die oben angenommenen Punkte UV sind vor andern der Curve $M^{(4)}$ nicht bevorzugt, nur dass sie nicht auf einer Geraden durch X oder Y liegen dürfen.

§ 22. **Der Directionsbüschel $m^{(4)}$ ist das dualistische Gegenstück zur Curve $M^{(4)}$.** — Legt man durch eine Gerade eines Hyperboloides Φ einen Ebenenbüschel, so bestimmt jede Ebene eine zweite Gerade auf Φ, die Geraden einer Schaar Erzeugender von Φ liegen einem oder vielmehr unendlich vielen Ebenenbüscheln, deren Axen der zweiten Schaar angehören, perspectiv. Man kann die Geraden der einen Schaar sowohl unter sich, als auch den Geraden der andern Schaar projectiv zuordnen, indem man die Geraden einander entsprechen lässt, die durch projective Ebenenbüschel bestimmt werden. Projective Strahlenreihen bestimmen auf einem in Φ liegenden Kegelschnitte projective Punktreihen, denn die beiden, die projectiven Strahlenreihen aufnehmenden projectiven Ebenenbüschel treffen die Ebene der Kegelschnitte in projectiven Strahlenbüscheln. Der Kegelschnitt geht durch die Centren der Strahlenbüschel, weil die Axen der Ebenenbüschel zu Φ gehören, also jeden in Φ liegenden Kegelschnitt treffen. Die Strahlen projectiver Büschel bestimmen auf einem Kegelschnitte projective Punktreihen, wenn die Träger der Büschel auf dem Kegelschnitte liegen. Daraus folgt auch, dass Strahlenreihen auf einem Hyperboloid immer unter einander projective Ebenenbüschel bestimmen, wenn deren Axen auf dem Hyperboloid beliebig verschieden angenommen werden.

Legt man von Q aus an Φ einen Tangentenkegel, der kurz als Kegel Q bezeichnet werden mag, so berührt er Φ in einem Kegelschnitte μ. Projective Strahlenreihen in Φ treffen den Kegelschnitt μ in projectiven Punktreihen, und diesen sind die Tangenten an μ projectiv zugeordnet. Projicirt man die Geraden des Hyperboloides von Q aus, so erhält man einen sich auf den Kegel Q stützenden Ebenenbüschel, dessen Ebenen den Strahlen auf Φ projectiv zugeordnet sind.

Das Hyperboloid Φ mag zu einer Curve $M^{(4)}$ und deren Ebene $\mathfrak{E}$ eine solche Lage haben, wie sie im § 5 angenommen wurde. Die Curve $M^{(4)}$ übertragen wir durch stereographische Projection wie im § 5 auf Φ und erhalten als Bild eine Raumcurve $R^{(4)}$ auf Φ. Die durch XY gehenden $M^{(4)}$ projicirenden Geraden (x) (y), die in projectiv zweizweideutiger Beziehung zu einander stehen, entsprechen stereographisch geraden Linien $(\bar{x})$ $(\bar{y})$ verschiedener Schaaren des Hyperboloides Φ, sie stehen ebenfalls in projectiv zweizweideutiger Beziehung zu einander, und die entsprechenden Strahlen schneiden sich auf $R^{(4)}$.

Jede Gerade $\bar{x}$ auf Φ der einen Schaar trifft $R^{(4)}$ in zwei Punkten, und zu jedem dieser Punkte giebt es zwei Strahlen $\bar{y}\bar{y}_1$ der andern Schaar, so dass $\bar{x}$ zwei Strahlen $\bar{y}\bar{y}_1$ zugeordnet sind, und umgekehrt jedem $\bar{y}$ zwei Strahlen $\bar{x}$, und diese Zuordnung ist nach den oben angestellten Betrachtungen eine projectiv zweizweideutige. Von jeder Raumcurve (erster Species) auf einem Hyperboloid lässt sich sagen, dass sie eine projectiv zweizweideutige Verwandtschaft zwischen den Erzeugenden der beiden Schaaren bestimmt. Projicirt man die Strahlen $(\bar{x})$ $(\bar{y})$ von einem Punkte Q in die Ebene $\mathfrak{E}$, so bilden sie sich dort auf die Tangenten eines Kegelschnittes ν ab, die Spur des Tangentenkegels Q an Φ in der Ebene $\mathfrak{E}$. Die Projectionen der $(\bar{x})$ $(\bar{y})$ mögen bez. mit $(\mathfrak{x})$ $(\mathfrak{y})$ bezeichnet werden. So ist $(\mathfrak{x}) \barwedge (\bar{x}) \barwedge (x)$, $(\mathfrak{y}) \barwedge (\bar{y}) \barwedge (y)$ und da $(x) \overset{2,2}{\barwedge} (y)$ ist, so folgt, dass $(\mathfrak{x}) \overset{2,2}{\barwedge} (\mathfrak{y})$ sei. Die Schnittpunkte $(\mathfrak{M})$ entsprechender Strahlen der $(\mathfrak{x})$ $(\mathfrak{y})$ sind die Projectionen der Punkte $R^{(4)}$ von Q aus gesehen. Sie erzeugen eine Curve $\mathfrak{M}^{(4)}$, welche von derselben Art ist als $M^{(4)}$. Denn durch Q lässt sich eine Fläche zweiten Grades legen, die $R^{(4)}$ enthält, und diese lässt sich durch stereographische Projection, deren Centrum Q ist, in eine Ebene $\mathfrak{E}'$ auf eine Curve $M'^{(4)}$ abbilden, und diese ist $\mathfrak{M}^{(4)}$ collinear. Die Tangenten des Kegelschnittes ν sind demnach einander zweizweideutig projectiv zugeordnet und erzeugen eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, die Doppelpunkte werden durch die beiden involutorischen Paare der zweizweideutigen Verwandtschaft der Tangenten von ν bestimmt.

Ist auf dem Tangentenbüschel des Kegelschnittes ν in der Ebene $\mathfrak{E}$ eine zweizweideutige projective Verwandtschaft gegeben, und sind $M_1 M_2 \ldots M_8$ die Schnittpunkte von acht Paaren, so übertragen wir

dieselben durch Projection von Q aus auf das Hyperboloid Φ und legen durch die Bildpunkte $R_1 R_2 \ldots R_8$ der $M_1 M_2 \ldots M_8$ eine Raumcurve vierter Ordnung (erster Species) $R^{(4)}$, so bestimmt diese Curve zwischen den erzeugenden $(\bar{x})$ $(\bar{y})$ der Fläche Φ eine projective zweizweideutige Verwandtschaft. Projicirt man $R^{(4)}$ von Q aus auf $\mathfrak{S}$, so wird die Projection eine Curve $\mathfrak{M}^{(4)}$, und aus den Strahlen $(\bar{x})$ $(\bar{y})$ werden die Tangenten an ν. Zwischen ihnen besteht eine zweizweideutige projective Verwandtschaft, die der durch $R^{(4)}$ bestimmten Verwandtschaft $(\bar{x}) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (\bar{y})$ entspricht, die Verwandtschaft $(\mathfrak{x}) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (\mathfrak{y})$, wenn die $(\mathfrak{x})$ die Projectionen der $(\bar{x})$, die $(\mathfrak{y})$ die Projectionen der $(\bar{y})$ von Q aus sind. Diese Verwandtschaft hat mit der gegebenen acht Paare gemein, fällt also ganz mit ihr zusammen. Daraus folgt, dass jede zweizweideutige projective Verwandtschaft unter den Tangenten des Kegelschnittes ν eine Curve $M^{(4)}$ bestimmt, mit zwei Doppelpunkten, die als Erzeugniss zweier projectiver Kegelschnittbüschel darstellbar ist. Da ein Kegelschnitt jedem andern Kegelschnitte collinear ist, so gilt der Satz von jedem Kegelschnitte. Das Gesetz der Dualität führt zu dem Satze: Ist auf einem Kegelschnitte eine zweizweideutig projective Punktverwandtschaft gegeben, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Paare einen Büschel vierter Ordnung $m^{(4)}$ mit zwei Doppelstrahlen, der als Erzeugniss zweier projectiver Büschel von Büscheln zweiter Ordnung angesehen werden kann und also das dualistische Gegenstück zur Curve $M^{(4)}$ ist. Selbstverständlich kann $m^{(4)}$ in zwei Büschel zweiter Ordnung zerfallen, und diese können wieder zusammenfallen, wie es nach § 19 statthat, wenn die Verwandtschaft eine symmetrische ist.

§ 23. **Zusammensetzung einer symmetrischen Verwandtschaft mit derselben Verwandtschaft.** — Sind zwei Kegelschnitte $\omega\,\gamma$ gegeben, so giebt es einen dritten Kegelschnitt λ von der Beschaffenheit, dass γ die harmonische Contravariante für ω und λ ist, d. h. λ liegt so, dass die $\omega\,\lambda$ in harmonischen Punkten treffenden Geraden sich auf γ stützen. Die gemeinsamen Tangenten von $\omega\,\gamma$ seien $lnuv$, sie mögen γ in den Punkten $LNUV$ berühren. Dann bestimmen $LNUV$ einen Kegelschnittbüschel (x), gleichviel ob $LNUV$ aggregirt ideale Punkte sind oder reale. Zieht man an γ die reale Tangente a, die ω in den Punkten AB trifft, so bestimmen die Kegelschnitte (x) auf a eine Involution, in der es ein Paar giebt, das von AB har-

monisch getrennt ist. Der durch dieses Paar gehende reale oder ideale Kegelschnitt des Büschels ($\varkappa$) sei λ. Dann ist γ die harmonische Contravariante zu ω und λ. Denn die harmonische Contravariante zu ω und λ ist ein Kegelschnitt, der einerseits die Geraden $lnuv$ zu Tangenten hat, andrerseits aber auch die Gerade a, die λ und ω in vier harmonischen Punkten trifft. Die harmonische Contravariante ist daher der Kegelschnitt γ. Die harmonische Contravariante ist von SCHRÖTER in seiner Theorie der Kegelschnitte und daraus entlehnt in meiner »Theorie der Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung« auf Seite 117 rein projectiv behandelt. Dort ist zwar λ als real vorausgesetzt, doch gelten die angewandten Schlussweisen auch für einen idealen Kegelschnitt (ein Polarsystem) λ.

Ist nun B ein Punkt auf ω und b seine Polare in Bezug auf λ, so trifft sie ω in zwei Punkten AA_1, und es sind die Geraden (BA) (BA_1) zugleich Tangenten von γ als der harmonischen Contravariante zu ω und λ. Die Polaren b von B in Bezug auf λ stützen sich auf einen Kegelschnitt μ, den Polarkegelschnitt von ω für λ, wenn B die Reihe (B) auf ω durchläuft. Die Tangenten von μ bestimmen nach § 19 eine zweizweideutig projective symmetrische Verwandtschaft auf ω, und die Polaren (b) sind die Verbindungslinien der Punkte (A) (A_1). Dies lässt sich so aussprechen: Ist eine zweizweideutige symmetrische projective Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$$

gegeben, und bestimmt man zu A die entsprechenden Punkte BB', zu BB' die entsprechenden Punkte AA_1 bez. AA_1', so werden dadurch dem Punkte A zwei Punkte A_1A_1' zugeordnet, und diese Zuordnung ist eine zweizweideutige symmetrische projective Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (A_1).$$

Diese Verwandtschaft entsteht aus der Verwandtschaft $(A)\,(B)$ durch Zusammensetzung derselben mit dieser Verwandtschaft selbst, indem zu A ein entsprechender Punkt B und zu diesem in derselben Verwandtschaft der entsprechende Punkt A_1 construirt wird, und AA_1 einander zugeordnet werden. — Die Verzweigungselemente der Mutterverwandtschaft sind auch die Verzweigungselemente der aus ihr in der besprochenen Weise erzeugten. Denn entspricht dem Elemente A

der Verwandtschaft (A) (B) nur ein Element (B), fallen die oben mit BB' bezeichneten Punkte zusammen, so entspricht BB' auch nur ein Element A_1, die oben mit $A_1 A_1'$ bezeichneten Elemente fallen zusammen, d. h. A ist auch Verzweigungselement der Verwandtschaft (A) (A_1).

Ist der Kegelschnitt ω der Träger der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ und ist γ der Träger ihres Directionsbüschels, und ist A ein Schnittpunkt von γ und ω, so giebt es von A nur eine Tangente an γ, zu A gehört nur ein Punkt B, A ist ein Verzweigungselement. Da nun $(A) \overset{2,2}{\sim} (A_1)$ dieselben Verzweigungselemente hat als $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$, so muss der Kegelschnitt μ durch die Schnittpunkte von ω mit γ gehen, oder es ist μ ein Individuum des Kegelschnittbüschels (ω, γ). — Wie hieraus ein Theil der Poncelet'schen Schliessungssätze folgt, habe ich in Schlömilch's Zeitschrift, Jahrgang XXXIX, auf Seite 316 gezeigt. Aus den allgemeinen Poncelet'schen Sätzen lässt sich schliessen: Sind

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B) \qquad (B) \overset{2,2}{\sim} (C)$$

zwei symmetrische zweizweideutige projective Verwandtschaften mit denselben Verzweigungselementen, so erzeugen sie durch Zusammensetzung, ich meine dadurch, dass man zuerst zu A die entsprechenden Punkte BB' der ersten Verwandtschaft, und zu diesen die entsprechenden Punkte $CC_1C'C_1'$ der zweiten Verwandtschaft bestimmt, eine viervierdeutige Verwandtschaft zwischen (A) und (C), die in zwei projective symmetrisch zweizweideutige Verwandtschaften zerfällt. Umgekehrt würde man aus diesem Satze die allgemeinen Poncelet'schen Sätze folgern, wenn sich ein selbständiger Beweis für ihn beibringen liesse. Dies ist mir bisher nicht geglückt, indem ein Beweis, den ich zu haben glaubte, sich vom rein projectiven Standpunkte nicht als lückenlos herausstellte.

§ 24. **Die Begleiterin einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft.** — Eine jede zweizweideutige Verwandtschaft erzeugt durch Zusammensetzung mit sich selbst eine symmetrische zweizweideutige projective Verwandtschaft, die wir die Begleiterin der gegebenen Verwandtschaft nennen wollen. Es sei

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B)$$

die gegebene Verwandtschaft. Dem Elemente A der ersten Reihe mögen die Elemente BB' der zweiten Reihe entsprechen, diesen entsprechen als Elementen der ersten Reihe die Elemente AA_1, AA_1'. So wird A den Elementen $A_1 A_1'$ zugeordnet, und es ist klar, dass in dieser Zuordnung A_1 als Element der ersten Reihe A und noch ein andres Element der andern Reihe entspricht, dass demnach die Zuordnung eine zweizweideutige symmetrische ist, es fragt sich nur, ob sie eine projective zu nennen ist, was für den Fall $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ im vorigen Paragraphen bereits erwiesen wurde.

Die Verzweigungselemente der Reihe (B) erzeugen die Doppelelemente der begleitenden Verwandtschaft, denn entspricht A dem Elemente B und B nur A, so fällt A_1 auf A, A ist Doppelelement.

Ist $(A) \barwedge (C)$, $(B) \barwedge (D)$, so entspricht dem Punktepaare AB ein Paar CD, und es besteht zwischen (C) (D) eine zweizweideutige projective Verwandtschaft. Bilden wir gleichzeitig zu (A) (B) und (C) (D) die begleitenden Verwandtschaften (A) (A_1) und (C) (C_1), so ist zunächst $(A) \barwedge (C)$, A_1 ist der B neben A in der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\barwedge} (B)$ entsprechende Punkt, C_1 der dem Punkte D in der Verwandtschaft $(C) \overset{2,2}{\barwedge} (D)$ neben C entsprechende Punkt. Man findet daher C_1 aus A_1 genau so wie C aus A, es sind $C_1 A_1$ entsprechende Punkte der Projectivität $(A) \barwedge (C)$. Mit andern Worten: ist die Verwandtschaft (A) (B) mit der Verwandtschaft (C) (D) im Sinne des § 8 in Correspondenz, so sind auch die begleitenden Verwandtschaften (A) (A_1) und (C) (C_1) mit einander in Correspondenz. Nun kann man nach § 15 die Correspondenz so bestimmen, dass (C) (D) eine symmetrische zweizweideutige Verwandtschaft wird, für sie ist im vorigen Paragraphen erwiesen, dass ihre Begleiterin eine projective zweizweideutige Verwandtschaft sei, woraus folgt, dass auch die $(A) \overset{2,2}{\barwedge} (B)$ begleitende zweizweideutige Verwandtschaft eine projective sei[1]).

1) Will man diesen Satz algebraisch erweisen, so kann man AB als Maasszahlen von Abscissen einer Geraden denken. Zwischen ihnen besteht eine Gleichung vom zweiten Grade in A und vom zweiten Grade in B, $f(A, B) = 0$. Ist A_1 ein B entsprechender Punkt, so ist $f(A_1, B) = 0$. Eliminirt man aus beiden Gleichungen B, so erhält man einen Ausdruck vierten Grades in den Variabeln AA_1, der den Factor $A - A_1$ zweimal enthält. Unterdrückt man ihn, so erhält man eine in A und A_1 symmetrische Gleichung in jeder Variabeln vom zweiten Grade, die eine zweizweideutige Verwandtschaft definirt.

§ 25. **Zusammensetzung einer symmetrischen zweizweideutigen Verwandtschaft mit einer gewissen Involution.** — Ist

$$(A) \overset{2,2}{\barwedge} (B)\,, \quad (B) \barwedge (C)\,,$$

so ist $(A) \overset{2,2}{\barwedge} (C)$. Es sei die Verwandtschaft (A) (B) eine symmetrische und liege auf einem Kegelschnitte ω, der Stützkegelschnitt des Directionsbüschel sei λ, so dass die Tangenten von λ die Paare der Verwandtschaft auf ω bestimmen. Die projective Beziehung $(B) \barwedge (C)$ sei eine involutorische, und die Verzweigungselemente der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ seien zwei Paare der Involution. Dann ist

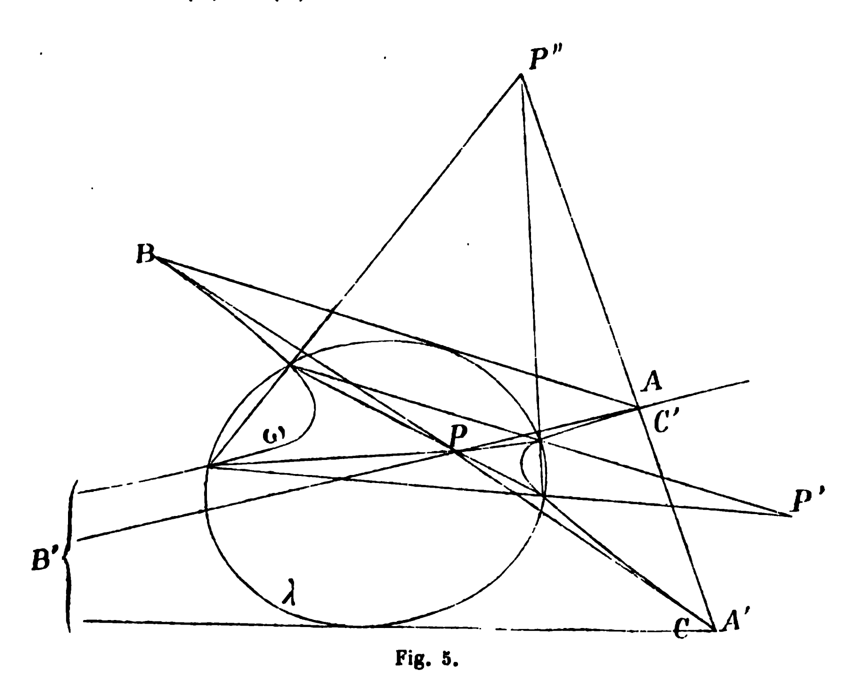


Fig. 5.

das Involutionscentrum ein Punkt, der für ω und λ dieselbe Polare hat, also einer der drei Punkte $PP'P''$ der Zeichnung, der Ecken des $\omega\lambda$ gemeinsamen Polardreiecks, dessen $PP'P''$ gegenüberliegende Seiten bez. mit $pp'p''$ bezeichnet werden mögen. Wir wählen P als Involutionscentrum der Involution $(B) \barwedge (C)$. P'' bestimmt als Involutionscentrum auf ω eine Involution, die mit der Verwandtschaft (A) (B) zwei Paare gemein hat. Die Punkte AC der Zeichnung seien das eine Paar. Dann trifft die Tangente von A an λ ω in B, und die Gerade (BP) trifft ω in C. Dieses Paar ist ein involutorisches Paar der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\barwedge} (C)$. Denn macht man P'' zum Centrum

einer Collineation, in der p'' Fluchtlinie ist, und in der auf jedem Strahle durch P'' einem Punkte E der Punkt E' zugeordnet ist, der von E durch P'' und p'' harmonisch getrennt ist, so bilden sich in dieser Collineation die Kegelschnitte $\omega\,\lambda$ auf sich selbst ab. Der A entsprechende Punkt A' fällt mit C zusammen, die Tangente (AB) an λ bildet sich auf die Tangente $(A'B')$ an λ ab und die Gerade (BPC) auf $(B'PC')$, wobei C' mit A zusammenfällt. Daraus folgt, dass AC ein involutorisches Paar ist. Dasselbe gilt von dem zweiten Paare, das der Involution (P'') und der Verwandtschaft (A) (B) gemein ist. Dieselbe Betrachtung am Punkte P' angestellt liefert noch zwei involutorische Paare der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (C)$, sie hat also mehr als zwei involutorische Paare und ist deshalb (§ 13) eine symmetrische.

Damit ist ein specieller Fall der PONCELET'schen Sätze erwiesen. Zieht man von einem Punkte A eines Kegelschnittes ω eine Tangente an den Kegelschnitt λ, die ω in B trifft, und legt man durch ihn eine Gerade durch einen Grenzpunkt (oder Grenzkegelschnitt) P des Büschels (ω, λ) die ω in C trifft, so stützen sich die Geraden (AC), wenn A variirt, auf einen Kegelschnitt μ, der dem Büschel (ω, λ) angehört. Da die Punkte $PP'P''$ als reale vorausgesetzt sind, so beschränkt sich der Beweis allerdings auf den Fall, dass sich die Kegelschnitte $\omega\,\lambda$ entweder viermal real, oder viermal ideal schneiden.

§ 26. **Eine Curve achter Ordnung mit zwei vierfachen Punkten und vier Doppelpunkten.** — Liegen auf einer Geraden g oder einem Kegelschnitte γ zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften

$$\text{(I)}\ (A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B'), \quad \text{(II)}\ (B') \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$$

und ist das Element B' der zweiten Reihe der Verwandtschaft (I) zugleich ein Element der ersten Reihe der Verwandtschaft (II), so gehören zu einem Punkte A der Reihe (A) zwei Punkte B', etwa $B'B'_1$, der Verwandtschaft (I), und zu $B'B'_1$ gehören je zwei Punkte der Reihe B in (II), etwa $BB_1B_2B_3$, so dass einem Elemente A vier Elemente $BB_1B_2B_3$ zugeordnet sind. Umgekehrt gehören zu einem Elemente B in (II) zwei Elemente B', zu diesen in (I) je zwei Elemente A, so dass dem Elemente B vier Elemente A, etwa $AA_1A_2A_3$, zugeordnet sind, und eine viervierdeutige Verwandtschaft erzeugt wird, die mit

$$(A) \overset{4,4}{\wedge} (B)$$

bezeichnet werden kann. — Projicirt man die Verwandtschaft, wenn sie auf einer Geraden g liegt, von zwei beliebigen Punkten XY aus, wenn sie auf einem Kegelschnitte γ liegt, von zwei Punkten XY dieses Kegelschnittes aus durch Strahlen (x) bez. (y), und schneiden sich die entsprechenden Strahlen (x) (y) in Punkten (N), so bilden diese Punkte eine continuirliche Punktreihe, eine Curve $N^{(8)}$. Diese Curve trifft eine Gerade h oder einen Kegelschnitt $\varkappa$ durch XY im Allgemeinen in acht Punkten. Denn nach § 12 tritt es achtmal ein, dass die durch Projection von XY aus auf h oder $\varkappa$ aus (A) (B') bez. (B') (B) entstehenden zweizweideutigen Verwandtschaften ein Paar miteinander gemein haben.

Ueber diese Coincidenzen wollen wir hier eine nachträgliche Bemerkung machen. Fragt man, wie oft es eintritt, dass die beiden Verwandtschaften

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B), \quad (\mathfrak{A}) \overset{2,2}{\wedge} (\mathfrak{B})$$

ein Paar gemein haben, wenn ein Element der Reihe (A) mit einem Elemente der Reihe $(\mathfrak{A})$ und ein Element der Reihe (B) mit einem Elemente der Reihe $(\mathfrak{B})$ zusammenfallen soll, so folgt aus dem im § 12 gegebenen Verfahren, dass dies achtmal eintritt. Wenn man aber von dieser Zuordnung absieht, schlechthin nach den Coincidenzen der beiden Verwandtschaften fragt, so kann noch ein Element der Reihe (A) als ein Element der Reihe $(\mathfrak{B})$ angesehen werden, und nach den Fällen gefragt werden, in denen nun das A entsprechende Element B mit dem A als Element der Reihe $\mathfrak{B}$ entsprechenden Elemente $\mathfrak{A}$ zusammenfällt. Man erhält dann offenbar wieder acht Fälle, so dass man, wenn eine bestimmte Zuordnung der Reihen nicht gefordert wird, sondern wenn man schlechthin nach der Anzahl der Coincidenzen entsprechender Paare zweier zweizweideutiger projectiver Verwandtschaften fragt, die Zahl sechzehn als Antwort erhält. In dem hier in Anwendung kommenden Falle sind aber die Reihen einander in bestimmter Weise zugeordnet, und man erhält daher acht Coincidenzen.

Weil die Curve $N^{(8)}$ von jeder Geraden in nicht mehr als acht Punkten getroffen wird, so sagen wir, sie sei von der achten

Ordnung. — Auf einer Geraden x durch X oder einer Geraden y durch Y liegen ausser X bez. Y nur noch vier Punkte der Curve, denn es ist ja eben die Verwandtschaft zwischen (x) (y) eine viervierdeutige, einem Strahl x entsprechen vier Strahlen y, sie bestimmen auf x vier Punkte N. Dem Strahle (XY) als Strahl von (x) entsprechen in [(y) vier Strahlen, so dass Y und ebenso X zur Curve und zwar viermal gehört, die Punkte XY sind vierfache Punkte der Curve $N^{(8)}$.

Die Curve $N^{(8)}$ besitzt ausserdem noch vier weitere Doppelpunkte. — Entspricht A in der Verwandtschaft (I) den Punkten $B'B'_1$ und B' in II den Punkten BB_1, B'_1 den Punkten B_2B, so giebt es auf dem Strahl (XA) nur drei Punkte von $N^{(8)}$, der Punkt, den der Strahl (YB) auf (XA) bestimmt, ist doppelt zu zählen, (XA) berührt entweder dort $N^{(8)}$, oder der Punkt ist ein Doppelpunkt. Nun entspricht B in der Verwandtschaft (II) den Punkten $B'B'_1$, B' entspricht in der Verwandtschaft (I) A und A_1, und B'_1 entspricht in (I) A und A_2. Auf dem Strahle (YB) giebt es wieder nur drei Punkte von $N^{(8)}$, und zwar ist der Punkt, den der Strahl (XA) auf (YB) bestimmt, doppelt zu zählen, (YB) berührt dort ebenfalls $N^{(8)}$, oder vielmehr der Punkt ist ein Doppelpunkt, weil er auf zwei Geraden durch ihn doppelt zu zählen ist, wir begründen dies noch weiter, nachdem wir die Zahl dieser Punkte ermittelt haben.

Gehören zu A in (I) die beiden Punkte $B'B'_1$, so besteht zwischen $B'B'_1$ eine symmetrische zweizweideutige projective Verwandtschaft $(B') \overset{2,2}{\sim} (B'_1)$, gehören in (II) zu B die beiden Punkte $B''B''_1$, so besteht zwischen $B''B''_1$ ebenfalls eine symmetrische zweizweideutige projective Verwandtschaft $(B'') \overset{2,2}{\sim} (B''_1)$. Diese beiden Verwandtschaften haben vier Paare miteinander gemein. Fällt $(B''B''_1)$ auf $(B'B'_1)$, so gehört zu A in (I) $B'B'_1$, und zu diesen Punkten gehören in (II) BB_1 BB_2, so dass in der viervierdeutigen Verwandtschaft zwischen (A) und (B) dem Elemente A die Elemente BBB_1B_2 entsprechen. Umgekehrt entsprechen in derselben Verwandtschaft dem Elemente B die Elemente AAA_1A_2. Da dies viermal vorkommt, so giebt es vier Doppelpunkte auf $N^{(8)}$, sie seien $D_1D_2D_3D_4$.

Legt man durch einen solchen Punkt D eine Gerade h, oder einen durch XY gehenden Kegelschnitt $\varkappa$, so bestimmen die (XA) (YB'), (XB') (YB) auf diesem Träger zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften, etwa

$$(C) \overset{2,2}{\wedge} (E') \qquad (E'') \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (F)$$

und da $(E') \overline{\wedge} (E'')$ ist, die Verwandtschaften

$$(C) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (E') \qquad (E') \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (F) ,$$

und diese bestimmen die viervierdeutige Verwandtschaft

$$(C) \overset{4,4}{\wedge} (F) .$$

Die Punkte, die $N^{(6)}$ mit h bez. mit $\varkappa$ gemein hat, sind die Punkte, die demselben Punkte E' sowohl in der Verwandtschaft (C) (E') als auch in der Verwandtschaft (E') (F) entsprechen. Im Allgemeinen kommt dies achtmal vor. Geht aber h oder $\varkappa$ durch einen Doppelpunkt D, so giebt es zwei verschiedene Elemente E', denen D sowohl in der Reihe der (C) als auch in der Reihe der F entspricht, und es fallen deshalb nur noch für sechs andere Elemente E' die zugehörigen Elemente der (C) und (F) zusammen, und h oder $\varkappa$ hat ausser D nur noch sechs Punkte mit $N^{(8)}$ gemein, so dass dieser Punkt auf jeder Geraden durch ihn doppelt zu zählen ist, was eben die charakteristische Eigenschaft eines Doppelpunktes ist.

Sind die Verzweigungselemente der Reihe (B') in der Verwandtschaft (I) zugleich die Verzweigungselemente derselben Reihe (B') in der Verwandtschaft (II), so hat die Curve $N^{(8)}$ noch vier weitere Doppelpunkte.

Entspricht nämlich

in (I)	in (II)
B': AA	B': BB,

so entspricht

in (I)	in (II)
A: $B'B_1'$	$B'B_1'$: BBB_1B_2 ,

auf dem Strahl (XA) bestimmen daher die Strahlen $(YB)(YB)(YB_1)(YB_2)$ nur drei Punkte von $N^{(8)}$, der Schnittpunkt von (XA) (YB) ist doppelt zu zählen. Ebenso entspricht

in (II)	in (I)
B: $B'B_3'$	$B'B_3'$: AAA_3A_4 .

Auf (YB) bestimmen (XA) (XA) (XA_3) (XA_4) nur drei Punkte von $N^{(8)}$. Der Punkt (XA) (YB) ist auch auf (YB) doppelt zu

zählen. Der Punkt ist auf zwei Geraden doppelt zu zählen, man beweist wie oben, dass er auf jeder Geraden doppelt zu zählen ist, dass er ein Doppelpunkt ist.

An diese Curven $N^{(8)}$ dürfte die Untersuchung über Zusammensetzung zweizweideutiger Verwandtschaften anzuknüpfen haben.

Inhalt.

